©2008. **О.М. Болдовская**

УСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С АБСОРБЦИЕЙ

Рассматривается начально-краевая задача Неймана для уравнения

$$u_t = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p$$

в областях с некомпактной границей и с начальной дельта функцией Дирака. В случае быстрой диффузии, $m + \lambda - 2 < 0$, и критического показателя, $p = m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$, доказано, что особенность в (0,0) устранима.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, абсорбция, изолированные особенности, некомпактная граница
MSC (2000): 35K20, 35K55, 35K65, 35B30

1. Введение.

Пусть $\Omega \in R^N$, $N > 1$, - неограниченная область с достаточно гладкой некомпактной границей $\partial\Omega$ и $|\Omega|_N = mes_N\Omega = \infty$, $\overrightarrow{n}$- внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат принадлежит Ω. Мы рассматриваем следующую начально-краевую задачу Неймана в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$:

$$u_t = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p, \qquad \text{в } Q_T, \tag{1.1}$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $\lambda > 0$, $m+\lambda-1 > \max\{0, 1-\frac{\lambda+1}{N}\}$, начальная мера - $\delta(x)$ функция Дирака. Будем рассматривать случай быстрой диффузии, то есть, $m+\lambda-2 < 0$. Показатель абсорбирующего слагаемого - критический, а именно, $p = m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$.

В работе [1] для случая медленной диффузии $(m+\lambda-2 > 0)$ удалось показать несуществование слабого решения $u(x, t)$ задачи (1.1)-(1.3) в Q_T при дополнительных условиях на геометрию области, или, что эквивалентно, доказать, что решение $u(x, t)$ исходной задачи имеет устранимую особенность в точке (0,0). В данной работе мы распространим этот результат на случай быстрой диффузии. Отметим также работу [2], в которой доказано, что слабое решение задачи (1.1)-(1.3) в случае медленной диффузии существует при $p < m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$ и не существует при $p > m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1}{N}$. Одной из первых работ, где был установлен подобный критический показатель, была работа [3]. Рассматривалась следующая задача Коши:

$$u_t = \triangle u - |u|^{p-1}u, \qquad \text{в } Q = R^N \times R_+, \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = \delta(x), \qquad \text{в } R^N, \tag{1.5}$$

где $p > 0$- фиксированный параметр, и был получен такой показатель $p_0 = 1 + \frac{2}{N}$, что:

(i) при $p < p_0$ существует единственное решение $u \in C^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$, удовлетворяющее уравнению (1.4) в смысле распределения, и начальному условию (1.5) так, что:

$$\lim_{t\to 0} \int u(x,t)\ \varphi(x)\,dx = \varphi(0), \qquad \forall \varphi(x) \in C_0(R^N); \tag{1.6}$$

(ii) для $p \geq p_0$ задача Коши не имеет решения $u \in L^p_{loc}(Q)$, удовлетворяющего (1.4), (1.6). Более того, если рассмотреть любую подходящую регулярную аппроксимацию с ограниченными начальными функциями $u_{0j} \underset{j\to\infty}{\to} \delta(x)$, то в этом случае классические ограниченные решения (1.4) $u_j(x,t)$ при $j \to \infty$ стремятся к нулю равномерно на $R^N \times [\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon > 0$. Другими словами, факт (ii) можно трактовать таким образом, что решение $u(x,t)$ задачи (1.4), (1.5) имеет устранимую особенность в точке (0,0). Подобный результат об устранимой особенности для уравнения

$$u_t = div(|\nabla u|^{\lambda-1}\nabla u) - |u|^{p-1}u,$$

где $\lambda > 1$, был получен в [4] при условии $p \geq \lambda + \frac{\lambda+1}{N}$. Вопросы устранимости особенностей для параболического уравнения с абсорбцией более общего вида (с измеримыми коэффициентами) изучались в работе [5] при тех же ограничениях на критический показатель. Этот результат удалось распространить и на уравнения высокого порядка [6].

Касаясь исследования начально-краевых задач в областях с некомпактными границами, отметим работы [7] (случай задачи

Неймана), [8] (случай третьей краевой задачи) и [9] (случай задачи Дирихле). В этих работах изучался вопрос о качественном поведении решений в зависимости от геометрии области.

В дальнейшем мы будем предполагать, что Ω удовлетворяет условиям изопериметрического типа, которые необходимы для теорем вложения [10]. Перейдем к точному описанию класса областей, удовлетворяющих условиям изопериметрического типа. Введем функцию:

$$l(v) = \inf\{|\partial G \cap \Omega|_{N-1} : G \subset \Omega, |G| = v, \partial G \text{ - липшицева}\}.$$

Пусть $g(v)$, $v \in (0, \infty)$- положительная непрерывная функция такая, что

$$\frac{v^{(N-1)/N}}{g(v)} \text{ не убывает для всех } v > 0. \tag{1.7}$$

Определение 1.1. Пусть $\Omega \subset R^N$, $N \geq 2$, неограниченная область с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$, и $|\Omega|_N = \infty$. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{B}(g)$ ($\Omega \in \mathcal{B}(g)$), если для всех $v > 0$

$$l(v) \geq g(v),$$

где $g(v) > 0$ удовлетворяет условию (1.7).

