©2008. **Доманська О.В.**

ВАРІАЦІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ НЕРІВНОСТІ В УЗАГАЛЬНЕНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА-СОБОЛЄВА

Знайдено класи коректності нелінійних еліптичних нерівностей зі степеневими нелінійностями в необмежених областях. Елементи цих класів можуть мати довільну поведінку на нескінченності. Розглядається випадок змінних та різних відносно різних похідних показників нелінійності і шукаються узагальнені розв'язки відповідних задач з узагальнених анізотропних просторів Лебега-Соболєва

Ключові слова: варіаційні еліптичні нерівності, узагальнені анізотропні простори Лебега-Соболєва, узагальнений розв'язок
MSC (2000): 35R45, 35J85, 35D05

Вступ.

Нелінійні рівняння та нерівності зі змінними показниками нелінійності в анізотропних просторах виникають при математичному моделюванні багатьох прикладних задач ([1]—[3]). Наприклад, у монографії [3] описано два типи фізичних процесів: процес відновлення зображення та потоки електро-реологічних речовин, математичне моделювання яких приводить до рівнянь зі змінними показниками нелінійності.

Модельним прикладом задач, які ми досліджуємо, є така задача: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \to [0; +\infty)$, для якої виконуються умови

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \Big(|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i} \Big)_{x_i} + a_0 |u|^{p_0(x)-2} u = f \text{ в } \Omega^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x : u(x) > 0\},$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$; $p_i(x) > 1$, $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$; $a_i > 0$ $(i = \overline{0,n})$ — довільні сталі; $f \leq 0$ — задана на Ω функція.

Узагальненим розв'язком цієї задачі називається функція $u \geq 0$ з протору $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (означення цього простору дано пізніше), яка задовольняє інтегральну нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\,(w\,(v-u))_{x_i}+$$

$$+a_0|u|^{p_0(x)-2}u\,w\,(v-u)-f\,w\,(v-u)\Big\}\,d\,x\geq 0 \qquad (2)$$

для довільних $v\in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $v\geq 0$, та $w\in C^1(\overline{\Omega})$, $w\geq 0$, $\operatorname{supp} w$ — компакт в $\overline{\Omega}$. Така задача є прикладом варіаційної нерівності в необмеженій області.

Варіаційні еліптичні нерівності вивчались в багатьох роботах ([4]—[14]). Зокрема, в роботі [6] розглянуто узагальнення задачі (1) при $p_0(x)>2$, $p_i(x)=2$ $(i=\overline{1,n})$ на випадок систем еліптичних варіаційних нерівностей другого порядку, коли не накладаються обмеження на поведінку розв'язку і зростання вихідних даних на нескінченності. Пізніше аналогічні результати були отримані для деякого класу варіаційних нерівностей вищих порядків ([7]). У даній роботі ми розглядаємо випадок, коли $p_0(x)\geq 2$, $1<p_i(x)\leq 2$ $(i=\overline{1,n})$.

1. Основні позначення.

Нехай n — яке-небудь натуральне число. Через $\mathbb{R}^n$ позначатимемо арифметичний простір впорядкованих наборів з n дійсних чисел, тобто лінійний простір, складений з елементів вигляду $x=(x_1,\ldots,x_n)$, де $x_i\in\mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n})$, з нормою $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Всі функції, які тут розглядаються, визначені на відповідних множинах просторів $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n+1}$ і приймають значення в $\mathbb{R}$. Якщо $v(z)$, $z\in\widetilde{D}$, — яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D\subset\widetilde{D}$.

Нехай Ω — необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з кусковогладкою межею $\partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0\in\Omega$. Для довільного $R>0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega\cap\{x:|x|<R\}$ таку, що $0\in\Omega_R$.

Нехай r — функція з простору $L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x)\geq 1$ для майже всіх $x\in\Omega$. Для будь-якого $R>0$ на просторі $C(\overline{\Omega}_R)$ (неперервних на $\overline{\Omega}_R$ функцій) можна ввести норму

$$\|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{\lambda>0:\rho_{r,R}(v/\lambda)\leq 1\},\ \text{ де }\ \rho_{r,R}(v)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_R}|v(x)|^{r(x)}\,dx.$$

Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega}_R)$ за цією нормою, яке називається *узагальненим простором Лебега*, позначимо через $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ (див., наприклад, [15]). Очевидно, що $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$. Під $L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)},\ R>0$. Покладемо

$$L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega)=\Big\{v\in L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\sup_{R>0}\|v|_{\Omega_R}\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}<\infty\Big\}.$$

Нехай $p_i\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i=\overline{0,n}$, причому $p_i(x)\geq 1$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $x\in\Omega$. Позначимо $p\overset{\mathrm{def}}{=}(p_0,p_1,\ldots,p_n)$. Для кожного $R>0$ під $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega}_R)$ за нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\overset{\mathrm{def}}{=}\|v\|_{L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}+\sum_{i=1}^{n}\|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}.$$

Очевидно, що $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є підпростором простору $\big\{v(x),\ x\in\Omega_R:$ $v\in L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_R),\ \ v_{x_i}\in L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)\ (i=\overline{1,n})\big\}$. На просторі $C^1(\overline{\Omega})$ введемо топологію лінійного локально опуклого простору за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$ (див. [16]). Замикання простору $C^1(\overline{\Omega})$ за введеною топологією позначимо через $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною до v в цьому просторі, якщо $\|v_k-v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ для кожного $R>0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R}\in W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ для будь-якого $R>0$, якщо $v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$. Покладемо

$$C^{1,+}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1(\overline{\Omega}):v\geq 0\ \text{на}\ \Omega\},$$

$$C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}):v\geq 0\ \text{на}\ \Omega\}.$$

2. Формулювання задачі і основних результатів.

Далі всюди припускатимемо, що виконуються умови

(P) $p_i \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{0,n}$,

$$p_0^- \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_0(x) \geq 2, \qquad p_0^+ \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_0(x) < \infty,$$

$$p_i^- \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) > 1, \quad p_i^+ \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) \leq 2, \quad i=\overline{1,n},$$

$$q_i^- \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q_i(x) > n, \quad q_i^+ \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q_i(x) < +\infty, \quad i=\overline{1,n},$$

де $q_i(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{p_0(x)p_i(x)}{p_0(x)-p_i(x)}$, $x\in\Omega$ $(i=\overline{1,n})$. Через p_i^* позначатимемо функцію таку, що $\frac{1}{p_i(x)}+\frac{1}{p_i^*(x)}=1$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $x\in\Omega$.

(A1) Для кожного $i\in\{0,\dots,n\}$ функція $a_i(x,\xi)$, $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x\in\Omega$ функція $a_i(x,\cdot\,):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi\in\mathbb{R}$ функція $a_i(\cdot\,,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

(A1′) $a_i(x,0)=0$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $x\in\Omega$;

(A2) для кожного $i\in\{1,\dots,n\}$ та майже всіх $x\in\Omega$ існує похідна $\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial\xi}$, $\xi\neq 0$, і виконується нерівність

$$K_i|\xi|^{p_i(x)-2} \leq \frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial\xi} \leq \widetilde{K}_i(1+|x|)^{\sigma_i}|\xi|^{p_i(x)-2}, \qquad \xi\neq 0,$$

де $K_i>0$, $\widetilde{K}_i>0$, $\sigma_i\geq 0$ — деякі сталі;

(A3) для майже всіх $x\in\Omega$ існує похідна $\frac{\partial a_0(x,\xi)}{\partial\xi}$, $\xi\neq 0$, і виконуються нерівності

$$\frac{\partial a_0(x,\xi)}{\partial\xi} \geq K_0|\xi|^{p_0(x)-2}, \quad \xi\neq 0,$$
$$\text{та } |a_0(x,\xi)| \leq \widetilde{K}_0|\xi|^{p_0(x)-1}+h(x), \quad \xi\in\mathbb{R},$$

де K_0, $\widetilde{K}_0$ — деякі додатні сталі, а h — функція з $L_{p_0^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

(A4) сталі $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ в умові **(A2)** такі, що

$$n-q_i^-+\sigma_i\frac{q_i^+}{p_i^-}<0, \qquad i=\overline{1,n};$$

(**F**) $f_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ i = \overline{0, n}$.

