

УДК 531.36, 531.31

©2016. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

## ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

В основу исследования положена двухтоковая модель синхронного электромотора. Предполагается, что момент нагрузки является линейным диссипативным. Получено эффективное достаточное условие, при котором любое движение синхронного электромотора с течением времени стремится к стационарному вращению.

**Ключевые слова:** синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

**Введение.** В зависимости от конструкции динамика синхронного электромотора описывается различными системами дифференциальных уравнений высокого порядка, которые определяют изменение электрических токов в обмотках ротора и изменение переменной  $\gamma$  – угла рассогласования между вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора. Такие системы уравнений периодичны по переменной  $\gamma$ , в связи с чем они имеют счетный набор стационарных решений, соответствующих рабочему режиму равномерного вращения ротора с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре.

Практически важной задачей является установление достаточных условий, при которых любое решение системы дифференциальных уравнений движения синхронного электромотора с течением времени стремится к одному из стационарных решений. Если при этом на периоде изменения угла  $\gamma$  существует только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение, то систему называют глобально устойчивой. В [1, 2] для широкого класса синхронных машин предложен подход, названный методом сведения и позволяющий вывести свойство глобальной устойчивости многомерной системы из свойства глобальной устойчивости для одного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Для этого уравнения условие глобальной устойчивости найдено Ф. Трикоми [3]. Получаемые таким путем критерии глобальной устойчивости электромотора включают неопределенные математические параметры и требуют также проверки свойства дихотомичности и частотных неравенств.

В настоящей работе принята двухтоковая модель синхронного электромотора [4]. Вместо часто используемого предположения о постоянстве момента нагрузки этот момент считается диссипативным, линейным по отношению к угловой скорости вращения ротора. Получено достаточное условие глобальной устойчивости двухтоковой модели, которое не требует проверки свойства дихотомичности и частотных неравенств, а сводится только к условию Трикоми для дифференциального уравнения второго порядка, которое не содержит неопределенных параметров.

**1. Двухтоковая модель синхронного электромотора.** В данной работе принята упрощенная *двухтоковая модель* синхронного электромотора, когда в роторе имеются две одинаковые перпендикулярные друг другу обмотки, имеющие вид прямоугольных рамок. Эта модель дана в [4] и приведена в [5]. Она описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M, \\ Li_1\dot{} &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma + u, \\ Li_2\dot{} &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dot{i}_1, \dot{i}_2$  – производные компонент фазового вектора  $(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2)$  по времени  $t$ ,

$\gamma = \varphi - \omega t$  – угол рассогласования между векторами магнитных полей статора и ротора,

$\varphi$  – угол поворота ротора относительно статора,

$\omega$  – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре ( $\omega > 0$ ),

$i_1, i_2$  – токи в обмотке возбуждения и в демпферной обмотке,

$u > 0$  – постоянное напряжение в обмотке возбуждения,

$M$  – момент сил сопротивления относительно оси ротора (момент нагрузки),

$C$  – осевой момент инерции ротора,

$L$  и  $R$  – индуктивность и сопротивление обеих рамок,

$B$  – напряженность магнитного поля в статоре,

$S$  – площадь каждой из рамок,

$\beta > 0$  – коэффициент пропорциональности.

В [1, 2] момент нагрузки предполагается отрицательной постоянной величиной, и с учетом этого в (1) вместо  $M$  сразу берется  $-M$ , где  $M > 0$  – постоянная. На практике этот момент можно считать постоянным только в отдельных случаях, например, при работе подъемного крана, но чаще он зависит от угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ . В данной работе рассматривается случай линейного диссипативного момента  $M = -k\dot{\varphi}$ ,  $k > 0$  – постоянная. Поскольку  $\dot{\varphi} = \dot{\gamma} + \omega$ , получаем для этого момента выражение

$$M = -k\dot{\gamma} - k\omega, \quad (2)$$

которое содержит постоянный отрицательный член  $-k\omega$ .

**2. Простейшая модель синхронного электромотора.** В литературе часто используется *простейшая модель* синхронного электромотора, которая формально получается из уравнений (1) в предположении  $L = 0$ . С учетом (2) она описывается дифференциальным уравнением

$$C\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (3)$$

где

$$a_0 = k + \frac{\beta S^2 B^2}{R}, \quad b_0 = \beta \frac{SBu}{R}, \quad c_0 = k\omega. \quad (4)$$

Простейшую модель синхронного электромотора, которая получается указанным способом и описывается уравнением (3) с коэффициентами (4), будем называть *собственной* по отношению к исходной модели (1). В литературе используются простейшие модели синхронного электромотора, которые определяются техникой доказательства тех или иных результатов и также описываются уравнением вида (3), но отличаются от собственной модели значениями коэффициента  $a_0$ . Такие несобственные модели используются ниже в п. 5 и далее.