Классы $\mathcal{B}(g)$ и близкие к ним были введены в работах [11], а также [7]. Геометрически области из класса $\mathcal{B}(g)$ характеризуются тем, что не сужаются на бесконечности. Типичным примером областей класса Ω является область типа бесконечного параболоида [7]:

Пусть $0 \leq h \leq 1$ - фиксированное число. Определим

$$\Omega = \{x \in R^N |\ |x'| < x_N^h\}, \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}).$$

Из результатов [10, глава 4], следует, что $\Omega \in \mathcal{B}(g)$ с

$$g(v) = \gamma \min(v^{(N-1)N}, v^\eta),\ v > 0;\ \eta = \frac{h(N-1)}{1 + h(N-1)} \leq \frac{N-1}{N}.$$

При $N = 2$ различные примеры областей класса $\mathcal{B}(g)$ рассмотрены в [11].

Определение 1.2. $u(x,t)$- слабое решение задачи (1.1)-(1.3), если $u(x,t) \geq 0$, $u(x,t) \in C(0,T; L^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}(\overline{\Omega} \times (\tau, T))$, $|Du^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}| \in$

$L^{\lambda+1}_{loc}(\overline{\Omega}\times(\tau,T))$ и

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(-u\xi_t + u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\xi + u^p\ \xi\right) dx\, dt = 0,$$
$$\forall \xi\in C^1_0(R^N\times(\tau,T));$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_\Omega\ u(x,t)\ X(x)\, dx = \int\limits_\Omega\ X(x)\, d\mu, \qquad \forall X(x)\in C^\infty_0(R^N).$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть* $\Omega\in\mathcal{B}(g)$. *При* $p=m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}$ *слабое решение задачи (1.1)-(1.3) не существует.*

Мы же в этой работе докажем эквивалентный результат в терминах устранимых особенностей решений.

Определение 1.3. $u(x,t)$- особое решение задачи (1.1)-(1.3) с особенностью в точке (0,0), если $u(x,t)\geq 0$, $u(x,t)\in C(0,T;$ $L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\ \cap L^\infty_{loc}(\overline{\Omega}\times(0,T))$, $u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}\in L^1_{loc}(\overline{\Omega}\times(0,T))$; и выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(u_t\varphi + u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\varphi + u^p\ \varphi\right) dx\, dt = 0 \tag{1.8}$$

с $\varphi(x,t)=\psi(x,t)\zeta(x,t)$, где $\psi(x,t)$ из такого же пространства как $u(x,t)$, а $\zeta(x,t)\in C^\infty(R^N\times[0,T])$ и исчезает в окрестности (0,0). Функция $\varphi(x,t)$ такова, что suppφ содержится в цилиндре $\{|x|\leq\rho<\infty,\ 0\leq t<T\}$.

Определение 1.4. Будем говорить, что особенность в (0,0) устранима, если интегральное тождество (1.8) выполняется для функции $\varphi(x,t)=\psi(x,t)\bar{\zeta}(x,t)$, supp$\varphi$ содержится в цилиндре $\{|x|\leq\rho<\infty,\ 0\leq t<T\}$. Здесь $\psi(x,t)$ такая, как в определении 1.3, а функция $\bar{\zeta}(x,t)\in C^\infty(R^N\times[0,T])$.

Теорема 2. Пусть $\Omega\in\mathcal{B}(g)$, $p=m+\lambda-1+\frac{\lambda+1}{N}$; $u(x,t)$- особое решение задачи (1.1)-(1.3) с особенностью в точке (0,0). Тогда $u(x,t)$ имеет устранимую особенность в (0,0).

Доказательство Теоремы 2 проведем в три шага. Сначала установим некоторую поточечную оценку в пункте 3, используя её оценим градиент решения в пункте 4, и, наконец, в пункте 5 в окрестности (0,0) получим оценку вида

$$u(x,t)\leq C\left(|x|+t^{\frac{1}{K}}\right)^{\beta-N},$$

где C- положительная постоянная, $\beta > 0$,

$$K = \lambda + 1 + N(m + \lambda - 2). \tag{1.9}$$

Последняя оценка гарантирует выполнение следующего равенства

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} u(x,t)\left(|x| + t^{\frac{1}{K}}\right)^N = 0. \tag{1.10}$$

Если выполняется (1.10), то из работ [5], [12] следует, что в точке (0,0) особенность устранима.

Методы получения априорных оценок решений были разработаны в работах [5],[13].

2. Вспомогательные утверждения.

В процессе доказательства нам понадобится следующий результат о вложении.

Лемма 2.1.[7] *Пусть* $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, $v \in L^\infty((0,T);L^{\tilde r}(\Omega)), Dv \in (L^{\tilde p}(\Omega))^N$, *с* $\tilde p > 1$, $\tilde r \geq 1$, *и предполагаем, что* $\sup\limits_{(0,T)} |supp\ v(\cdot,t)| < \infty$. *Тогда*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |v|^{\tilde p(1+\frac{\tilde r}{N})}\, dx\, dt$$

$$\leq \gamma \sup_{0<t<T}\left[\omega(|supp\ v(\cdot,t)|)^{\tilde p}\left(\int\limits_\Omega |v(x,t)|^{\tilde r}\, dx\right)^{\frac{\tilde p}{N}}\right] \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |Dv|^{\tilde p}\, dx\, dt,$$

где $\gamma = \gamma(\tilde p, \tilde r, N)$, $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *- неубывающая функция:* $\omega(z) = z^{1-1/N}/g(z)$.