Зауваження 1. Умови (**A1**) – (**A4**) задовольняють функції

$$a_0(x)\,|\xi|^{p_0(x)-2}\,\xi,\ a_1(x)\,|\xi|^{p_1(x)-2}\,\xi,\ \ldots,\ a_n(x)\,|\xi|^{p_n(x)-2}\,\xi,$$

де $a_i \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ і $|a_i(x)| \le K_i^*(1+|x|)^{\sigma_i}$, $K_i^* > 0$ — стала ($i = \overline{0, n}$).

Відмітимо, що для дійсних чисел r, r_k, $k \in \mathbb{N}$, і довільного $p > 1$ виконується нерівність $(|r_k|^{p-2}r_k - |r|^{p-2}r)(r_k - r) \ge 0$ ($k \in \mathbb{N}$) і маємо $(|r_k|^{p-2}r_k - |r|^{p-2}r)(r_k - r) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ тоді і лише тоді, коли $r_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r$. Тому на лінійному просторі $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ можна ввести таке поняття збіжності послідовностей: послідовність елементів $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до v, якщо

$$\int\limits_{\Omega_R} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(|v_{k,x_i}|^{p_i(x)-2} v_{k,x_i} - |v_{x_i}|^{p_i(x)-2} v_{x_i}\big) \times \\ \times \big(v_{k,x_i} - v_{x_i}\big) + |v_k - v|^{p_0(x)} \Big\}\, d\,x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для будь-якого $R > 0$. Цей простір з такою збіжністю позначимо через $\mathbb{U}_p$.

Під K розумітимемо опуклу замкнену підмножину локально опуклого простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, яка містить 0.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in \mathbb{U}_p$, що задовольняє включення $u \in K$ і нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\,(w(v-u))_{x_i} + a_0(x,u)\,w(v-u) \Big\}\, d\,x \ge \\ \ge \int\limits_{\Omega} \Big\{ f_0\, w(v-u) + \sum_{i=1}^{n} f_i\,(w(v-u))_{x_i} \Big\}\, d\,x. \tag{3}$$

для будь-яких $w \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$ і $v \in K$. Шукану функцію u називатимемо *узагальненим розв'язком* нерівності (3).

Зауваження 2. Як випливає з формулювання нашої задачі, умова (**A1′**) не є принциповою, оскільки в іншому випадку, ввівши позначення

$$\widetilde{a}_i(x,\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} a_i(x,\xi) - a_i(x,0), \\ \widetilde{f}_i(x) \overset{\mathrm{def}}{=} f_i(x) - a_i(x,0) \text{ для м. в. } x \in \Omega \quad (i = \overline{0, n}),$$

нерівність (3) можна записати з $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{f}_i$ замість відповідно a_i, f_i, причому $\widetilde{a}_i(x,0)=0$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $x\in\Omega$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(P)**, **(A1)** – **(A4)**, **(F)**. *Тоді нерівність (3) має не більше одного узагальненого розв'язку, а якщо він існує, то для нього і будь-яких* R_0, R, $0<R_0<R$, $R\geq 1$, *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)}+|u(x)|^{p_0(x)}\Big\}d\,x\leq\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Big[C_1\,R^{n-\gamma}+$$

$$+C_2\int\limits_{\Omega_R}\Big\{|f_0(x)|^{p^*_0(x)}+\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|^{p^*_i(x)}\Big\}\,d\,x\Big],\qquad(4)$$

де $\gamma=\min\limits_{1\leq i\leq n}(q_i^- -\sigma_i q_i^+/p_i^-)$; $s>\max\limits_{1\leq i\leq n}q_i^+$ *— довільне число;* C_1,C_2 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* n, s, p_i^-, p_i^+ $(i=\overline{0,n})$, q_i^-, q_i^+ $(i=\overline{1,n})$.

Нехай $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ — лінійний підпростір лінійного простору $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$ (зокрема, межі носіїв можуть мати непорожній перетин з межею $\partial\Omega$). На просторі $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ збіжність послідовностей визначається так: послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до f в $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, якщо існує значення $R>0$ таке, що носії членів послідовності лежать в $\overline{\Omega}_R$ і $\|f-f_k\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$. Спряжений до $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ простір позначатимемо через $(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))^*$, а дію елемента $f\in(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))^*$ на елемент $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ через $\langle f,v\rangle_*$.

Надалі припускатимемо, що

(K) для множини K існує оператор

$$\beta: W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\longrightarrow(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))^*$$

такий, що $K=\{v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\beta(v)=0\}$;

$$\langle\beta(u_1)-\beta(u_2),w(u_1-u_2)\rangle_*\geq 0$$
$$\forall u_1,u_2\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \ w\in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega});$$

$$\beta(vw)=0\quad\forall v\in K, w\in C^{1,+}(\overline{\Omega}).\qquad(5)$$

Зауваження 3. Нехай $G \subseteq \Omega$ — підобласть або кусково-гладка поверхня, а K — підмножина множини $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$, яка складається з невід'ємних на G функцій. Очевидно, що K — опукла замкнена множина. Для множини K визначимо оператор β, який задовольняє умову $(\mathbf{K})$, за правилом

$$\langle \beta u, v\rangle_* = \int\limits_G u^{(-)} v\, d\,\mu \qquad \forall u \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{G}),\ v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(G),$$

де $d\,\mu = d\,x$, якщо G — підобласть, і $d\,\mu = d\,G$, якщо G — поверхня; $u^{(-)}(x) = u(x)$ при $u(x) < 0$ і $u^{(-)}(x) = 0$ при $u(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in G$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того, умова* $(\mathbf{K})$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок нерівності (3).*

Якщо додатково $f_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, *то для довільних функції* f_0 *та послідовності функцій* $\{f_0^k\}_{k=1}^\infty$ *таких, що* $f_0^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ *в* $L_{p_0^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *маємо* $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ *в* $\mathbb{U}_p$, *де для кожного* $k \in \mathbb{N}$ u_k — *узагальнений розв'язок нерівності, яка відрізняється від (3) тільки тим, що замість* f_0 *стоїть* f_0^k, *а* $f_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

3. Допоміжні твердження.

Легко встановити правильність такого твердження (див. [17], ст. 312).

Лема 1. *Нехай*

$$r \in L_\infty(\Omega),\ r^- \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1,\ r^+ \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} r(x) < +\infty.$$

Тоді для будь-якої функції $v \in L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *справедливі нерівності*

$$\min\Big\{(\rho_{r,R}(v))^{\frac{1}{r^-}}, (\rho_{r,R}(v))^{\frac{1}{r^+}}\Big\} \leq$$
$$\leq \|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)} \leq \max\Big\{(\rho_{r,R}(v))^{\frac{1}{r^-}}, (\rho_{r,R}(v))^{\frac{1}{r^+}}\Big\},$$
$$\min\Big\{\|v\|^{r^-}_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}, \|v\|^{r^+}_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\Big\} \leq \rho_{r,R}(v) \leq$$
$$\leq \max\Big\{\|v\|^{r^-}_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}, \|v\|^{r^+}_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\Big\}.$$

Використовуючи відомі твердження математичного аналізу стосовно глобального екстремуму функцій однієї змінної, легко довести (див., напр., [19]) таке твердження.