Уравнение вида (3) с положительными коэффициентами  $a_0, b_0, c_0$  детально изучено [1, 3, 6]. Приведем основные результаты исследования такого уравнения.

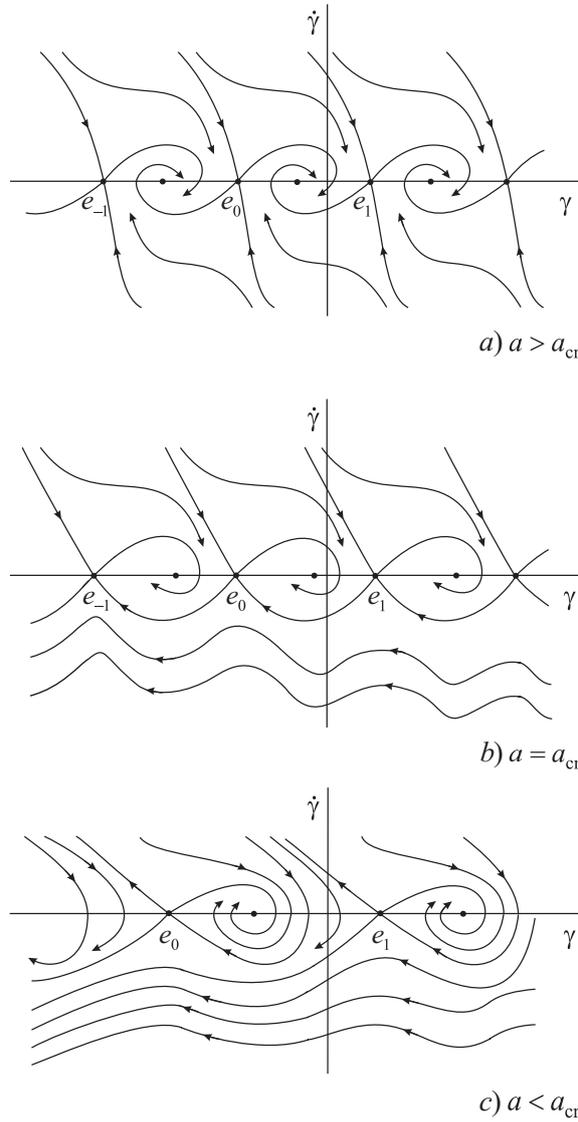


Рис. 1. Фазовые портреты простейшей модели синхронного электромотора

Режимы равномерного вращения ротора с угловой скоростью  $\dot{\varphi} = \omega$  соответствуют стационарным решениям  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$ ,  $\gamma^0 = \text{const}$ , уравнения (3). Они определяются тригонометрическим уравнением

$$b_0 \sin \gamma^0 = -c_0 \quad (5)$$

и существуют при  $c_0/b_0 \leq 1$ . Опуская особый случай, когда  $c_0/b_0 = 1$ , будем всюду далее предполагать, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) имеет два счетных семейства стационарных решений при значениях  $\gamma^0$ , равных

$$d_n = \gamma^{(0)} + 2\pi n, \quad e_n = \gamma^{(1)} + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7)$$

Здесь

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (8)$$

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_n, 0)$  являются для уравнения (3) асимптотически устойчивыми особыми точками типа "фокус" или "узел", а точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_n, 0)$  – это неустойчивые особые точки типа "седло".

Глобальный анализ уравнения (3), проведенный Ф. Трикоми [3], показывает, что оно может иметь три качественно различных типа фазовых портретов, изображенных на рис. 1. Введя безразмерные параметры

$$a = a_0/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0, \quad (9)$$

Ф. Трикоми установил, что существует критическое значение параметра  $a$ , которое является непрерывной функцией  $a_{\text{cr}}(c)$  параметра  $c \in (0, 1)$  и обладает следующими свойствами (см. [6]).

- В случае  $a > a_{\text{cr}}$  каждое решение уравнения (3) стремится к одной из его стационарных точек при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 1, *a*).