Также будем использовать следующую лемму, доказательство которой можно найти в [14,гл.8,п.11].

Лемма 2.2. *Пусть* $\{\alpha_i\}, i = 1, 2, ...,$ *- ограниченная числовая последовательность такая, что для всех* $j \geq 1$ *выполнено неравенство*

$$\alpha_i \leq A a^j \alpha_{j+1}^\sigma, \qquad \sigma \in (0,1), \qquad A, a \geq 1.$$

Тогда

$$\alpha_1 \leq c A^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

где постоянная с зависит только от σ, a.

Всюду в дальнейшем через γ, γ_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

3. Поточечные оценки решений.

Пусть $R_0 > 0$- фиксированное число:

$$R_0 \leq \frac{1}{2}\min\{1, dist(0,\partial\Omega), T^{1/K}\},$$

где K представлена равенством (1.9). Для $0 < r \leq R_0$ определим

$$D(r) = \left\{(x,t) \in R^N \times R^1_+ : \left(\frac{|x|}{r}\right)^{\lambda+1} + \frac{t}{r^K} \leq 1\right\} \subset R^N \times R^1_+,$$

$$M(r) = \sup\,\{u(x,t) : (x,t) \in D(R_0)\backslash D(r)\},$$

где $R^1_+ = \{t \in R^1 : t > 0\}$.

Предполагаем, что $\lim\limits_{r\to 0} M(r) = \infty$, иначе устранимость особенности следует из [5], [12].

Для $0 < \rho < 3^{-1/(\lambda+1)}R_0$, $\sigma \in (0,1/2)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_{\sigma\rho}(x,t) = \omega_\sigma\left(\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{\lambda+1} + \frac{t}{\rho^K}\right),$$

где $\omega_\sigma : R^1 \to R^1$, $\omega_\sigma \in C^\infty$:

$$\omega_\sigma(s) = \begin{cases} 1, & 1 \leq s \leq 2, \\ 0, & \text{вне} \;\; (1-\sigma)^{\lambda+1} \leq s \leq 3-(1-\sigma)^{\lambda+1}, \end{cases}$$

$0 \leq \omega_\sigma(s) \leq 1$, $\left|\frac{d\omega_\sigma(s)}{ds}\right| \leq \frac{\gamma}{\sigma}$. Заметим, что при $\varphi_{\sigma\rho}(x,t) \neq 0$ $u(x,t) \leq M(\rho-\sigma\rho)$.

Для $0 < R < R_0$ определим $u_R(x,t) = (u(x,t) - M(R))_+$, где $(y)_+ = \max\{y, 0\}$; $y \in R^1$.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы 2 для* $0 < \rho < 3^{-1/(\lambda+1)}R_0$, $0 < R < R_0$, $\sigma \in (0,1/2)$ *имеет место оценка:*

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_\Omega u_R^2\,\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx + \iint\limits_{Q_T} u_R^{m-1}\,|Du_R|^{\lambda+1}\,\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx\,dt\, +$$

$$+\iint\limits_{Q_T} u_R^{p+1}\,\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx\,dt \;\leq \tfrac{\gamma}{\sigma^{\lambda+1}}(M^2(\rho-\sigma\rho)\rho^N + \tag{3.1}$$

$$+M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)\rho^{N+K-(\lambda+1)}).$$

Доказательство. Умножив уравнение (1.1) на функцию $\varphi(x,t) = (u(x,t) - M(R))_+ \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}(x,t)$ и проинтегрировав по Q_T, получим неравенство

$$\sup_{0<t<T} \int_{\Omega} u_R^2 \, \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1} \, dx +$$

$$+ \iint_{Q_T} u_R^{m-1} \, |Du_R|^{\lambda+1} \, \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1} \, dx \, dt \; + \iint_{Q_T} u_R^{p+1} \, \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1} \, dx \, dt \le$$

$$\le \gamma \left(\iint_{Q_T} u_R^2 \, \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda} \, (\varphi_{\sigma\rho})_t' \, dx \, dt \; + \iint_{Q_T} u_R^{m+\lambda} \, |D\varphi_{\sigma\rho}|^{\lambda+1} \, dx \, dt \right),$$

из которого, учитывая свойства функции $\varphi_{\sigma\rho}$, и следует утверждение леммы 3.1.

