

УДК 539.4:534.1

©2016. Г. М. Улитин, С. Н. Царенко

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОНСТРУКЦИИ НЕСУЩИХ ОПОР

Рассматривается задача изгибных колебаний конструкций несущих опор, которые имеют форму конических труб. Учитывается переменная изгибная жесткость и распределенная масса для случая, когда их отношение выражается квадратичной зависимостью от безразмерного радиуса инерции поперечного сечения. В качестве примера рассмотрены свободные поперечные колебания, вызванные начальным отклонением продольной оси стержня от действия нагрузки переменной интенсивности. Исследовано влияние параметра поперечного сечения на значение первой собственной частоты с учетом наличия инерционной нагрузки. Получены выражения для динамических коэффициентов по прогибам и изгибающим моментам в основании стержня.

Ключевые слова: изгибные колебания, метод Фурье, стержни переменного сечения, функции Бесселя.

1. Введение. При исследовании напряженно-деформированного состояния различного рода конструкций и оборудования используются модели упругого стержня. Так, на основе модели упругого стержня исследовались динамические процессы в буровых колонах [1, 2], с использованием модели стержней переменной жесткости рассмотрены задачи устойчивости и продольно-поперечного изгиба [3, 4]. Общие подходы к построению математических моделей поперечных колебаний стержней известны и рассмотрены в литературе [5, 6], тем не менее, аналитические решения получены преимущественно для стержней однородной структуры. Для практического расчета неоднородных стержней используются численные [7, 8] и численно-аналитические методы [9].

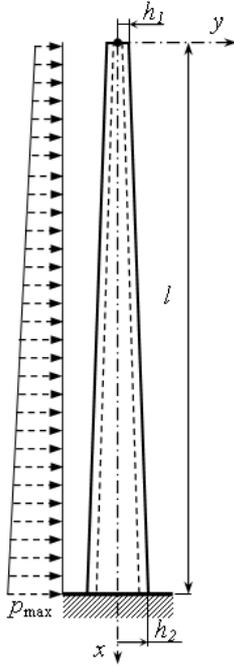
Поиск аналитических решений задач колебаний стержней с переменной структурой позволит не только определить динамические характеристики объекта на стадии проектных работ, но и может быть использован для построения эталонной модели при проведении проверочных расчетов в программных комплексах на базе метода конечных элементов.

2. Постановка задачи и основные соотношения. В работах [10, 11] рассмотрен общий подход к построению математической модели колебаний стержней, площадь поперечного сечения и изгибная жесткость которых изменяется по степенным зависимостям от продольной координаты. Для случая конической трубы уравнение изгибных колебаний будет иметь вид [11]

$$z^3 y'''' + 6z^2 y''' + 6zy'' = \frac{p(z, t)l^4}{EJ_2(1-k)^4} - \frac{\gamma F_2 l^4}{EJ_2(1-k)^4} z\ddot{y},$$

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

где $z = (1 - k)x/l + k$, $k = h_1/h_2$, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня, $y(x, t)$ – уравнение изогнутой оси стержня γ – плотность, E – модуль упругости, F_2 и J_2 – площадь поперечного сечения и момент инерции основания стержня, $p(z, t)$ – внешняя нагрузка (рис. 1).



Разделяя переменные, получаем уравнение для собственных функций, решение которого имеет вид [11]

$$Z_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}(C_1 J_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 I_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_1(\lambda_n \sqrt{z})), \quad (1)$$

где

$$\lambda_n^2 = \frac{4\omega_n l^2}{(1 - k)^2} \sqrt{\frac{\gamma F_2}{E J_2}},$$

ω_n – собственные частоты колебаний, $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ – функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

3. Модальный анализ консольной конструкции. Граничные условия в соответствии с принятой схемой (рис. 1) имеют вид

$$y(l, t) = 0, y'(l, t) = 0, Q(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$M(0, t) = 0. \quad (3)$$