- При  $a \leq a_{\text{cr}}$  кроме решений, стремящихся к стационарным точкам, существуют решения, вдоль которых угол  $\gamma$  неограниченно убывает с течением времени. Поэтому при  $a \leq a_{\text{cr}}$  множество стационарных точек уравнения электромотора уже не является глобально притягивающим (рис. 1, *б, в*). При  $a = a_{\text{cr}}$  существуют сепаратрисы, соединяющие соседние седловые точки.

Для функции  $a_{\text{cr}}(c)$  не существует явного выражения, но разными авторами получены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [6, с. 122-123]). При выводе этих оценок вместо угла  $\gamma$  используют угол  $\theta = -\gamma$  и, вводя независимую переменную  $\tau = t\sqrt{b_0/C}$ , приводят уравнение (3) к виду  $d^2\theta/d\tau^2 = -a d\theta/d\tau - \sin \theta + c$  с двумя параметрами (9). Тогда указанному в (8) главному стационарному значению  $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$  угла  $\gamma$  соответствует значение  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$  угла  $\theta$ . Так как

$\theta_0 = \arcsin c$ , то  $c = \sin \theta_0$ , и величину  $a_{cr}(c)$  можно рассматривать как функцию  $a_{cr}(\theta_0)$  угла  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ . В [7] путем вычислений на компьютере построен график функции  $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$  и показано, что линейная и синусоидальная аппроксимации  $a_{crL} = 0.76 \cdot \theta_0$  и  $a_{crS} = 2.766222 \cdot \sin(0.2838860 \cdot \theta_0)$  обеспечивают вычисление  $a_{cr}(\theta_0)$  с абсолютной погрешностью не больше, чем  $1.5 \cdot 10^{-2}$  и  $3.4 \cdot 10^{-5}$  соответственно.

**3. Энергетические соотношения и устойчивость стационарных режимов.** Нормальным режимом работы синхронного электромотора является равномерное вращение его ротора относительно статора с постоянной угловой скоростью  $\dot{\varphi} = \omega$ , равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Этот режим соответствует стационарному решению системы (1), то есть решению вида

$$\gamma = \gamma^0, \quad \dot{\gamma} = 0 \quad i_1 = i_1^0, \quad i_2 = i_2^0 \quad (\gamma^0, i_1^0, i_2^0 = \text{const}). \quad (10)$$

Чтобы найти условия существования такого решения и определить постоянные  $\gamma^0, i_1^0, i_2^0$ , подставим выражения (10) в систему уравнений (1), где момент  $M$  выражается по формуле (2). Тогда последние два уравнения этой системы дадут стационарные значения токов

$$i_1^0 = u/R, \quad i_2^0 = 0, \quad (11)$$

а первое сведется к уравнению (5) для  $\gamma^0$ . В предположении (6) оно имеет два счетных набора решений, которые соответствуют указанным в (7), (8) значениям  $\gamma^0$ . Таким образом, система (1) имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2) = (d_n, 0, u/R, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2) = (e_n, 0, u/R, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (13)$$

где  $d_n, e_n$  определены формулами (7), (8).

Во всех стационарных режимах (12), (13), равномерного вращения ротора синхронного электромотора токи  $i_1, i_2$  принимают одни и те же значения (11). Введем возмущения  $j_1, j_2$  токов  $i_1, i_2$  по формулам

$$i_1 = j_1 + u/R, \quad i_2 = j_2.$$

Подставим эти выражения в систему уравнений (1), в которой момент  $M$  определен формулой (2). В результате уравнения двухтоковой модели записываются в виде преобразованной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -\beta SB(j_1 \sin \gamma + j_2 \cos \gamma) - k\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ Lj_1' &= -Rj_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Lj_2' &= -Rj_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma \end{aligned} \quad (14)$$

с фазовым вектором  $(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2)$ . Она имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = (d_n, 0, 0, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = (e_n, 0, 0, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

где  $d_n, e_n$  определены формулами (7), (8).

Рассмотрим следующие три функции фазовых переменных системы (14)

$$\begin{aligned} W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) &= \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\beta L(j_1^2 + j_2^2), \\ U(\gamma) &= \int_0^\gamma (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma, \\ V(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) &= W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + U(\gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

Производная функции  $W$  по времени в силу системы уравнений (14) равна

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2) - \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0). \quad (18)$$

С учетом этого имеем

$$\dot{V}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2). \quad (19)$$

Функция  $W$  определено положительно по отношению к переменным  $\dot{\gamma}, j_1, j_2$ . Ее можно интерпретировать как кинетическую энергию изучаемой системы, а функцию  $U$  – как ее потенциальную энергию. Тогда функция  $V$  является полной энергией системы, а формула (19) выражает теорему об изменении энергии.