Теорема 3.1. *В условиях теоремы 2 выполняется оценка:*

$$M(\rho) \le \gamma \rho^{-N} \, \text{для } 0 < \rho < 3^{-1/(\lambda+1)} R_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\varphi(x,t) = (u(x,t) - M(R))_+^{\nu} \varphi_{\sigma\rho}^{s}(x,t), \qquad \nu \ge 1, s \ge \lambda + 1$$

и проинтегрируем по Q_T. Проделав стандартные преобразования, получим

$$\sup_{0<t<T} \int_{\Omega} u_R^{\nu+1} \, \varphi_{\sigma\rho}^{s} \, dx +$$

$$+ \iint_{Q_T} |D(u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}})|^{\lambda+1} \, dx \, dt \; + \iint_{Q_T} u_R^{p+\nu} \, \varphi_{\sigma\rho}^{s} \, dx \, dt \tag{3.3}$$

$$\le \gamma (\tfrac{\nu+s}{\sigma})^{\lambda+1} \left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1}} \right) \iint_{Q_T} u_R^{\nu-1} \, \varphi_{\sigma\rho}^{s-(\lambda+1)} \, dx \, dt \; ,$$

Применяя лемму 2.1 для $v = u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}}$, $\tilde{p} = \lambda + 1$, $\tilde{r} = \frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{m+\lambda-1+\nu}$, имеем:

$$\iint_{Q_T} \left(u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}} \right)^{(\lambda+1)(1+\frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{(m+\lambda-1+\nu)N})} dx \, dt$$

$$\le \gamma \sup_{0<t<T} \left[\omega(|\mathrm{supp}\,\{u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}}\}(\cdot,t)|)^{\lambda+1} \left(\int_{\Omega} u_R^{\nu+1} \, \varphi_{\sigma\rho}^{s} \, dx \right)^{\frac{\lambda+1}{N}} \right]$$

$$\times \iint\limits_{Q_T} |D(u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\,dx\,dt. \qquad (3.4)$$

Учитывая свойства функции $\varphi_{\sigma\rho}$, мера носителя функции $\{u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}}\}(\cdot,t)$ не превосходит единицы, значит, в силу неубывания функции ω, имеем

$$\omega(|\mathrm{supp}\ \{u_R{}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}}\}(\cdot,t)|) \le \omega(1) = const.$$

Пусть $p_2 > 1$- произвольное число такое, что

$$\left(1 + \frac{Np_2}{\lambda+1}\right)\frac{K}{N} > 1,$$

(например $p_2 = \frac{\lambda+1}{K}$.) $p_1 = \frac{p_2}{p_2-1}$. Определим l, k, θ следующим образом

$$l = \frac{p+\nu}{p_1} + \frac{m+\lambda-1+\nu+\frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{N}}{p_2},$$

$$k = \frac{s}{p_1} + \frac{s(1+\frac{\lambda+1}{N})}{p_2}, \qquad \theta = \frac{Np_2}{Np_2+\lambda+1}.$$

Последовательно применяя неравенство Гельдера, а затем оценки (3.3), (3.4), получим

$$\iint\limits_{Q_T} u_R^l\ \varphi_{\sigma\rho}^k\,dx\,dt \le \left(\iint\limits_{Q_T} u_R{}^{p+\nu}\ \varphi_{\sigma\rho}^s\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} u_R{}^{m+\lambda-1+\nu+\frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{N}}\ \varphi_{\sigma\rho}^{s(1+\frac{\lambda+1}{N})}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\le \gamma\left(\frac{l+k}{\sigma}\right)^{\frac{\lambda+1}{p_1}+\frac{\lambda+1}{p_2}(\frac{\lambda+1}{N}+2)}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1}}\right)^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}(\frac{\lambda+1}{N}+1)}$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} u_R^{\nu-1}\ \varphi_{\sigma\rho}^{s-(\lambda+1)}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}(\frac{\lambda+1}{N}+1)}. \qquad (3.5)$$

Неравенство (3.5) позволяет нам провести итерацию для оценки максимума $u_R(x,t)$ на множестве $\{(x,t) : \varphi_{\sigma\rho}(x,t) = 1\}$. Рассмотрим последовательности

$$l_j = \left(p+1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})\right)\theta^{-j} - \frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2}),$$

$$k_j = (2(\lambda+1) + Np_2)\theta^{-j} - (Np_2 + \lambda + 1),$$

и положим

$$I(l_j, k_j) = \left(\iint\limits_{Q_T} {u_R}^{l_j} \ \varphi_{\sigma\rho}^{k_j} \, dx \, dt \right)^{\theta^j}.$$

Из неравенства (3.5) следует оценка

$$I(l_j, k_j) \leq$$

$$\leq \gamma \left\{ (\sigma^{-1}\theta^{-j})^{\frac{\lambda+1}{p_1} + \frac{\lambda+1}{p_2}(\frac{\lambda+1}{N}+2)} \left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\theta^j}$$

$$\times I(l_{j-1}, k_{j-1}),$$

откуда, итерируя, получаем

$$I(l_j, k_j) \leq$$

$$\leq \gamma \left\{ \sigma^{-(\lambda+1)(\frac{N+\lambda+1}{Np_2}+1)} \left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{1-\theta}(1-\theta^j)}$$

$$\times I(l_0, k_0).$$

Устремляя j к бесконечности и применяя оценку (3.1), имеем

$$M^{p+1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}(\rho) \leq \gamma\sigma^{-\gamma_1} \left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$
$$\times (M^2(\rho-\sigma\rho)\rho^N + M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)\rho^{N+K-(\lambda+1)}). \qquad (3.6)$$

Далее рассмотрим два случая:

(a) для фиксированного ρ существует такая $\sigma \in (0, 1/2)$, что

$$M^2(\rho-\sigma\rho) \leq \rho^{K-(\lambda+1)} M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho), \qquad (3.7)$$

то есть $M(\rho-\sigma\rho) \leq \rho^{-N}$.

