УДК 517.5

©2016. **О. И. Кузнецова**

О НОРМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ СУММ БОХНЕРА–РИССА

В работе рассматриваются суммы Бохнера–Рисса $S_R^\alpha(f,x) = \sum_{\|k\|\le R}\left(1-\|k\|^2/R^2\right)^\alpha \hat f(k)e^{ik\cdot x}$, $\alpha>0$, периодической функции f от m переменных и сильные интегральные средние этих сумм $\left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f,x)|^p\,dr\right)/R\right)^{1/p}$ при $p\ge 1$. Установлены верхние оценки роста при $R\to+\infty$ норм соответствующих операторов, т.е. величин $\sup_{|f|\le 1}\left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f,0)|^p\,dr\right)/R\right)^{1/p}$, для $0<\alpha<\frac{m-1}{2}$.

Ключевые слова: *кратные ряды Фурье, суммы Бохнера–Рисса, сильные средние.*

1. Введение. Средние Бохнера–Рисса $S_R^\alpha(f)$ порядка $\alpha>0$ ряда Фурье функции f, суммируемой на кубе $[-\pi,\pi]^m$, имеют вид (всюду далее $k\in\mathbb{Z}^m$)

$$S_R^\alpha(f,x) = \sum_{\|k\|\le R}\left(1-\frac{\|k\|^2}{R^2}\right)^\alpha \hat f(k)e^{ik\cdot x}, \ \text{ где } \hat f(k) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{T^m} f(u)e^{-ik\cdot u}du.$$

При $\alpha=0$ имеем сферические частичные суммы $S_R(f) = \sum_{\|k\|\le R}\hat f(k)e^{ik\cdot x}$. Если $\alpha>\frac{m-1}{2}$, то $S_R^\alpha(f)$ сходятся равномерно к f при $R\to\infty$ для любой непрерывной периодической функции f [1] (см. также [2, гл. VII.4]). $\alpha=\frac{m-1}{2}$ – критический показатель.

Интегральными средними сумм $S_R^\alpha(f)$ назовем величины (далее $p\ge 1$ и $n\in\mathbb{N}$)

$$\mathscr{H}_{R,p}^\alpha(f,x) = \left(\frac{1}{R}\int\limits_0^R |S_r^\alpha(f,x)|^p\,dr\right)^{1/p}.$$

Их поведение при $R\to\infty$ тесно связано с поведением норм

$$\mathscr{H}_{R,p}^\alpha = \sup_{|f|\le 1}\mathscr{H}_{R,p}^\alpha(f,0). \tag{1}$$

В работе [3] установлены неулучшаемые по порядку двусторонние оценки норм $\mathscr{H}_{R,p}$ интегральных средних сферических сумм Фурье

$$\mathscr{H}_{R,p}(f,x) = \left(\frac{1}{R}\int\limits_0^R |S_r(f,x)|^p\,dr\right)^{1/p}.$$

Точнее, доказано, что[1]

$$\mathscr{H}_{R,p} \asymp \begin{cases} R^{\frac{m-1}{2}-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{p}\}} & \text{при} \;\; m \geq 3, \; p \geq 1; \\ R^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \, \min^{\frac{1}{p}}\left\{\ln(R+1), \frac{1}{p-2}\right\} & \text{при} \;\; m = 2, \; p > 2; \\ \sqrt{\ln(R+1)} & \text{при} \;\; m = 2, \; p \in [1,2]. \end{cases} \tag{2}$$

Верхние оценки в данных двусторонних неравенствах были получены ранее в [4].

В [5], ([6] при $p = 2$) при любом $p \geq 1$ доказано неравенство

$$\mathscr{H}_{R,p}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}(f) \leq c(m,p)\|f\|_\infty. \tag{3}$$

Наша цель – оценить сверху нормы соответствующих операторов, т.е. величины (1), при $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$.

2. Основной результат. Получим следующие верхние оценки норм $\mathscr{H}_{R,p}^{\alpha}$, используя оценки (2), (3) и применяя теорему Стейна [2, гл. V] об интерполяции аналитических семейств операторов.

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$. *Тогда*

$$\mathscr{H}_{R,p}^{\alpha} \ll \begin{cases} R^{\frac{m-2}{2}-\alpha\left(\frac{m-2}{m-1}\right)} \ln R & \textit{при} \;\; m \geq 3, \; 1 \leq p \leq 2; \\ (\ln R)^{\frac{1}{2}-\alpha} \ln\ln R & \textit{при} \;\; m = 2, \; 1 \leq p \leq 2; \\ R^{\frac{m-1}{2}-\alpha\left(1-\frac{2}{p(m-1)}\right)-\frac{1}{p}} \ln R & \textit{при} \;\; m \geq 2, \; p > 2. \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *При любых* $\delta > -1/2$, $p \geq 1$ *и* β *таком, что* $0 < Re\beta \leq 1$,