Рис. 1. Расчетная схема консольной опоры

Удовлетворив граничным условиям (2), выражение для собственных функций (1) получим в виде

$$Z_n = \pi(J_1(\lambda_n \sqrt{z})(Y_1(\lambda_n) - \alpha_n Y_2(\lambda_n)) - Y_1(\lambda_n \sqrt{z})(J_1(\lambda_n) - \alpha_n J_2(\lambda_n))) + 2(I_1(\lambda_n \sqrt{z})(K_1(\lambda_n) - \alpha_n K_2(\lambda_n)) - K_1(\lambda_n \sqrt{z})(I_1(\lambda_n) + \alpha_n I_2(\lambda_n))), \quad (4)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_1(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_1(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_1(\lambda_n) + K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_1(\lambda_n))}{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_2(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_2(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_2(\lambda_n) - K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_2(\lambda_n))}.$$

Найдем выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. Определим производные от собственных функций (4):

$$Z'_z = \frac{\lambda}{2z} (\pi(-J_2(\lambda \sqrt{z})(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) + Y_2(\lambda \sqrt{z})(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda))) + 2(I_2(\lambda \sqrt{z})(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + K_2(\lambda \sqrt{z})(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda)));$$

$$\begin{aligned}
 z^3 Z''_{zz} &= \frac{\lambda z}{4} (\pi((4J_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}J_1(\lambda\sqrt{z}))(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) - \\
 &\quad - (4Y_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}Y_1(\lambda\sqrt{z}))(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda)) - \\
 &\quad - 2((4I_2(\lambda\sqrt{z}) - \lambda\sqrt{z}I_1(\lambda\sqrt{z}))(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + \\
 &\quad + (4K_2(\lambda\sqrt{z}) + \lambda\sqrt{z}K_1(\lambda\sqrt{z}))(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda))); \\
 (z^3 Z''_{zz})'_z &= \frac{\lambda^3 z}{8} (\pi(J_2(\lambda\sqrt{z})(Y_1(\lambda) - \alpha Y_2(\lambda)) - Y_2(\lambda\sqrt{z})(J_1(\lambda) - \alpha J_2(\lambda))) + \\
 &\quad + 2(I_2(\lambda\sqrt{z})(K_1(\lambda) - \alpha K_2(\lambda)) + K_2(\lambda\sqrt{z})(I_1(\lambda) + \alpha I_2(\lambda))).
 \end{aligned}$$

Из условия (3) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$Z''_n(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \tag{5}$$

С учетом того, что во многих упрощенных методах динамического расчета используется значение первой собственной частоты, оценим влияние параметра k на значение первого собственного числа уравнения (5)

$$\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}, \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2}(1 - k).$$

Аналогичное выражение используется для нахождения собственных частот стержней постоянной жесткости [5, 6]. Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного поперечного размера k представлены на рис. 2. Видно, что $\tilde{\lambda}_1 = 1.875$ при $k = 1$ (это соответствует собственному значению для консольной балки постоянной жесткости [6]).

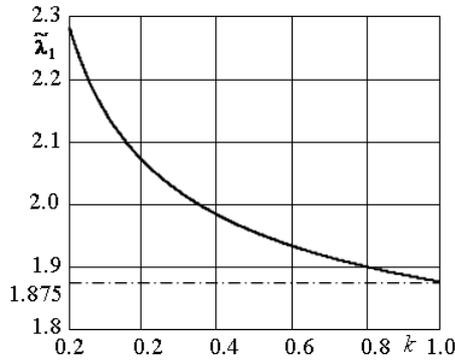


Рис. 2. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного поперечного размера k

4. Динамический расчет конструкции.