(b) для фиксированного ρ неравенство (3.7) не выполняется для каждого $\sigma \in (0, 1/2)$.

В первом случае сразу получаем

$$M(\rho) \leq M(\rho - \sigma'\rho) \leq \rho^{-N}$$

для некоторого $\sigma' \in (0, 1/2)$. Тем самым оценка (3.2) доказана.

Во втором случае из (3.6) имеем

$$M^{p+1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}(\rho) \le \gamma\sigma^{-\gamma_1}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^K}\right)^{\frac{Np_2+\lambda+1}{\lambda+1}} M^2(\rho-\sigma\rho)\rho^N \tag{3.8}$$

для каждого $\sigma \in (0, 1/2)$.

Положим

$$y(\rho) = M(\rho)\rho^N.$$

Из (3.8) получим

$$y^{p+1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}(\rho) \le \gamma\sigma^{-\gamma_1} y^{2(\frac{Np_2+\lambda+1}{\lambda+1})+2}(\rho-\sigma\rho). \tag{3.9}$$

Рассмотрим последовательность $\{\sigma_j = 2^{-(j-1)}, j = 1, 2, ...\}$. Пусть $y_j = y(\rho-(\sigma_1+...+\sigma_j)\rho$. Тогда из неравенства (3.9) следует оценка

$$y_j \le \gamma 2^{j\gamma_1} y_{j+1}^h \qquad \text{для } j = 1, 2, ..., \tag{3.10}$$

$$h = \frac{2(\frac{Np_2+\lambda+1}{\lambda+1})+2}{p+1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}.$$

Условия на p_2 обеспечивают неравенство $h < 1$. Используя лемму 2.2, учитывая ограниченность последовательности y_j, из (3.10) получим

$$y_1 = M(\rho)\rho^N \le \gamma,$$

что и завершает доказательство теоремы 3.1.

4. Интегральные оценки решений.

В силу теоремы 3.1 и очевидного неравенства

$$\left(\frac{2|x|}{|x|+t^{\frac{1}{K}}}\right)^{\lambda+1} + \frac{2^K t}{(|x|+t^{\frac{1}{K}})^K} \ge 1$$

для $0 < |x| + t^{\frac{1}{K}} < 3^{-1/(\lambda+1)}R_0$ получаем оценку

$$u(x,t) \le \gamma\left(|x|+t^{\frac{1}{K}}\right)^{-N}. \tag{4.1}$$

Положим

$$\widetilde{D}(r) = \{(x,t) \in R^{N+1} : |x|^K + t \le r^K\},$$

$$\widetilde{M}(r) = \sup\,\{u(x,t) : (x,t) \in \widetilde{D}(\widetilde{R}_0) \backslash \widetilde{D}(r)\} + r^{-1/2},$$

$$E(r) = \{(x,t) \in Q_T \backslash (0,0) : u(x,t) > \widetilde{M}(r)\},$$

$$\widetilde{u}_r(x,t) = (u(x,t) - \widetilde{M}(r))_+, \qquad (x,t) \in Q_T \backslash (0,0).$$

Здесь

$$0 < r < \widetilde{R}_0, \qquad \widetilde{R}_0 = \max\{r : \widetilde{D}(r) \subset D(R_0)\},$$

$u(x,t)$- решение уравнения (1.1) с особенностью в (0,0).

Для $r \in (0, \widetilde{R}_0)$ рассмотрим функцию

$$\psi_r(x,t) = \eta_r(|x|^K + t),$$

где $\eta_r : R^1 \to R^1$:

$$\eta_r(s) = \begin{cases} 1, & s \geq R^K(r), \\ 0, & s \leq r^K, \end{cases}$$

$$\eta_r(s) = -\left((1-\theta)\ln\ln\frac{1}{r^K}\right)^{-1} \int\limits_{r^K}^{s} \frac{1}{z\ln z}\,dz, \qquad r^K \leq s \leq R^K(r).$$

Здесь $\theta \in (0,1)$, $R(r)$ определены равенством

$$\ln\frac{1}{R^K(r)} = \left(\ln\frac{1}{r^K}\right)^{\theta}.$$

Обозначим

$$\overline{p} = Np = N(m+\lambda-1) + \lambda + 1.$$

Для $r \in (0, \widetilde{R}_0)$ положим

$$F_1(r) = \begin{cases} \left(\ln\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1}}, & \lambda+1 > N(m+\lambda-1), \\ \ln\ln\frac{1}{r}, & \lambda+1 = N(m+\lambda-1), \\ \left(\ln\frac{1}{R(r)}\right)^{1-\frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1}}, & \lambda+1 < N(m+\lambda-1). \end{cases}$$

$$F_2(r) = \begin{cases} \ln^{2-p'}\frac{1}{r}, & p' < 2\ , p' = \frac{p}{p-1}, \\ \ln\ln\frac{1}{r}, & p' = 2, \\ \ln^{2-p'}\frac{1}{R(r)}, & p' > 2. \end{cases}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда для* $0 < R(r) < \rho < \widetilde{R}_0$ *справедлива следующая оценка*