При условии (6) значения  $d_n, e_n$ , определенные формулами (7), (8), являются, соответственно, точками локальных минимумов и максимумов функции  $U(\gamma)$ . Воспользовавшись в теоремах 5.2 и 6.3 из [8] функциями Ляпунова  $V_{1n} = V - U(d_n)$  и  $V_{2n} = V - U(e_n)$ , приходим, с учетом (19), к следующему выводу.

**Теорема 1.** *Стационарные решения (15) системы (14) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (16) – неустойчивы.*

**4. О принципе инвариантности Ла–Салля.** Цель данной работы состоит в том, чтобы вывести достаточное условие, при котором любое решение системы уравнений (14) с течением времени стремится к одному из ее стационарных решений (15), (16). Существование функции  $V$  со знакопостоянной отрицательной производной (19) указывает на потенциальную возможность использовать для этой цели принцип инвариантности Ла–Салля. Рассмотрим вопрос о том, какие вспомогательные результаты для этого нужны. Воспользуемся формулировкой принципа Ла–Салля в виде теоремы VIII из книги [9].

**Теорема 2** (Ла–Салль). *Пусть задана автономная система*

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0. \quad (20)$$

*Пусть  $V(x)$  – скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех  $x$ . Предположим, что выполнены следующие условия:*

- а)  $V(x) > 0$  при всех  $x \neq 0$ ;
- б)  $\dot{V}(x) \leq 0$  во всем пространстве.

Обозначим через  $M_0$  множество всех точек пространства, в которых  $\dot{V}(x) = 0$ , а через  $M$  – максимальное положительно инвариантное множество, содержащееся в  $M_0$ .

Тогда каждое решение системы (20), остающееся ограниченным при  $t \geq 0$ , неограниченно приближается к  $M$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Сделаем два комментария по поводу этой формулировки.

Во-первых, условие  $X(0) = 0$  является излишним, так как точка  $x = 0$  ничем не выделяется среди других возможных положений равновесия рассматриваемой системы.

Во-вторых, по этой же причине, вместо условия а)  $V(x) > 0 (x \neq 0)$  достаточно предположить, что функция  $V(x)$  ограничена снизу при всех  $x$ . Тогда, вычитая из этой функции нижнюю грань ее значений, получим функцию, удовлетворяющую неравенству  $V(x) \geq 0$  при всех  $x$ .

Для рассматриваемой в данной работе задачи "кандидатом" на роль функции Ляпунова в теореме Ла–Салля выступает функция  $V$ , указанная в (17). Однако она не является ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция  $U$ , которая, согласно (17), содержит линейный по  $\gamma$  член  $c_0\gamma$ . Поэтому для исследования нелокальной динамики синхронного электромотора нельзя непосредственно применить принцип Ла–Салля с функцией Ляпунова  $V$  вида (17). Такая трудность, связанная с неограниченностью функции Ляпунова по угловой переменной, является характерной в теории фазовых систем [2, 4].

Чтобы преодолеть ее, заметим, что в доказательстве принципа Ла–Салля используется ограниченность функции  $V$  не во всем фазовом пространстве, а только на решениях изучаемой системы. Поэтому для применимости в рассматриваемом случае функции  $V$  вида (17) достаточно, чтобы угол  $\gamma$  был ограничен снизу на всех решениях системы (14).

Таким образом, для того, чтобы найти условия глобального притяжения стационарных решений системы (14) при помощи принципа Ла–Салля, достаточно получить следующие результаты:

- 1) вывести условия ограниченности угла  $\gamma$  снизу на решениях системы (14);
- 2) установить ограниченность всех фазовых переменных  $\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2$  на решениях этой системы;
- 3) доказать, что притягивающее множество  $M$  точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий решений, определенных на полуоси  $t \geq 0$  и удовлетворяющих условию  $\dot{V} = 0$ , совпадает с множеством стационарных точек системы (14), причем расстояния между любыми двумя стационарными точками ограничены снизу положительной постоянной.

**5. Условия ограниченности угла  $\gamma$ .** Для получения условий ограниченности угла  $\gamma$  воспользуемся подходом, изложенным в п. 4.4.2 [2].