Лема 2. *Для будь-яких* $t, s \in \mathbb{R}$ *справедливі нерівності*

$$(|s|^{q-2}s - |t|^{q-2}t)(s-t) \geq 2^{2-q}|s-t|^q, \quad \text{якщо } q \geq 2, \tag{6}$$

$$0 \leq (|s|^{q-2}s - |t|^{q-2}t)(s-t) \leq 2^{2-q}|s-t|^q, \quad \text{якщо } 1 < q \leq 2. \tag{7}$$

Зауваження 4. Для довільних $a \geq 0, b \geq 0, \varepsilon > 0, \nu > 1$ з нерівності Юнга [18]: $a\,b \leq \frac{a^\nu}{\nu} + \frac{a^{\nu^*}}{\nu^*}$, $\nu^* = \frac{\nu}{\nu-1}$, випливає нерівність

$$a\,b \leq \varepsilon a^\nu + \varepsilon^{1-\nu^*} b^{\nu^*}. \tag{8}$$

А з нерівності Юнга: $a\,b\,c \leq \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{a^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{a^{\nu_3}}{\nu_3}$, $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, \varepsilon > 0, \nu_1 > 1, \nu_2 > 1, \nu_3 > 1$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$, легко отримати нерівність

$$a\,b\,c \leq \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon b^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3} c^{\nu_3}. \tag{9}$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови* **(P)**, **(A1)–(A3)**. *Тоді для майже всіх* $x \in \Omega$ *та довільних* ξ_1, ξ_2 *з* $\mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$(a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq K_0^-|\xi_1 - \xi_2|^{p_0(x)}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) &\geq \\ \geq K_i^-\big(|\xi_1|^{p_i(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{p_i(x)-2}\xi_2\big)\big(\xi_1 - \xi_2\big), &\quad i = \overline{1,n},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) &\leq \\ \leq K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i}|\xi_1 - \xi_2|^{p_i(x)}, &\quad i = \overline{1,n},\end{aligned} \tag{12}$$

де K_i^- $(i = \overline{0,n})$, K_j^+ $(j = \overline{1,n})$*— деякі додатні сталі.*

Доведення. Спочатку доведемо нерівність (10). Використавши першу з нерівностей умови (**A3**) та лему 2, для м. в. $x \in \Omega$ і будь-яких ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}$ отримаємо

$$(a_0(x,\xi_1) - a_0(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) = \int\limits_0^1 \tfrac{d\, a_0(x,\tau\xi_1+(1-\tau)\xi_2)}{d\,\tau}\, d\,\tau \cdot (\xi_1 - \xi_2) =$$

$$= \int\limits_0^1 \tfrac{\partial\, a_0(x,\tau\xi_1+(1-\tau)\xi_2)}{\partial\,\xi}(\xi_1 - \xi_2)\, d\,\tau \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq$$

$$\geq K_0 \int\limits_0^1 |\tau\xi_1 + (1-\tau)\xi_2|^{p_0(x)-2}(\xi_1 - \xi_2)\, d\,\tau \cdot (\xi_1 - \xi_2) =$$

$$= [s = \tau\xi_1 + (1-\tau)\xi_2] = K_0 \int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} |s|^{p_0(x)-2}\, d\,s \cdot (\xi_1 - \xi_2) =$$

$$= K_0 \tfrac{|s|^{p_0(x)-2}s}{p_0(x)-1}\Big|_{s=\xi_2}^{s=\xi_1}(\xi_1 - \xi_2) =$$

$$= \tfrac{K_0}{p_0(x)-1}(|\xi_1|^{p_0(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{p_0(x)-2}\xi_2)(\xi_1 - \xi_2) \geq$$

$$\geq \tfrac{K_0 2^{2-p_0(x)}}{p_0(x)-1}|\xi_1 - \xi_2|^{p_0(x)} \geq \tfrac{K_0 2^{2-p_0^+}}{p_0^+-1}|\xi_1 - \xi_2|^{p_0(x)} = K_0^-|\xi_1 - \xi_2|^{p_0(x)},$$

де $K_0^- = (K_0 2^{2-p_0^+})/(p_0^+ - 1)$. Аналогічно доводяться нерівності (11) та (12). $\square$

Лема 4. *Нехай виконуються умови* **(P)**, **(A1)–(A4)** *і функції* f_0^1, $f_0^2 \in L_{p_0^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i = \overline{1,n})$, u_1, $u_2 \in K$ *такі, що*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u_{l,x_i})(w(v-u_l))_{x_i} + a_0(x,u_l)w(v-u_l)\Big\}\, d\,x \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big\{f_0^l(x)w(v-u_l) + \sum_{i=1}^n f_i(x)(w(v-u_l))_{x_i}\Big\}\, d\,x \qquad (13)$$

для довільних $l \in \{1,2\}$, $v \in K$, $w \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\mathrm{supp}\ w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$, *де* $R_* \geq 1$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0, R \geq 1$, $R_0 < R \leq R_*$, *справедлива нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big\{ \sum_{i=1}^n (|u_{1,x_i}|^{p_i(x)-2}u_{1,x_i} - |u_{2,x_i}|^{p_i(x)-2}u_{2,x_i})(u_{1,x_i}(x) - u_{2,x_i}(x)) +$$

$$+ |u_1(x) - u_2(x)|^{p\,0(x)}\Big\}\, d\,x \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \left[C_3 R^{n-\gamma} + C_4 \int\limits_{\Omega_R} |f_0^1(x) - f_0^2(x)|^{p_0^*(x)}\, d\,x\right], \qquad (14)$$

де s і γ — такі ж, як в умові теореми 1, а C_3, C_4 — додатні сталі, які від u_l, f_0^l $(l=\overline{1,2})$, f_i $(i=\overline{1,n})$ не залежать.

Доведення. Довільно виберемо і зафіксуємо числа R_0, R за умови, що $0 < R_0 < R \leq R_*$, $R \geq 1$. Додавши інтегральні нерівності, отримані з (13) при $l=1$ і $l=2$, та поклавши $v = \frac{1}{2}(u_1+u_2)$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x,u_{1,x_i}) - a_i(x,u_{2,x_i}))(w(u_1-u_2))_{x_i} +$$

$$+ (a_0(x,u_1) - a_0(x,u_2)) w(u_1-u_2) \Big\}\, d\,x \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_{R_*}} (f_0^1 - f_0^2) w(u_1-u_2)\, d\,x, \qquad (15)$$

де $w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$.

Покладемо в (15) (див. [20, ст.220]) $w = \zeta^s$, де

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geq R, \end{cases} \qquad (16)$$

$s > 1$ — достатньо велике число (значення s уточнимо пізніше). У результаті отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x,u_{1,x_i}) - a_i(x,u_{2,x_i}))\,(u_1-u_2)_{x_i}\,\zeta^s +$$

$$+ (a_0(x,u_1) - a_0(x,u_2))\,(u_1-u_2)\,\zeta^s \Big\}\, d\,x \leq \int\limits_{\Omega_R} (f_0^1 - f_0^2)\,(u_1-u_2)\,\zeta^s\, d\,x -$$

$$- s\int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=1}^n (a_i(x,u_{1,x_i}) - a_i(x,u_{2,x_i}))\,(u_1-u_2)\,\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\, d\,x. \qquad (17)$$

Оцінимо члени нерівності (17). На підставі нерівності (10) маємо

$$\int\limits_{\Omega_R} (a_0(x,u_1) - a_0(x,u_2))\,(u_1 - u_2)\,\zeta^s\,d\,x \geq$$
$$\geq K_0^- \int\limits_{\Omega_R} |u_1(x) - u_2(x)|^{p_0(x)}\,\zeta^s\,d\,x. \quad (18)$$

Використавши нерівність (8), здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_R} (f_0^1(x) - f_0^2(x))\,(u_1(x) - u_2(x))\,\zeta^s(x)\,d\,x \leq$$

$$\leq \eta_1 \int\limits_{\Omega_R} |u_1(x) - u_2(x)|^{p_0(x)}\,\zeta^s(x)\,d\,x +$$
$$+ C_5(\eta_1) \int\limits_{\Omega_R} |f_0^1(x) - f_0^2(x)|^{p_0^*(x)}\,\zeta^s(x)\,d\,x, \quad (19)$$

де η_1 — довільне число з інтервалу $(0;1)$, $C_5(\eta_1) = \eta_1^{1-p_0^+}$.