$$\iint\limits_{E(\rho)} u^{m-2}\ |Du|^{\lambda+1}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt + \iint\limits_{E(\rho)} u^p\ \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma\biggl(\Bigl[\ln\ln\frac{1}{r^K}\Bigr]^{-\overline{p}} F_1(r) + \Bigl[\ln\ln\frac{1}{r^K}\Bigr]^{-p'} F_2(r)\biggr). \qquad (4.2)$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\varphi(x,t) = \Bigl[\ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\Bigr]_+ \psi_r^{\overline{p}}(x,t)$ и проинтегрируем по Q_T. Совершая стандартные преобразования и применяя неравенство Юнга, получим

$$\iint\limits_{E(\rho)} u^{m-2}\ |Du|^{\lambda+1}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt + \iint\limits_{E(\rho)} u^p\ \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq \gamma(I_1+I_2), \qquad (4.3)$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{E(\rho)} \int\limits_{\widetilde{M}(\rho)}^{u} \ln\frac{z}{\widetilde{M}(\rho)}\,dz\ \psi_r^{\overline{p}-1}\ (\psi_r)'_t\,dx\,dt,$$

$$I_2 = \iint\limits_{E(\rho)} u^{m+\lambda-1}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ \ln^{\lambda+1}\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt.$$

Применяя неравенство Юнга, определение функции ψ_r, а также (4.1), найдем оценку интеграла I_1:

$$I_1 - \frac14\iint\limits_{E(\rho)} u^p\ \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq \gamma\iint\limits_{E(\rho)} \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}-p'}\ |(\psi_r)'_t|^{p'}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma\Bigl(\ln\ln\frac{1}{r^K}\Bigr)^{-p'} \iint\limits_{\widetilde{D}(R(r))\setminus\widetilde{D}(r)} \ln^{1-p'}\frac{1}{|x|^K+t}\ (|x|^K+t)^{-p'}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma\Bigl(\ln\ln\frac{1}{r^K}\Bigr)^{-p'} F_2(r). \qquad (4.4)$$

Аналогично оценим I_2:

$$I_2 - \frac14\iint\limits_{E(\rho)} u^p\ \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq \gamma\iint\limits_{E(\rho)} \Bigl(\ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\Bigr)^{1+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{p}} |D\psi_r|^{\overline{p}}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma \left(\ln \ln \frac{1}{r^K} \right)^{-\overline{p}} F_1(r). \qquad (4.5)$$

Объеденив (4.3)-(4.5) получаем оценку (4.2). Лемма 4.1 доказана.

Для $0 < r < \widetilde{R}_0$ положим

$$F_3(r) = \ln^{1-p'} \frac{1}{R(r)}, \qquad F_4(r) = \ln^{1-(\lambda+1)} \frac{1}{R(r)}.$$

Далее определим функцию $u^{(\rho)}(x,t)$ и множество $E(\rho, 4\rho)$:

$$u^{(\rho)}(x,t) = \min\{[u(x,t) - \widetilde{M}(4\rho)]_+, \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)\},\ (x,t) \in Q_T \backslash (0,0),$$

$$E(\rho, 4\rho) = \{(x,t) \in Q_T : \widetilde{M}(4\rho) < u(x,t) < \widetilde{M}(\rho)\}.$$

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда для* $0 < R(r) < \rho < \widetilde{R}_0$

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)} |D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}} \psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\, dx\, dt \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad (4.6)$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\varphi(x,t) = u^{(\rho)}(x,t)\psi_r^{\overline{p}}(x,t)$ и проинтегрируем по Q_T. Аналогично доказательству леммы 4.1 получим

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)} |D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}} \psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\, dx\, dt + \iint\limits_{E(4\rho)} u^p\ u^{(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\, dx\, dt \leq \gamma(I_3 + I_4 + I_5), \qquad (4.7)$$

где

$$I_3 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}\ u\ \psi_r^{\overline{p}-1}\ (\psi_r)'_t\, dx\, dt,$$

$$I_4 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-1}\ |Du|^\lambda\ u^{(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}-1}\ |D\psi_r|\, dx\, dt,$$

$$I_5 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\, dx\, dt.$$

Оценим I_3, применяя неравенство Юнга, а также определение функции ψ_r,

$$I_3 - \frac{1}{4} \iint\limits_{E(4\rho)} u^p\ u^{(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\, dx\, dt \leq \gamma \iint\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}-p'}\ |(\psi_r)'_t|^{p'}\, dx\, dt$$

$$\leq \gamma \widetilde{M}(\rho)\left(\ln\ln\frac{1}{r^K}\right)^{-p'} \iint\limits_{\widetilde{D}(R(r))\setminus\widetilde{D}(r)} \ln^{-p'}\frac{1}{|x|^K+t}\ (|x|^K+t)^{-p'}\,dx\,dt$$

$$\leq \gamma\widetilde{M}(\rho)F_3(r).$$

Исходя из свойств функции ψ_r и применяя неравенство (4.1), оценим I_5

$$I_5 \leq \widetilde{M}(\rho)\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda-1}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt \leq \gamma\widetilde{M}(\rho)F_4(r). \tag{4.8}$$