**Теорема 3.** *Если существуют значения постоянных параметров  $\lambda, \varepsilon \geq 0$  такие, что*

1) любое решение дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (21)$$

где  $b_0, c_0$  определены в (4), ограничено при  $t \geq 0$ ,

2) при всех значениях фазовых переменных  $\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2$  выполнено неравенство

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) + 2\lambda W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) \leq 0, \quad (22)$$

то в любом решении

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), j_1(t), j_2(t) \quad (23)$$

системы (14) функция  $\gamma(t)$  ограничена на полуоси  $t \geq 0$ .

*Доказательство.*

1. *Определение и свойства функций  $F_n(\gamma)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).* Согласно изложенным в п. 2 результатам Ф. Трикоми, предположение 1) теоремы 2 означает, что для уравнения (21) имеет место случай  $a > a_{\text{cr}}$  (рис. 1,  $a$ ). Он характерен тем, что через каждую седловую точку  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_n, 0)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) этого уравнения проходит интегральная кривая  $\dot{\gamma} = F_n(\gamma)$ , которая не имеет других точек пересечения с осью абсцисс, кроме данной седловой точки, и уходит на плюс или минус бесконечность при стремлении  $\gamma$  к минус или плюс бесконечности:

$$F_n(\gamma) \rightarrow \pm\infty \quad (\gamma \rightarrow \mp\infty). \quad (24)$$

Вследствие  $2\pi$ -периодичности уравнения (21) по  $\gamma$  график функции  $F_n(\gamma)$  получается из графика функции  $F_0(\gamma)$  параллельным сдвигом на  $2\pi n$  вдоль оси абсцисс. Поэтому при любом  $\gamma$  выполняются соотношения

$$F_n(\gamma + 2\pi n) = F_0(\gamma) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Полагая здесь  $\sigma = \gamma + 2\pi n$ , приходим к равенству  $F_n(\sigma) = F_0(\sigma - 2\pi n)$ . Заменив в нем букву  $\sigma$  буквой  $\gamma$ , получаем

$$F_n(\gamma) = F_0(\gamma - 2\pi n) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (25)$$

Согласно определению функций  $F_n(\gamma)$ , они являются решениями уравнения

$$C\dot{\gamma} \frac{d\dot{\gamma}}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0$$

интегральных кривых  $\dot{\gamma}(\gamma)$  уравнения (21), то есть они обращают уравнение интегральных кривых в тождество по  $\gamma$ :

$$CF_n(\gamma) \frac{dF_n(\gamma)}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n(\gamma) - b_0 \sin \gamma - c_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26)$$

Подставив сюда вместо  $\gamma$  функцию  $\gamma(t)$  из решения (23) системы (14), получим тождество по  $t$ .

2. Функции  $V_n$  и неравенство  $\dot{V}_n + 2\lambda V_n \leq 0$ . Рассмотрим набор функций

$$V_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = W(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) - \frac{1}{2}CF_n^2(\gamma) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (27)$$

Покажем, что во всем фазовом пространстве для любого номера  $n$  выполняется неравенство

$$\dot{V}_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) + 2\lambda V_n(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq 0, \quad (28)$$

где  $\dot{V}_n$  – производная функции  $V_n$  по  $t$  в силу системы (14).

Обозначая штрихом дифференцирование по  $\gamma$  и пользуясь формулой (26), получаем из (27) следующее выражение для этой производной

$$\dot{V}_n = \dot{W} - \dot{\gamma}CF_nF'_n = \dot{W} + \dot{\gamma}(2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n + b_0 \sin \gamma + c_0).$$

Поэтому с учетом (27) имеем

$$\dot{V}_n + 2\lambda V_n = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n - \lambda CF_n^2. \quad (29)$$

Так как  $\lambda, \varepsilon \geq 0$ , то

$$\varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n + \lambda CF_n^2 = C^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\dot{\gamma} - \sqrt{\lambda}CF_n)^2 \geq 0,$$

и поэтому

$$2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_n - \lambda CF_n^2 \leq \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) и (22) следует, что

$$\dot{V}_n + 2\lambda V_n = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 \leq 0.$$

Неравенство (28) доказано.