Тепер зауважимо, що

$$\frac{1}{p_i^*(x)} + \frac{1}{p_0(x)} < 1$$
$$\text{для м.в. } \ x \in \Omega \ \text{ та будь-якого } \ i \in \{1, \ldots, n\}. \quad (20)$$

Справді, оскільки $q_i^+ \geq q_i^- > n$ $(i = \overline{1,n})$, то

$$\frac{1}{p_i^*(x)} + \frac{1}{p_0(x)} = \frac{p_0(x)p_i(x) - p_0(x) + p_i(x)}{p_0(x)p_i(x)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{q_i(x)} \leq 1 - \frac{1}{q_i^+} < 1.$$

Нехай $x \in \Omega_R$ — яка-небудь точка така, що $u_1(x)$, $u_2(x)$, $p_i^- \leq p_i(x) \leq p_i^+$ $(i = \overline{0,n})$, $a_j(x, u_{l,x_j}(x))$ $(l = \overline{1,2},\ j = \overline{1,n})$ визначені і виконується (20). Зафіксуємо $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поклавши в нерівності (9) $\nu_1 = p_i^*(x)$, $\nu_2 = p_0(x)$, $\nu_3 = q_i(x)$,

$$a = |a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x))|(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{-\frac{1}{p_i(x)}}\zeta^{s/\nu_1}(x),$$

$$b = |u_1(x) - u_2(x)|\zeta^{s/\nu_2}(x),$$

$$c = (K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{\frac{1}{p_i(x)}}|\zeta_{x_i}(x)|\zeta^{s/\nu_3-1}(x),$$

$\varepsilon = \eta_2 \in (0;1)$ та врахувавши, що $|\zeta_{x_i}(x)| \leq 2$, отримаємо

$$|a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x))|\,|u_1(x) - u_2(x)|\,|\zeta_{x_i}(x)|\,\zeta^{s-1}(x) \leq$$

$$\leq \eta_2|a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x))|^{p_i^*(x)}(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{-\frac{p_i^*(x)}{p_i(x)}}\zeta^s(x) +$$

$$+ \eta_2|u_1(x) - u_2(x)|^{p_0(x)}\zeta^s(x) +$$

$$+ C_6(\eta_2)(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{\frac{q_i(x)}{p_i(x)}}\zeta^{s-q_i(x)}(x), \quad (21)$$

де $C_6(\eta_2) = \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \eta_2^{1-q_i^+} 2^{q_i^+}$.

На підставі нерівності (12) леми 3, матимемо

$$|a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x))|^{p_i^*(x)}(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{-\frac{p_i^*(x)}{p_i(x)}}\zeta^s(x) \leq$$

$$\leq \left(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i}|u_{1,x_i}(x) - u_{2,x_i}(x)|^{p_i(x)-1}\right)^{p_i^*(x)-1} \times$$

$$\times|a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x))|(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{-\frac{p_i^*(x)}{p_i(x)}}\zeta^s(x) =$$

$$= (a_i(x, u_{1,x_i}(x)) - a_i(x, u_{2,x_i}(x)))(u_{1,x_i}(x) - u_{2,x_i}(x))\zeta^s(x). \quad (22)$$

Взявши до уваги, що $|\zeta(x)| \leq R$ і $R \geq 1$, при $s > q_i(x)$ матимемо

$$(K_i^+(1+|x|)^{\sigma_i})^{\frac{q_i(x)}{p_i(x)}}\zeta^{s-q_i(x)}(x) \leq C_7 R^{s-q_i(x)+\sigma_i\frac{q_i(x)}{p_i(x)}}, \quad (23)$$

де C_7 — деяка додатна стала.

Нерівності (21)—(23) виконуються для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$ та майже всіх $x \in \Omega_R$. Звідси, припустивши, що $s > \max\limits_{1\leq i\leq n} q_i^+$, одержимо

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x, u_{1,x_i}) - a_i(x, u_{2,x_i}))\,(u_1 - u_2)\,\zeta^{s-1}\,\zeta_{x_i}\,dx \leq$$

$$\leq sn\eta_2\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(x, u_{1,x_i}) - a_i(x, u_{2,x_i}))(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) +$$

$$+|u_1(x)-u_2(x)|^{p_0(x)}\Big\}\zeta^s\,dx+$$
$$+sC_6(\eta_2)C_7\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^n R^{s-q_i(x)+\sigma_i\frac{q_i(x)}{p_i(x)}}\,dx. \quad (24)$$

З (17) на підставі (18), (19) та (24), вибираючи достатньо малими значення η_1, η_2, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^n(a_i(x,u_{1,x_i})-a_i(x,u_{2,x_i}))(u_{1,x_i}(x)-u_{2,x_i}(x))+$$
$$+|u_1(x)-u_2(x)|^{p_0(x)}\Big\}\zeta^s(x)\,dx\le C_8\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^n R^{s-q_i(x)+\sigma_i\frac{q_i(x)}{p_i(x)}}\,dx+$$
$$+C_9\int\limits_{\Omega_R}|f_0^1(x)-f_0^2(x)|^{p^*_0(x)}\,\zeta^s(x)\,dx, \quad (25)$$

де $s>\max\limits_{1\le i\le n}q_i^+$ — довільна стала, C_8, C_9 — деякі додатні сталі.

Зауважимо, що $s-q_i(x)+\sigma_i\frac{q_i(x)}{p_i(x)}\le s-q_i^-+\sigma_i\frac{q_i^+}{p_i^-}$ для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $i\in\{1,\dots,n\}$. Легко переконатися, що $0\le\zeta(x)\le R$, коли $x\in\mathbb{R}^n$, та $\zeta(x)\ge R-R_0$ при $|x|\le R_0$, де $R_0\in(0,R)$ — яке-небудь число. Взявши до уваги сказане і, зокрема, те, що $R\ge 1$, з (25) на підставі нерівності (11) здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\Big\{\sum_{i=1}^n(|u_{1,x_i}|^{p_i(x)-2}u_{1,x_i}-|u_{2,x_i}|^{p_i(x)-2}u_{2,x_i})(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+$$
$$+|u_1(x)-u_2(x)|^{p_0(x)}\Big\}dx\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Bigg[C_{10}\sum_{i=1}^n R^{n-q_i^-+\sigma_i\frac{q_i^+}{p_i^-}}+$$
$$+C_{11}\int\limits_{\Omega_R}|f_0^1(x)-f_0^2(x)|^{p^*_0(x)}\,dx\Bigg], \quad (26)$$

де C_{10}, C_{11} — додатні сталі, які залежать тільки від n, s, p_i^-, p_i^+ $(i=\overline{0,n})$, q_i^-, q_i^+ $(i=\overline{1,n})$. З (26), врахувавши що $n-q_i^-+\sigma_i\frac{q_i^+}{p_i^-}\le n-\gamma$ $(i=\overline{1,n})$, де $\gamma=\min\limits_{1\le i\le n}\Big\{q_i^- -\sigma_i\frac{q_i^+}{p_i^-}\Big\}$, отримаємо нерівність (14). $\square$

Лема 5. *Нехай виконуються умови* **(P)**, **(A1)–(A4)**, **(F)**, *а функція* $u \in K$ *така, що виконується нерівність (3) для довільних* $v \in K$, $w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$, *де* $R_* > 1$ — *деяке число. Тоді для будь-яких чисел* $R_0 > 0, R \geq 1$, $R_0 < R \leq R_*$, *правильна нерівність (4).*