Собственные функции будут ортогональны с весом $\rho(z) = z$ [12]

$$\int_k^1 z Z_n(z) Z_m(z) dz = 0. \tag{6}$$

Для нахождения квадрата нормы собственных функций поступим аналогично как в работе [5] для собственных функций с различными индексами

$$\frac{\lambda_n^4 - \lambda_m^4}{16} \int_k^1 z Z_n(z) Z_m(z) dz = \left((z^3 Z_n'')' Z_m - (z^3 Z_m'')' Z_n - z^3 Z_n'' Z_m' + z^3 Z_m'' Z_n' \right) \Big|_k^1.$$

Перейдя к пределу при $m \rightarrow n$, получаем

$$\frac{\lambda_n^3}{4} \int_k^1 z Z_n^2(z) dz = \left(Z_n \frac{\partial(z^3 Z_n'')'}{\partial \lambda_n} - (z^3 Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^3 Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^3 Z_n'')}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_k^1. \quad (7)$$

Тогда из соотношения (7), принимая во внимание граничные условия (2), (3) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8}{\lambda_n^4} Z_n''(1)^2 - \frac{k^2}{2} Z_n^2(k).$$

В процессе эксплуатации конструкции несущих опор подвергаются воздействию переменных и ударных нагрузок: нагрузки, связанные с работой оборудования, сейсмические возмущения, а также нагрузки, возникающие в процессе монтажных работ и при аварийных ситуациях. Одним из видов такого воздействия является ветровая нагрузка, которая носит импульсный характер, что приводит к чередованию собственных и вынужденных колебаний конструкции. Остановимся на случае собственных колебаний, вызванных отклонением продольной оси распределенной нагрузкой интенсивностью $p(z) = p_{max} z$ ($k \leq z \leq 1$), которая в начальный момент времени исчезает (рис. 1). Для этого найдем решение $y(z, t)$ однородного уравнения

$$(z^3 y'')'' + \beta \ddot{y} = 0; \quad \beta = \frac{l^4 \gamma F_2}{(1-k)^4 E J_2} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$y(z, 0) = f(z); \quad \dot{y}(z, 0) = 0, \quad (9)$$

где

$$f(z) = \frac{p_{max} l^4}{12(1-k)^4 E J_2} \left(\frac{2k^3}{z} + 6k^2 \ln z + 2(k^3 - 3k^2 - 1)z + z^2 + 1 - 4k^3 + 6k^2 \right) -$$

уравнение начальных прогибов.

Решение уравнения (8) представим в виде ряда по собственным функциям, принимая во внимание соотношение $\lambda_n^4 = \beta \omega_n^2$, из второго начального условия (9) получим уравнение перемещений сечений стержня

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \cos \omega_n t, \quad (10)$$

где A_n – коэффициенты разложения.

Постоянные A_n определим из первого начального условия (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) = f(z). \quad (11)$$

Умножив обе части равенства (11) на $zZ_m(z)$ и проинтегрировав на участке $[k; 1]$, с учетом свойства (6) получим

$$A_n \Delta_n^2 = \int_k^1 z Z_n(z) f(z) dz. \quad (12)$$

Для определения интеграла из правой части равенства (12) учтем, что $zZ_n = \frac{16}{\lambda_n^4} (z^3 Z_n'')''$, интегрируя по частям, получим выражение для нахождения коэффициентов A_n

$$A_n = \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \left(f(z)(z^3 Z_n'')' - f'(z)(z^3 Z_n'') + (z^3 f''(z)) Z_n' - (z^3 f''(z))' Z_n \right) \Big|_k^1 + \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \int_k^1 (z^3 f''(z))'' Z_n(z) dz. \quad (13)$$

С учетом граничных условий (2), (3), а также, что

$$(z^3 f''(z))'' = \frac{p_{max} l^4}{(1-k)^4 E J_2} z$$

из уравнения (13) получим

$$A_n = \frac{256 p_{max} l^4}{\Delta_n^2 \lambda_n^8 (1-k)^4 E J_2} (z^3 Z_n'')' \Big|_{z=1}.$$

Продифференцировав уравнение прогибов (10), получаем выражение для изгибающих моментов

$$M(z, t) = \frac{(1-k)^2 E J_2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^3 Z_n''(z) \cos \omega_n t. \quad (14)$$