Наконец, применяя неравенство Гельдера, неравенства (4.2) и (4.8), оценим I_4

$$I_4 \leq \widetilde{M}(\rho)\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-1}\ |Du|^{\lambda}\ \psi_r^{\overline{p}-1}\ |D\psi_r|\,dx\,dt$$

$$\leq \widetilde{M}(\rho)\Bigg(\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-2}\ |Du|^{\lambda+1}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda-1}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

$$\leq \gamma\widetilde{M}(\rho)\left(\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}}F_1(r) + \left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'}F_2(r)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\Big(F_4(r)\Big)^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

Из (4.7) и полученных оценок интегралов $I_3 - I_5$, имеем

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)} |D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}}\psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\,dx\,dt \leq \gamma\widetilde{M}(\rho)\Bigg\{F_3(r)+F_4(r)$$

$$+\left(\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}}F_1(r) + \left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'}F_2(r)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\Big(F_4(r)\Big)^{\frac{1}{\lambda+1}}\Bigg\}. \tag{4.9}$$

Перейдем к пределу при $r \to 0$ в (4.9). Из определения функций F_3, F_4 следует

$$\lim_{r\to 0}F_3(r) = \lim_{r\to 0}F_4(r) = 0.$$

Для функций F_1, F_2 рассмотрим 6 случаев:

1) при $\lambda+1 < N(m+\lambda-1)$ по определению $\lim\limits_{r\to 0}F_1(r) = 0$;

2) при $p' > 2$ по определению $\lim\limits_{r\to 0} F_2(r) = 0$;

3) при $\lambda + 1 = N(m + \lambda - 1)$ имеем $\lim\limits_{r\to 0}\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}} F_1(r) = 0$;

4) при $p' = 2$ имеем $\lim\limits_{r\to 0}\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'} F_2(r) = 0$;

5) при $\lambda + 1 > N(m + \lambda - 1)$ рассмотрим

$$F_1{}^{\lambda}(r)F_4(r) \le \gamma\left\{\ln\frac{1}{r}\right\}^{\lambda(1-\frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1})-\theta\lambda};$$

6) при $p' < 2$ рассмотрим

$$F_2{}^{\lambda}(r)F_4(r) \le \gamma\left\{\ln\frac{1}{r}\right\}^{\lambda(2-p')-\theta\lambda}.$$

Правые части последних двух неравенств будут стремиться к нулю при $r \to 0$, если мы выберем

$$\theta > \max\{1 - \frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1}, 2 - p'\}.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$ в (4.9), получаем утверждение леммы 4.2.

5. Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим C^∞-функцию $\xi_\rho : R^1 \to R^1$:

$$\xi_\rho(s) = \begin{cases} 1, & s \ge \rho^K, \\ 0, & s \le (\frac{\rho}{2})^K, \end{cases}$$

$0 \le \xi_\rho(s) \le 1$, $|\frac{d\xi_\rho(s)}{ds}| \le (\frac{4}{\rho})^K$.

Лемма 5.1. *При выполнении условий теоремы 2 для* $0 < \rho < \widetilde{R}_0$ *имеет место оценка*

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho)$$

$$\le \gamma\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-K} + \widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-(\lambda+1)}\right)^{\frac{Np_2+\lambda+1}{\lambda+1}\frac{1}{\beta_1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}}$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{\beta_1}\,\xi_\rho^{\beta_2}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{\beta_1+\frac{Np_2}{\lambda+1}(p+1+\frac{\lambda+1}{Np_2})}} + \rho^{-\frac{1}{2}}, \qquad (5.1)$$

где p_2*- такое, как в теореме 3.1,*

$$\beta_1=(m+\lambda)(1+\frac{\lambda+1}{N}), \qquad \beta_2=(N(m+\lambda-1)+\lambda+1)(1+\frac{\lambda+1}{N}).$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\varphi(x,t)=(u(x,t)-\widetilde{M}(2\rho))_+^{\nu}\xi_\rho^s(|x|^K+t), \qquad \nu\geq 1, s\geq\lambda+1$$

и проинтегрируем по Q_T. Применяя неравенство Юнга, после преобразоаний получим

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{\Omega}\widetilde{u}_{2\rho}^{\nu+1}\,\xi_\rho^s\,dx+\iint\limits_{Q_T}|D(\widetilde{u}_{2\rho}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}}\xi_\rho^{\frac{s}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$\leq\gamma(\nu+s)^{\lambda+1}\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-K}+\widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-(\lambda+1)}\right)$$

$$\times\iint\limits_{Q_T}\widetilde{u}_{2\rho}^{\nu-1}\,\xi_\rho^{s-(\lambda+1)}\,dx\,dt.$$