Доведення. Нехай $R \geq 1$ — яке-небудь число з проміжку $[1; R_*]$. Покладемо в (3) $v = 0$, $w = \zeta^s$, де ζ визначена в (16). Після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, u_{x_i} + a_0(x,u)\, u\Big\}\, \zeta^s\, d\,x \leq \int\limits_{\Omega_R}\Big\{f_0\, u + \sum_{i=1}^{n} f_i\, u_{x_i}\Big\}\, \zeta^s\, d\,x +$$
$$+ s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} f_i\, u\, \zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\, d\,x - s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, u\, \zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\, d\,x. \qquad (27)$$

Оцінимо доданки нерівності (27). Згідно з нерівностями (10) і (11) та умовою $(\mathbf{A1}')$ одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, u_{x_i} + a_0(x,u)\, u\Big\}\, \zeta^s\, d\,x \geq$$
$$\geq \int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} K_i^-|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)} + K_0^-|u(x)|^{p_0(x)}\Big\}\, \zeta^s\, d\,x. \qquad (28)$$

Міркуючи так як при отриманні нерівності (19), здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_R} f_0\, u\, \zeta^s\, d\,x \leq \varepsilon_1 \int\limits_{\Omega_R} |u(x)|^{p_0(x)}\, \zeta^s\, d\,x +$$
$$+ C_{12}(\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega_R} |f_0(x)|^{p_0^*(x)}\, \zeta^s\, d\,x, \qquad (29)$$

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} f_i\, u_{x_i}\, \zeta^s\, d\,x \leq \varepsilon_2 \int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x)|^{p_i(x)}\, \zeta^s\, d\,x +$$
$$+ C_{13}(\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, \zeta^s\, d\,x, \qquad (30)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0;1)$ — довільні числа, а $C_{12}(\varepsilon_1), C_{13}(\varepsilon_2)$ — деякі додатні сталі.

На підставі нерівності (9) маємо

$$s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} f_i\, u\, \zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\, d\, x \le \varepsilon_3 \int\limits_{\Omega_R} |u(x)|^{p_0(x)}\, \zeta^s\, d\, x +$$

$$+\varepsilon_3 \int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, \zeta^s\, d\, x + C_{14}(\varepsilon_3)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} \zeta^{s-q_i(x)}(x) d\, x, \qquad (31)$$

де $\varepsilon_3 \in (0;1)$ — довільне число, а $C_{14}(\varepsilon_3)$ — деяка додатна стала. Поклавши в (21) і (22) $u_1 = u$, $u_2 = 0$, з отриманих нерівностей, а також з (23) одержимо

$$-\, s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, u\, \zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\, d\, x \le$$

$$\le \varepsilon_4 \int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, u_{x_i}\, \zeta^s\, d\, x + \varepsilon_4 \int\limits_{\Omega_R} |u(x)|^{p_0(x)}\, \zeta^s\, d\, x +$$

$$+C_{15}(\varepsilon_4)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} R^{s-q_i(x)+\sigma_i \frac{q_i(x)}{p_i(x)}} d\, x, \qquad (32)$$

де $\varepsilon_4 \in (0;1)$ — довільне число, а $C_{15}(\varepsilon_4)$ — деяка додатна стала.

Очевидно, що

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} \zeta^{s-q_i(x)}(x) d\, x \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n} R^{s-q_i(x)+\sigma_i \frac{q_i(x)}{p_i(x)}} d\, x \le C_{16}\sum_{i=1}^{n} R^{n+s-q_i^- +\sigma_i \frac{q_i^+}{p_i^-}}, \qquad (33)$$

де $C_{16} > 0$ — деяка стала.

На підставі (28)—(33) з (27) при достатньо малих значеннях $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u(x)|^{p_0(x)}\Big\}\zeta^s(x)\, d\, x \le C_{17}\sum_{i=1}^{n} R^{n+s-q_i^- +\sigma_i \frac{q_i^+}{p_i^-}} +$$

$$+C_{18}\int\limits_{\Omega_R}\left[|f_0(x)|^{p_0^*(x)}+\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\right]\zeta^s(x)d\,x, \qquad (34)$$

де $s > \max\limits_{1\le i\le n} q_i^+$ — довільна стала; C_{17}, C_{18} — додатні сталі, які залежать тільки від n, s, p_i^-, p_i^+ $(i=\overline{0,n})$, q_i^-, q_i^+, $(i=\overline{1,n})$.

Діючи далі так само, як у доведенні леми 4 (див. (26)), здобудемо оцінку (4). $\square$

Нехай виконуються умови **(P)**, **(A1)–(A4)**, **(F)**, **(K)**, а k — деяке натуральне число. Покладемо $\mathbb{U}_{p,k}\overset{\text{def}}{=}\{v|_{\Omega_k} : v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$, $\operatorname{supp} v \in \overline{\Omega}_k\}$ — лінійний простір, наділений нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$ (очевидно, що $\mathbb{U}_{p,k}\subset W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$). Простір $\mathbb{U}_{p,k}$ є банаховим. Канонічну білінійну форму на $(\mathbb{U}_{p,k})^*\times\mathbb{U}_{p,k}$ позначимо через $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_k$. Під K_k розумітимемо множину $\{v|_{\Omega_k} : v\in K,\ \operatorname{supp} v\in\Omega_k\}$, яка, в силу нашого припущення, є опуклою замкненою підмножиною $\mathbb{U}_{p,k}$.

Визначимо оператор

$$L_k : \mathbb{U}_{p,k}\to\ (\mathbb{U}_{p,k})^*$$

за правилом

$$\langle L_k v,\widetilde{v}\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_k}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_i v)\,D_i\widetilde{v}\,d\,x \quad \forall v,\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k},$$

де $D_0 v\overset{\text{def}}{=}v$, $D_i v\overset{\text{def}}{=}v_{x_i}$ $(i=\overline{1,n})$.

Легко переконатися, що оператор $L_k : \mathbb{U}_{p,k}\to(\mathbb{U}_{p,k})^*$ — строго монотонний, обмежений, коерцитивний і семінеперервний. Доведення цього факту проводиться подібно до випадку сталого показника нелінійності, використовуючи при цьому нерівності з леми 1.

Визначимо також функціонал $F_k\in(\mathbb{U}_{p,k})^*$ за правилом

$$\langle F_k,\widetilde{v}\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_k}\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,D_i\widetilde{v}(x)\,d\,x \quad \forall\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k}.$$

Лема 6. *Існує єдина функція $u^k\in K_k$ така, що*

$$\langle L_k u^k, w(v-u^k)\rangle_k \ge \langle F_k, w(v-u^k)\rangle_k \qquad (35)$$

для будь-яких $v\in K_k$, $w\in C^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Доведення. У цьому доведенні, для спрощення записів, всюди опустимо індекс k, крім позначень $\mathbb{U}_{p,k}$, K_k і Ω_k. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_\varepsilon \in \mathbb{U}_{p,k}$, яка задовольняє рівняння

$$Lu_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta_k u_\varepsilon = F, \tag{36}$$

де тут β_k — звуження оператора штрафу β, що визначає K, на простір $\mathbb{U}_{p,k}$.

Використовуючи властивості оператора L, легко переконатися, що оператор $L + \frac{1}{\varepsilon}\beta_k$ — монотонний, обмежений, семінеперервний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір $\mathbb{U}_{p,k}$ — рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [14, Гл.2,§2] отримаємо існування розв'язку рівняння (36). Його єдиність випливає із сильної монотонності оператора L.