$$\left(\int_0^T \left|S_r^{\delta+\beta}(f)\right|^p dr\right)^{1/p} \leq \frac{c(\delta)\,|\beta|\,e^{\frac{\pi}{2}|Im\beta|}}{Re\beta} \left(\int_0^T \left|S_r^{\delta}(f)\right|^p dr\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Доказательство. При $Re\beta > 0$ и $Re(\delta+1) > 0$ имеет место равенство (см. [2, гл. VII (5.8)])

$$S_R^{\delta+\beta}(f) = c_{\beta\delta} R^{-2\delta-2\beta} \int_0^R (R^2 - r^2)^{\beta-1} r^{2\delta+1} S_r^{\delta}(f) dr,$$

где

$$c_{\beta\delta} = \frac{2\Gamma(\delta+\beta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \quad \textit{при} \quad Re\, z > 0.$$

После замены переменной $r \to r/R$ получаем, что

[1] Мы пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$, если одновременно $\alpha_n = O(\beta_n)$ и $\beta_n = O(\alpha_n)$. Константы в соответствующих неравенствах, справедливых при всех n, могут зависеть лишь от размерности m.

$$|S_R^{\delta+\beta}(f)| \le |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\,\beta-1} r^{2\delta+1} |S_{Rr}^{\delta}(f)| dr.$$

Возведем обе части неравенства в p-тую степень, проинтегрируем по R от нуля до T и применим к правой части обобщенное неравенство Минковского. В итоге при $\delta > -1/2$ будем иметь

$$\left(\int_0^T |S_R^{\delta+\beta}(f)|^p dR \right)^{1/p} \le |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\,\beta-1} r^{2\delta+1} \left(\int_0^T |S_{Rr}^{\delta}(f)|^p dR \right)^{1/p} dr \le$$

$$\le |c_{\beta\delta}| \int_0^1 (1-r)^{Re\,\beta-1}\, r^{2\delta} dr \left(\int_0^T |S_R^{\delta}(f)|^p dR \right)^{1/p}. \qquad (6)$$

Так как $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, то при $0 < Re\beta \le 1$

$$\int_0^1 (1-r)^{Re\,\beta-1} r^{2\delta} dr = \frac{\Gamma(Re\beta)\Gamma(2\delta+1)}{\Gamma(1+Re\beta+2\delta)} \le \frac{c_1(\delta)}{Re\beta}. \qquad (7)$$

Оценим $|c_{\beta\delta}|$. Поскольку (см. [7, гл. VI, § 12])

$$\max_{1\le x\le 2} \frac{1}{|\Gamma(x+iy)|} \le a e^{\frac{\pi}{2}|y|},$$

где a не зависит от y, то

$$|c_{\beta\delta}| \le \frac{2\Gamma(\delta+Re\beta+1)\,|\beta|}{\Gamma(\delta+1)|\Gamma(\beta+1)|} \le c_2(\delta)\,|\beta|\, e^{\frac{\pi}{2}|\beta|}. \qquad (8)$$

Объединяя (6), (7) и (8), получаем неравенство (5). □

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай $m \ge 3$. Пусть q – показатель сопряженный с p, $\gamma > 0$. Зафиксируем функцию $g \in L_q(0,R)$ с $\|g\|_q \le 1$. При каждом z, принадлежащем вертикальной полосе

$$S = \{z \in C \,:\, \gamma \le Re\, z \le \frac{m-1}{2} + \gamma\},$$

рассмотрим линейный оператор

$$T_z : f \to \int_0^R g(r) S_r^z(f) dr,$$

заданный на пространстве $L_\infty(T_m)$. Функция $T_z f$ аналитична по переменной z и имеет по ней, согласно лемме, допустимый рост на S (см. также [2, гл. V, теорема 4.1]). Кроме того,

$$\|T_z f\|_\infty \le \left\| \left(\int_0^R |S_r^z(f)|^p \right)^{1/p} \right\|_\infty .$$

Согласно оценкам (5) и (2) ($\delta = 0$; $\beta = \gamma + iy$)

$$\|T_{\gamma+iy}\|_\infty \le c(m)\frac{\sqrt{\gamma^2+y^2}}{\gamma}e^{\frac{\pi}{2}|y|}R^{\frac{m-1}{2}-\min(\frac12,\frac1p)+\frac1p}\,\|f\|_\infty\,. \tag{9}$$

Из (5) и (3) ($\delta = \frac{m-1}{2}$ и $\beta = \gamma + iy$) следует, что

$$\left\|T_{\frac{m-1}{2}+\gamma+iy}\right\|_\infty \le c(m,p)\frac{\sqrt{\gamma^2+y^2}}{\gamma}e^{\frac{\pi}{2}|y|}R^{\frac1p}\,\|f\|_\infty\,. \tag{10}$$

Обозначим через $M_0(y) = M_0(m,\gamma,y,p)$ и $M_1(y) = M_1(m,\gamma,y,p)$ множители, стоящие перед $\|f\|_\infty$ в правых частях (9) и (10). Заметим, что $M_j(y)$, $j = 0,\ 1$, не зависят от f и g и удовлетворяют оценке

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-b|y|}\log M_j(y) < \infty$$

при любом $0 < b < \pi$.