Из последнего неравенства, а также используя доказательство неравенства (3.4), получаем оценку

$$\iint\limits_{Q_T}\widetilde{u}_{2\rho}^{m+\lambda-1+\nu+\frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{N}}\,\xi_\rho^{s(1+\frac{\lambda+1}{N})}\,dx\,dt$$

$$\leq\gamma(\nu+s)^{(\lambda+1)(\frac{\lambda+1}{N}+2)}\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-K}+\widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{-(\lambda+1)}\right)^{1+\frac{\lambda+1}{N}}$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T}\widetilde{u}_{2\rho}^{\nu-1}\,\xi_\rho^{s-(\lambda+1)}\,dx\,dt\right)^{1+\frac{\lambda+1}{N}}, \tag{5.2}$$

где выбираем

$$\nu-1\geq\beta_1, s-(\lambda+1)\geq\beta_2.$$

В силу неравенства (5.2) с помощью метода Мозера можно получить оценку максимума функции $\widetilde{u}_{2\rho}(x,t)$ на множестве $\{\xi_\rho(x,t)=1\}$. Оценка (5.1) доказывается аналогично (3.6). Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *При выполнении условий теоремы 2 для* $0<\rho<\widetilde{R}_0$, $\beta>0$ *имеет место оценка*

$$\widetilde{M}(\rho)-\widetilde{M}(2\rho)\leq\gamma\rho^{\beta-N}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Оценим правую часть неравенства (5.1). По определению $\widetilde{M}(\rho)$

$$u(x,t) \leq \widetilde{M}\left(\frac{\rho}{2}\right) \qquad \text{для } \xi_\rho(x,t) \neq 0.$$

Применяя лемму 2.1 для $v = (u^{(\frac{\rho}{2})})^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}} \psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}}$, $\tilde{p} = \tilde{r} = \lambda+1$, а также лемму 4.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{\beta_1}\, \xi_\rho^{\beta_2}\, dx\, dt \leq \iint\limits_{Q_T} (u^{(\frac{\rho}{2})})^{\beta_1}\, \psi_r^{\beta_2}\, dx\, dt \\
&\leq \gamma \sup_{0<t<T} \left(\int\limits_\Omega (u^{(\frac{\rho}{2})})^{m+\lambda}\, dx \right)^{\frac{\lambda+1}{N}} \qquad (5.4) \\
&\times \iint\limits_{E(\frac{\rho}{2},2\rho)} |D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}} \psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\, dx\, dt \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Из (5.1) и (5.4) следует

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \leq \gamma \rho^{-\frac{1}{2}},$$

откуда и следует утверждение леммы 5.2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательности $\{\rho_j\}$, $\{\widetilde{M}_j\}$:

$$\rho_j = \frac{\widetilde{R}_0}{2^j}, \qquad \widetilde{M}_j = \widetilde{M}(\rho_j), \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $\widetilde{R}_0$-фиксированный параметр, из оценки (5.3) получаем

$$\widetilde{M}_j - \widetilde{M}_{j-1} \leq \gamma 2^{j(N-\beta)}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.5}$$

Суммируя (5.5) по j от 2 до J, получаем

$$\widetilde{M}_J - \widetilde{M}_1 \leq \gamma 2^{J(N-\beta)},$$

откуда следует неравенство

$$\widetilde{M}(\rho) \leq \gamma(\rho^{\beta-N} + \widetilde{M}_1).$$

Последнее неравенство гарантирует выполнение следующей поточечной оценки

$$u(x,t) \leq \gamma \left[\left(|x| + t^{\frac{1}{K}} \right)^{\beta - N} + \widetilde{M}_1 \right].$$

Далее очевидно выполнение неравенства (1.10), и из [5], [12] следует, что в точке (0,0) особенность устранима. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит А.Ф.Тедеева и И.И.Скрыпника за полезные замечания.

1. *Болдовская О.М.* Несуществование слабого решения или устранение особенностей решений задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией. (в печати).
2. *Болдовская О.М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай медленной диффузии. // Тр. ИПММ НАНУ. – 2008. – Т. 16. – С. 33 – 54.
3. *Bresis H., Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. // J. Math. Pures Appl. – 1983. – 62. – P. 73 – 97.
4. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data. // Asymptotic Anal. – 1990. – 3. – P. 43 – 56.
5. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption. // Sb. Math. – 2005. – 196. – P. 1693 – 1713.
6. *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data. // Commun. in Cont. Math. – 2006. – V. 8(3). – P. 331 – 354.
7. *Andreucci D., Tedeev A.F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary. // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – V. 231. – P. 543 – 567.
8. *Ушаков В.И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области. // Мат. сб. – 1980. – Т. 111(153). – С. 95 – 115.
9. *Мукминов Ф.Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка. // Мат. сб. – 1980. – Т. 111(153). – С. 503 – 521.
10. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. – Изд-во ЛГУ, 1985, 415 с.
11. *Гущин А.К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. МИАН. – 1973. – Т. CXXVI. – С. 5 – 45.
12. *Nicolosi F., Skrypnik I.V., Skrypnik I.I.* Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations. // Topol. Methods Nonlinear Anal. (to appear).

13. *Скрыпник И.И.* Об устранимости изолированной особенности для анизотропных эллиптических уравнений с абсорбцией. // Мат. сб. – 2008. – Т. 199(№7). – С. 85 – 102.
14. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. // Наука, М., – 1990, 448 с.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул.Р.Люксембург, 74
83114, Донецк, Украина

Получено 6.10.08