Міркуючи так як при доведенні теореми 5.2 [14, с.385], здобудемо, що множина $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ — обмежена в $\mathbb{U}_{p,k}$, множина $\{Lu_\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ — обмежена в $(\mathbb{U}_{p,k})^*$, $\|\beta_k u_\varepsilon\| \le C_{17}\varepsilon$, де C_{17} — деяка додатна стала.

Звідси випливає існування функцій $u \in \mathbb{U}_{p,k}$, $\chi \in (\mathbb{U}_{p,k})^*$ та послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ таких, що $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$ і

$$u_{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ слабко в } \mathbb{U}_{p,k}, \tag{37}$$

$$Lu_{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi \ \text{ слабко в } \ (\mathbb{U}_{p,k})^*, \tag{38}$$

$$\beta_k u_{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ сильно в } (\mathbb{U}_{p,k})^*, \quad \beta u = 0. \tag{39}$$

Далі (для зручності) писатимемо u_j замість u_{ε_j} ($j \in \mathbb{N}$). З рівняння (36) для довільних $v \in K_k$, $w \in C^{1,+}(\overline{\Omega})$ маємо

$$\langle Lu_j - F, w(v - u_j)\rangle = \frac{1}{\varepsilon_j}\langle \beta_k v - \beta_k u_j, w(v-u_j)\rangle \ge 0, \tag{40}$$

звідки випливає нерівність

$$\langle Lu_j, w(v-u_j)\rangle \ge \langle F, w(v-u_j)\rangle$$
$$\forall v \in K_k, \ w \in C^{1,+}(\overline{\Omega}), \ j \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Поклавши в (41) $v = u$, $w = 1$, одержимо

$$\langle Lu_j, u - u_j\rangle \ge \langle F, u - u_j\rangle.$$

Звідси, на підставі (37), маємо

$$\varliminf_{j\to\infty} \langle Lu_j, u-u_j\rangle \geq 0. \tag{42}$$

З монотонності оператора L випливає $\langle Lu - Lu_j, u-u_j\rangle \geq 0$, тобто

$$\langle Lu_j, u-u_j\rangle \leq \langle Lu, u-u_j\rangle,$$

звідки

$$\varlimsup_{j\to\infty} \langle Lu_j, u-u_j\rangle \leq 0. \tag{43}$$

З (42) і (43) отримаємо

$$\lim_{j\to\infty} \langle Lu_j, u-u_j\rangle = 0. \tag{44}$$

Взявши до уваги нерівності (10) та (11), отримаємо

$$\langle Lu_j - Lu, u_j - u\rangle \geq K_0 \int\limits_{\Omega_k} |u_j(x)-u(x)|^{p_0(x)}\, d\,x \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

На підставі (37) та (44), з (45) отримаємо

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \;\; \text{сильно в } L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_k). \tag{46}$$

Покажемо, що

$$\chi = Lu. \tag{47}$$

Для цього використаємо ідею, викладену на ст. 191 монографії [14]. Нехай $\widetilde{v}$ — довільний елемент з простору $\mathbb{U}_{p,k}$. Покладемо $w_\theta \overset{\text{def}}{=} u + \theta(\widetilde{v} - u)$, $\theta \in (0,1)$. На підставі монотонності оператора L здобудемо

$$\langle Lu_j - Lw_\theta, u_j - w_\theta\rangle \geq 0,$$

тобто

$$\theta\langle Lu_j, u-\widetilde{v}\rangle \geq \langle Lu_j, u-u_j\rangle + \langle Lw_\theta, u_j - u\rangle + \theta\langle Lw_\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$

Спрямуємо в цій нерівності j до ∞, врахувавши (37), (44). У результаті отримаємо

$$\langle \chi, u-\widetilde{v}\rangle \geq \langle Lw_\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$

Спрямувавши тут θ до 0 і врахувавши, що оператор L — семінеперервний, одержимо

$$\langle \chi - Lu, u - \widetilde{v} \rangle \geq 0 \tag{48}$$

для довільних $\widetilde{v} \in \mathbb{U}_{p,k}$.

Взявши в (48) $\widetilde{v} = u - \lambda\psi$, де $\lambda > 0$, $\psi \in \mathbb{U}_{p,k}$, матимемо

$$\langle \chi - L(u - \lambda\psi), \psi \rangle \geq 0 \qquad \forall \psi \in \mathbb{U}_{p,k}. \tag{49}$$

Спрямуємо в (49) λ до 0, врахувавши, що оператор L — семінеперервний. У результаті здобудемо $\langle \chi - Lu, \psi \rangle \geq 0$ $\forall \psi \in \mathbb{U}_{p,k}$, звідки легко випливає (47).

Використовуючи означення оператора L та нерівності (10), (11), отримаємо

$$\begin{gathered}
\langle Lu_j, w(u - u_j) \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x, D_i u_j)\, D_i(w(u - u_j))\, d\,x = \\
= \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x, D_i u_j)\, D_i(u - u_j)\, w\, d\,x + \\
+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x, D_i u_j)\, (u - u_j)\, D_i w\, d\,x = \\
= \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n (a_i(x, D_i u_j) - a_i(x, D_i u))\, D_i(u - u_j)\, w\, d\,x + \\
+ \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x, D_i u)\, D_i(u - u_j)\, w\, d\,x + \\
+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x, D_i u_j)\, (u - u_j)\, D_i w\, d\,x \leq \\
\leq \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x, D_i u)\, D_i(u - u_j)\, w\, d\,x + \\
+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x, D_i u_j)\, (u - u_j)\, D_i w\, d\,x.
\end{gathered} \tag{50}$$

Перейшовши в (50) до границі при $j \to \infty$, отримаємо

$$\varlimsup_{j\to\infty} \langle Lu_j, w(u-u_j)\rangle \le 0. \tag{51}$$

На підставі нерівності (41) здобудемо

$$\langle F, w(v-u_j)\rangle \le \langle Lu_j, w(v-u_j)\rangle = \\ = \langle Lu_j, w(v-u)\rangle + \langle Lu_j, w(u-u_j)\rangle \tag{52}$$

для довільних $v \in K_k$, $w \in C^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Спрямуємо в (52) j до ∞, враховуючи (38), (47), (51). У результаті отримаємо (35) для довільних $v \in K_k$, $w \in C^{1,+}(\overline{\Omega})$. $\square$

4. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Припустимо супротивне. Нехай нерівність (3) має більше одного узагальненого розв'язку. Виберемо які-небудь два узагальнені розв'язки цієї нерівності і позначимо їх через u_1 та u_2. Згідно з лемою 4 і нашим припущенням, маємо для довільних R_0, R таких, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$, нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x) - u_2(x)|^{p_0(x)}\, d\,x \le \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s C_3 R^{n-\gamma}, \tag{53}$$

де s і γ — такі ж, як у формулюванні теореми 1, а C_3 — додатна стала, яка від u_l $(l = \overline{1,2})$ не залежить.

Отож, зафіксувавши довільним чином вибране R_0, перейдемо в (53) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1(x) = u_2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_{R_0}$. Оскільки R_0 — довільне число, маємо $u_1(x) = u_2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, тобто нерівність (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Нехай існує узагальнений розв'язок нерівності (3). Тоді на підставі леми 5 маємо (4). $\square$

Доведення теореми 3. Згідно з лемою 6 для кожного натурального числа k, беручи до уваги означення L_k і F_k, маємо існування функції $u^k \in K_k$ такої, що

$$\int\limits_{\Omega_k} \sum_{i=0}^{n} a_i(x, D_i u^k)\, D_i(w(v-u^k))\, d\,x \ge \\ \ge \int\limits_{\Omega_k} \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, D_i(w(v-u^k))\, d\,x \tag{54}$$

для будь-яких $v \in K$, $w \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_k$.

Довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію u^k нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega}_k$, залишивши за цим продовженням позначення u^k. Очевидно, що $u^k \in K$. Нехай k і m — довільні натуральні числа, причому $1 < k < m$; R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leq k-1$, $R \geq 1$. Тоді на підставі леми 4 з (54), взявши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^k(x) - u^m(x)|^{p_0(x)}\, d\,x \leq C_3 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\gamma}, \qquad (55)$$

де $C_3 > 0$, $s > 0$ — сталі, які від k, m, R_0 та R не залежать, причому значення γ таке, що $n-\gamma < 0$ (його можна таким вибрати на підставі умов теореми 2).

Нехай $\varepsilon > 0$ — яке-небудь число. Зафіксуємо довільне значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (55) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \geq R+1$ і $m > k$ ліва частина нерівності (55) менша за ε. Це означає, що послідовність $\bigl\{u^k\bigr|_{\Omega_{R_0}}\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_{R_0})$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{p_0(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ такої, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{p_0(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (56)$$

Покажемо, що послідовності $\bigl\{u^k\bigr\}_{k=1}^{\infty}$, $\bigl\{a_0(\cdot, u^k(\,\cdot\,))\bigr\}_{k=1}^{\infty}$, $\bigl\{a_i(\cdot, u^k_{x_i}(\,\cdot\,))\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ $(i = \overline{1,n})$ — обмежені відповідно в $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p_0^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i = \overline{1,n})$. Справді, нехай R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$. На підставі леми 5 для довільного натурального числа $k > R+1$ здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u^k(x)|^{p_0(x)} \Bigr\} d\,x \leq C_{19}(R_0), \qquad (57)$$

де $C_{19}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

Згідно з умовою (**A3**) і нерівністю (12), використавши оцінку

(57), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |a_0\big(x,u^k(x)\big)|^{p_0^*(x)}\,d\,x \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big(\widetilde{K}_0|u^k(x)|^{p\,_0(x)-1}+h(x)\Big)^{p_0^*(x)}\,d\,x \le C_{20}(R_0), \quad (58)$$

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |a_i\big(x,u_{k,x_i}(x)\big)|^{p_i^*(x)} d\,x \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big(K_i^+(1+|R_0|^{\sigma_i})\big)^{p_i^*(x)}\,|u_{k,x_i}|^{p_i(x)}\,d\,x \le C_{21}(R_0),\ i=\overline{1,n}, \quad (59)$$

де $C_{20}(R_0)>0, C_{21}(R_0)>0$ — сталі, які від k не залежать, але можуть залежати від R_0.

З (56)—(59) і умови (**A1**) отримаємо існування підпослідовності $\big\{u^{k_j}\big\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\big\{u^k\big\}_{k=1}^{\infty}$ та функцій $u,v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\chi_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n})$ таких, що

$$u^{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad (60)$$

$$u^{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже всюди на} \quad \Omega, \quad (61)$$

$$a_0\big(\cdot,u^{k_j}(\,\cdot\,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0(\,\cdot\,) \ \ \text{слабко в} \ \ L_{p_0^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad (62)$$

$$a_0\big(x,u^{k_j}(x)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_0\big(x,u(x)\big) \quad \text{для майже всіх} \quad x\in\Omega, \quad (63)$$

$$a_i\big(\cdot,u^{k_j}_{x_i}(\,\cdot\,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i=\overline{1,n}. \quad (64)$$

З (60)—(63) і леми 1.3 роботи [14, ст.25] одержимо

$$v=u, \qquad \chi_0(\,\cdot\,)=a_0\big(\cdot,u(\,\cdot\,)\big). \quad (65)$$

Покажемо, що

$$\chi_i(\,\cdot\,)=a_i\big(\cdot,u_{x_i}(\,\cdot\,)\big), \qquad i=\overline{1,n}. \quad (66)$$

Згідно з нерівністю (11) маємо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i(x,u^{k_j}_{x_i})-a_i(x,\widetilde{v}_{x_i})\Big)\,\Big(u^{k_j}_{x_i}-\widetilde{v}_{x_i}\Big)\,w\,d\,x \ge 0 \quad (67)$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$, $\widetilde{v} \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$.

Для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ і довільних $v \in K$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \Omega_{k_j}$ правильна (див. (54)) нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{k_j}} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u^{k_j}_{x_i})\, (w(v-u^{k_j}))_{x_i} + a_0(x, u^{k_j})\, w(v-u^{k_j}) \Big\}\, d\,x \geq$$
$$\geq \int\limits_{\Omega_{k_j}} \Big\{ f_0\, w(v-u^{k_j}) + \sum_{i=1}^n f_i\, (w(v-u^{k_j}))_{x_i} \Big\}\, d\,x. \qquad (68)$$

Поклавши в (68) $v=0$, здобудемо

$$-\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x, u^{k_j}_{x_i}) u^{k_j}_{x_i}\, w\, d\,x \geq \int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(x, u^{k_j})\, u^{k_j}\, w - f_0\, u^{k_j}\, w -$$
$$- \sum_{i=1}^n f_i\, (u^{k_j}\, w)_{x_i} \; + + \sum_{i=1}^n a_i(x, u^{k_j}_{x_i})\, u^{k_j}\, w_{x_i} \Big\}\, d\,x. \quad (69)$$

З (67) та (69) випливає

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(x, u^{k_j})\, u^{k_j}\, w - f_0\, u^{k_j}\, w - \sum_{i=1}^n f_i\, (u^{k_j}\, w)_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x, u^{k_j}_{x_i})\, u^{k_j}\, w_{x_i} \Big\} d\,x +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n \big(a_i(x, u^{k_j}_{x_i})\, \widetilde{v}_{x_i} + a_i(x, \widetilde{v}_{x_i})\, (u^{k_j}_{x_i} - \widetilde{v}_{x_i}) \big)\; w\, d\,x \leq 0 \qquad (70)$$

для довільних $\widetilde{v} \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $j \geq l$, де l таке, що $\operatorname{supp} w \subset \Omega_{k_l}$.

Перейдемо в (70) до границі при $j \to \infty$, врахувавши (56), (60), (62), (65) та (64), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(x,u) u\, w - f_0\, u\, w - \sum_{i=1}^n f_i\, (u\, w)_{x_i} \; + \sum_{i=1}^n \chi_i\, u\, w_{x_i} \Big\}\, d\,x +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\chi_i \widetilde{v}_{x_i} + a_i(x, \widetilde{v}_{x_i})(u_{x_i} - \widetilde{v}_{x_i}))\; w\, d\,x \leq 0 \qquad (71)$$

для будь-яких $\widetilde{v} \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$.

Покладемо в (68) $v = u^{k_j} + u$ і перейдемо в отриманій нерівності до границі при $j \to \infty$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(x,u)u\,w - f_0\,u\,w - \sum_{i=1}^{n} f_i\,(u\,w)_{x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \chi_i\,u\,w_{x_i} \Big\}\,d\,x \geq -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \chi_i\,u_{x_i}\,w\,d\,x. \quad (72)$$

З (71) та (72) здобудемо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,\widetilde{v}_{x_i}) - \chi_i)\,(\widetilde{v}_{x_i} - u_{x_i})\;w\,d\,x \geq 0 \quad (73)$$

для довільного $\widetilde{v} \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$.

Якщо візьмемо в (73) $\widetilde{v} = u - \lambda g$, $\lambda > 0$, $g \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то матимемо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,(u-\lambda g)_{x_i}) - \chi_i)\,g_{x_i}\,w\,d\,x \leq 0 \qquad \forall g \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Спрямуємо тут λ до 0, врахувавши, що функції a_i — каратеодорівські, $i = \overline{1,n}$. У результаті здобудемо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,u_{x_i}) - \chi_i)\,g_{x_i}\,w\,d\,x \leq 0 \\ \forall g \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}). \quad (74)$$

Оскільки (74) виконується для довільної $g \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то вибираючи спочатку $g(x) = x_l$, $l = \overline{1,n}$, а потім $g(x) = -x_l$, $l = \overline{1,n}$, отримаємо (66).