При статическом действии нагрузки изгибающий момент определяется зависимостью

$$M_0(z) = \frac{p_{max} l^2}{6(1-k)^2} (z^3 - 3k^2 z + 2k^3).$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{E J_2}{\gamma F_2}}.$$

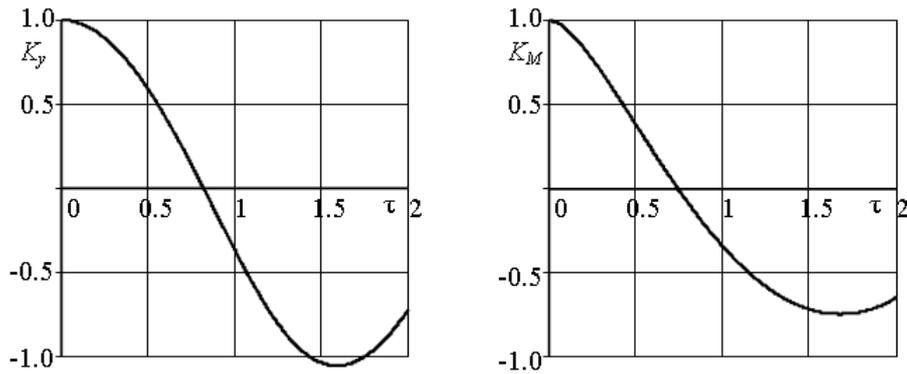


Рис. 3. Изменение динамических коэффициентов в зависимости от безразмерного параметра времени τ

Зависимости динамических коэффициентов по прогибу и изгибающему моменту в основании опоры для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$, за период $\tau = 2$ представлены на графиках рис. 3.

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)}, \quad K_M(\tau) = \frac{M(1, \tau)}{M_0}. \quad (15)$$

На рис. 3 показаны зависимости от значений коэффициентов (15) для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$. Максимальное значение коэффициента по прогибам составило $K_y = 1.053$, а по изгибающим моментам $K_M = 1$. Расчеты при разных значениях параметра показали, что динамический коэффициент по прогибам увеличивается для конструкций остроконечной формы.

1. Гуляев В.И., Луговой П.З., Борц Е.И. Самовозбуждение колебаний долота буровой колонны // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 3. – С. 114–124.
2. Улитин Г.М. Продольные колебания упругого стержня, моделирующего буровую установку // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 10. – С. 125–128.
3. Tsarenko S.N., Ulitin G.M. Investigation of strained deformed state of variable stiffness rod // SpringerPlus. – 2014. – 3. – P. 367.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 983 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
6. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – Киев: Наукова думка, 1965. – 716 с.
7. Егорова А.А., Москвитин С.С., Самохина Т.И. и др. Стержни переменных размеров поперечных сечений в методе конечных элементов // Дальний восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. – 2013. – 1. – С. 183–188.
8. Хамилова Л.Г. Спектральная задача для изгибных колебаний стержня переменного сечения в вертикальной плоскости // Изв. Моск. индустр. ун-та. – 2011. – 4 (24). – С. 76–83.
9. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородного стержня // ПММ. – 2003. – 67, № 4. – С. 588–602.
10. Динник А.Н. Избранные труды. Т. 2. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1955. – 223 с.
11. Улитин Г.М., Царенко С.Н. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и рас-

пределенной массой // ПММ. 2015. – 79, № 6. – С. 817–823.

12. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с.

G. M. Ulitin, S. N. Tsarenko

Transverse vibrations of elastic rods of variable section that simulate metal structures.

The problems of bending vibrations of metal structures, which have the form of conical pipes, are considered. For example, free transverse vibrations of the initial displacement of the longitudinal axis of the rod of the load of variable intensity, are considered. Effect of parameter cross-section at the first natural frequency value considering the availability of inertial load is investigated. Expressions in the displacements and bending moments at the base of the rod for dynamic coefficients obtained.

Keywords: *bending vibrations, Fourier method, variable cross-section rods, Bessel functions.*

ГОУ ВПО «ДонНТУ», Донецк
tzarenko@rambler.ru

Получено 17.06.16