Положим $\alpha = \gamma(1-t) + (\frac{m-1}{2}+\gamma)\,t = \gamma + \frac{m-1}{2}\,t$, $0 \le t \le 1$. По теореме Стейна существует постоянная M_t такая, что

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le M_t\,\|f\|_\infty\,,$$

где $t = \frac{2(\alpha-\gamma)}{m-1}$, а M_t определяется равенством

$$M_t = \exp\left\{\frac12\sin\pi t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log M_0(y)}{ch\pi y-\cos\pi t}+\frac{\log M_1(y)}{ch\pi y+\cos\pi t}\right\}dy\right\}.$$

Проинтегрируем данное равенство, учитывая, что ([2], гл. V. 4)

$$\frac12\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\operatorname{ch}\pi y-\cos\pi t}dy = 1-t,\quad \frac12\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\operatorname{ch}\pi y+\cos\pi t}dy = t.$$

Будем иметь

$$M_t \le \frac{c(m,p,\alpha)}{\gamma}R^{\left\{\frac{m-1}{2}-\min(\frac12,\frac1p)+\frac1p\right\}(1-t)+\frac{t}{p}}.$$

Тогда при $0 < \alpha < \frac{m-1}{2}$ получаем, что

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le \frac{c(m,p,\alpha)}{\gamma}\begin{cases} R^{\frac{m-2}{2}+\frac1p-(\alpha-\gamma)\frac{m-2}{m-1}}\,\|f\|_\infty\,, & \text{при}\quad 1\le\ p\le\ 2;\\ R^{\frac{m-1}{2}-(\alpha-\gamma)(1-\frac{2}{p(m-1)})}\,\|f\|_\infty\,, & \text{при}\quad p>2.\end{cases}$$

Минимизируем данную оценку по γ. Тогда

$$\|T_\alpha f\|_\infty \le c_1(m,p,\alpha)\begin{cases} R^{\frac{m-2}{2}-\alpha\frac{m-2}{m-1}+\frac1p}\ln R\,\|f\|_\infty\,, & 1\le\ p\le\ 2;\\ R^{\frac{m-1}{2}-\alpha(1-\frac{2}{p(m-1)})}\ln R\,\|f\|_\infty\,, & p>2.\end{cases}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от функции g, беря $\sup_{\|g\|_q \le 1} \|T_\alpha f\|_\infty$, получаем оценку (4) для $m \ge 3$. Доказательство оценки (4) для $m = 2$ аналогично. Теорема доказана. $\square$

1. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **40:2** – P. 175–207.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
3. *Кузнецова О.И., Подкорытов А.Н.* О нормах интегральных средних сферических сумм Фурье // Мат. Заметки. – 2014. – **96:5**. – С. 701–708.
4. *Кузнецова О.И.* Сильные сферические средние кратных рядов Фурье // Изв. НАН Армении, Математика. – 2009. – **44:4**. – С. 27–40.
5. *Wang Kunyang, Gavin Brown.* Approximation by Bochner–Riesz means and Hardy summability // J. Beijing Normal Univ. (Natural Science). – 1994. – **30:2** – P. 163–169.
6. *Wang Kunyang.* Strong uniform approximation by Bochner–Riesz means. Multivariate approximation IV // Proceedings of conference of multivariate approximation theory. – Oberwolfach. West Germany, 1989. – P. 337–342.
7. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 618 с.

O. I. Kuznetsova

On the norms of the integral means of Bochner–Riesz sums.

The paper deals with the Bochner–Riesz sums $S_R^\alpha(f,x) = \sum_{\|k\| \le R} \left(1 - \|k\|^2/R^2\right)^\alpha \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$, $\alpha > 0$, of a periodic function f in m variables and the strong integral averages of these sums $\left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f,x)|^p \, dr\right)/R\right)^{1/p}$ for $p \ge 1$. We establish upper estimates for growth as $R \to +\infty$ of the norms of corresponding operators, i. e., of the quantities $\sup_{|f| \le 1} \left(\left(\int_0^R |S_r^\alpha(f,0)|^p \, dr\right)/R\right)^{1/p}$, for $0 < \alpha < (m-1)/2$.

Keywords: *multiple Fourier series, Bochner–Riesz sums, strong averages.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
kuznets@iamm.su

Получено 12.06.16