Нехай $v \in K$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$. Виберемо значення $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} w \subset \Omega_{k_l}$. Для всіх $j > l$ виконується нерівність (68). Перетворимо ліву частину нерівності (68) так

$$\int\limits_{\Omega_{k_j}} \sum_{i=0}^{n} a_i(x, D_i u^{k_j})\,D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{k_j}} \sum_{i=0}^{n} (a_i(x, D_i u^{k_j}) - a_i(x, D_i v)) D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{k_j}}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_iv)D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega_{k_j}}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,D_iu^{k_j})-a_i(x,D_iv))(v-u^{k_j})D_iw\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{k_j}}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_iv)D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x=$$

$$=\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,D_iu^{k_j})-a_i(x,D_iv))(v-u^{k_j})D_iw\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_iv)D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x. \quad (75)$$

Легко переконатися, що

$$\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,D_iu^{k_j})-a_i(x,D_iv))(v-u^{k_j})D_iw\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_iv)D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,D_iu)-a_i(x,D_iv))\,(v-u)\,D_iw\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=0}^{n} a_i(x,D_iv)\,D_i(w(v-u))d\,x. \quad (76)$$

Стосовно правої частини нерівності (68) маємо

$$\int\limits_{\Omega_{k_j}}\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x=\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,D_i(w(v-u^{k_j}))d\,x\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega_{k_l}}\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,D_i(w(v-u))d\,x. \quad (77)$$

Оцінимо ліву частину нерівності (68), використавши (75), і перейдемо в отриманій нерівності до границі при $j \to \infty$, врахувавши (76) і (77). Потім покладемо $v \overset{\text{def}}{=} u + \theta(\widetilde{v} - u)$, $0 < \theta < 1$, $\widetilde{v} \in K$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x, D_i u) - a_i(x, D_i(u + \theta(\widetilde{v} - u))) \Big) (\widetilde{v} - u)\, D_i w \, d\,x + \\ + \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{i=0}^{n} a_i(x, D_i(u + \theta(\widetilde{v} - u)))\, D_i(w(\widetilde{v} - u)) d\,x \geq \\ \geq \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, D_i(w(\widetilde{v} - u)) d\,x. \quad (78)$$

Перейшовши в (78) до границі при $\theta \to 0$, отримаємо (3) для заданої функції $\widetilde{v}$. В силу довільності функцій $\widetilde{v}$ і w робимо висновок, що u є узагальненим розв'язком нерівності (3). Отже, ми довели існування єдиного узагальненого розв'язку нерівності (3).

Тепер припустимо, що $f_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, і завершимо доведення слабкої коректності нашої задачі. Нехай $f^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ в $L_{p_0(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ і u — узагальнений розв'язок нерівності (3) з $f_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, а u^k, $k \in \mathbb{N}$, — узагальнений розв'язок нерівності (3) з $f_0 = f_0^k$ і $f_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. З означення функцій u та u^k, $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{x_i})\, (w(v - u))_{x_i} + \\ + a_0(x, u)\, w(v - u) - f_0\, w(v - u) \Big\}\, d\,x \geq 0, \quad (79)$$

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u^k_{x_i})\, (w(v - u^k))_{x_i} + \\ + a_0(x, u^k)\, w(v - u^k) - f_0^k\, w(v - u^k) \Big\}\, d\,x \geq 0, \quad (80)$$

де $v \in K$, $w \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Нехай R_0 і R — довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$. З (79) і (80) на підставі леми 4 одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (|u^k_{x_i}(x)|^{p_i(x)-2} u^k_{x_i}(x) - |u_{x_i}(x)|^{p_i(x)-2} u_{x_i}(x))(u^k_{x_i} - u_{x_i})(x) +$$

$$+ |(u^k - u)(x)|^{p_0(x)} \Big\} \, d\,x \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \left[C_3 R^{n-\gamma} + C_4 \int\limits_{\Omega_R} |f_0 - f_0^k|^{p_0^*(x)} \, d\,x \right]. \quad (81)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — будь-яке як завгодно мале число. Зафіксуємо довільним чином вибране $R_0 > 0$ і виберемо $R \geq \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_3 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{n-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad (82)$$

і зафіксуємо це значення.

Враховуючи, що $\|f_0 - f_0^k\|_{L_{p_0^*(\cdot)}(\Omega_R)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, отримаємо, що ліва частина (81) прямує до нуля при $k \to \infty$. Оскільки $\frac{R}{R-R_0} \leq 1 + \frac{R_0}{R-R_0} \leq 2$, то зі сказаного вище випливає існування натурального числа k_ε такого, що

$$C_4 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \int\limits_{\Omega_R} |f_0 - f_0^k|^{p_0^*(x)} \, d\,x < \frac{\varepsilon}{2} \quad (83)$$

для будь-яких $k \geq k_\varepsilon$.

Врахувавши (82) і (83), отримаємо, що права частина (81) менша за ε для будь-яких $k \geq k_\varepsilon$. Звідси та з (81) випливає, що $u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $\mathbb{U}_p$. Отже, ми довели слабку коректність нашої задачі.$\square$

1. *Růžička M.* Electroreological fluids: modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verl.,2000. (Lecture Notes in Math.; V.1748).
2. *Antontsev S. and Shmarev S.* On localization of solutions of elliptic equations with nonhomogeneous anisotropic degeneracy, Siberian Math. Jour. — 2005. — V.46. — P. 765—782.
3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородной жидкости. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Mustonen V.* Strongly nonlinear elliptic variational inequalities in unbounded domains // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica. — 1977. — V.3. — P.59—74.
5. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundness of solutions of degenerate nonlinear elliptic variational inequalities // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 1999. — V.35, №8. — P.987—999.

6. *Бокало М.М., Кушнір О.В.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук, праць. Вип. 288. Математика. — Чернівці: Рута, 2006. — С.28—38.
7. *Бокало М.М., Кушнір О.В.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Вісник Львівського ун-ту. Серія мех.-мат. — 2006. — С.20—35.
8. *Медвідь І.М.* Еліптична варіаційна нерівність в необмежених областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — 49, №2. — С.108—116.
9. *Chipot M., Michaille G.* Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1989. — 4, №16. — P.137—166.
10. *Rudd M., Schmitt K.* Variational inequalities of elliptic and parabolic type// Taiwanese Journal of Mathematics. — 2002. — V.6, №3. — P.287—322.
11. *Павленко В.Н., Прибыль М.А.* Резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения — 2006. — 42, №1. — P.120—125.
12. *Korkut L., Pašić R., Žubrinić D.* A class of nonlinear elliptic variational inequalities: qualitative properties and existence of solutions // Electronic J. of Differ. Equat. — 2002. — 2002, №14. — P.1—14.
13. *Aharouch L., Benkirane A., Rhoudaf M.* Strongly nonlinear elliptic variational unilateral problems in Orlicz space // Abs. and Appl. Anal. — 2006. — V.2006. — P.1—20.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 608 с.
15. *Kováčik O., Rákosnı́c J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$// Czechoslovak Math. J. — 1991. — V.41, №4. — P.592—618.
16. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.:Мир, 1978. — 336 с.
17. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. Серія фіз.-мат. — 2002. — Вип.1. — С.310 — 321.
18. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука. 1964. — 539 с.
19. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 1989. — Вып.14. — С. 3—44.
20. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity //Arch. Ration Mech. and Anal. — 1989. — V.106, №3. — P.217—241.
21. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity// Appl. Math. Optim. — 1984. — №12. — P.271—282.

вул. Університетська 1,
ЛНУ ім. І.Франка,
79000,Львів,Україна
olena.domanska@gmail.com

Отримано 1.03.07