3. *Ограниченность переменной  $\gamma$  снизу.* Докажем, что при условиях теоремы 2 в любом решении системы (14) функция  $\gamma(t)$  ограничена снизу при  $t \geq 0$ . Допустим, что эта система имеет решение (23), в котором функция  $\gamma(t)$  неограничена снизу на полуоси  $t \geq 0$ . Так как  $\gamma$  – угловая переменная, без ограничения общности будем предполагать, что начальное значение  $\gamma_0 = \gamma(0)$  принадлежит промежутку  $(e_0, e_1]$  длины  $2\pi$ . Тогда в рассматриваемом решении непрерывная функция  $\gamma(t)$  при  $t \geq 0$  принимает все значения  $e_n$  с номерами  $n \leq 0$ . Для каждого номера  $n \leq 0$  обозначим через  $t_n$  момент времени, когда функция  $\gamma(t)$  в первый раз принимает значение  $e_n$ . Функция  $F_n(\gamma(t))$  в этот момент времени обращается в ноль:

$$F_n(\gamma(t_n)) = F_n(e_n) = 0 \quad (n = 0, -1, -2, \dots). \quad (31)$$

В начальный момент  $t = 0$  функция  $F_n(\gamma(t))$  принимает значение  $F_n(\gamma_0)$ . Из формулы (25), получаем равенство  $F_n(\gamma_0) = F_0(\gamma_0 - 2\pi n)$ . Его правая часть, согласно (24), стремится к  $-\infty$  при  $\gamma_0 - 2\pi n \rightarrow +\infty$ , то есть при  $n \rightarrow -\infty$ . Таким образом,

$$F_n(\gamma_0) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow -\infty). \quad (32)$$

Рассмотрим формулы (27), (28) на выбранном решении с неограниченной снизу функцией  $\gamma(t)$ . Воспользовавшись свойством (32), выберем номер  $n = n_0 \leq 0$  так, чтобы правая часть формулы (27) оказалась отрицательной при  $t = 0$ , то есть чтобы для функции  $V_{n_0}(t)$  выполнялось неравенство  $V_{n_0}(0) < 0$ . Тогда из неравенства (28):  $V_{n_0}(t) + 2\lambda V_{n_0}(t) \leq 0$ , согласно лемме 4.3.1 из [2] следует, что

$$V_{n_0}(t) < 0, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

С другой стороны, полагая  $n = n_0$  в (31), имеем  $F_{n_0}(\gamma(t_{n_0})) = F_{n_0}(e_{n_0}) = 0$ . Отсюда с учетом определения (27) функций  $V_n$  следует, что  $V_{n_0}(t_{n_0}) = W_{n_0}(t_{n_0})$ . Но функция  $W$  неотрицательна согласно ее определению (17). Поэтому справедливо неравенство  $V_{n_0}(t_{n_0}) \geq 0$ , которое противоречит (33). Полученное противоречие означает, что допущение о неограниченности функции  $\gamma(t)$  снизу неверно.

4. *Ограниченность переменной  $\gamma$  сверху.* Чтобы доказать ограниченность функции  $\gamma(t)$  сверху в любом решении системы (14), допустим противное, то есть что у этой системы существует решение с функцией  $\gamma(t)$ , неограниченной сверху при  $t \geq 0$ . Далее по той же схеме, что и выше, устанавливаем, что при условиях теоремы 2 это допущение приводит к противоречию.  $\square$

**6. Область изменения математических параметров в теореме об ограниченности угла  $\gamma$ .** В этом и следующем пункте рассмотрен вопрос о существовании значений параметров  $\lambda, \varepsilon$ , при которых выполняются условия 1, 2 теоремы 3. В п. 6 построена область изменения параметров  $\lambda, \varepsilon$ , в которой гарантируется выполнение условия 2. В п. 7 в указанной области однозначно выбраны значения этих параметров, при которых легче всего удовлетворить условию 1.

Условием 2 теоремы 3 является неравенство (22). После подстановки в него выражений (17), (18) функций  $W, \dot{W}$  оно принимает вид

$$(-k + \lambda C + \varepsilon C^{-1})\dot{\gamma}^2 + \beta(-R + \lambda L)(j_1^2 + j_2^2) \leq 0.$$

Для его выполнения при всех  $\dot{\gamma}, j_1, j_2$  необходимо и достаточно, чтобы параметры  $\lambda, \varepsilon$  удовлетворяли двум неравенствам

$$-k + \lambda C + \varepsilon C^{-1} \leq 0, \quad -R + \lambda L \leq 0. \quad (34)$$

Второе из них дает для  $\lambda$  ограничение  $\lambda \leq R/L$ . При каждом значении  $\lambda$ , удовлетворяющем этому ограничению, первое неравенство (34) определяет верхнюю границу  $\varepsilon \leq kC - \lambda C^2$  для  $\varepsilon$ . Так как допустимы только неотрицательные значения  $\varepsilon \geq 0$ , эта граница должна быть неотрицательной, то есть  $k - \lambda C \geq 0$ . Отсюда следует второе ограничение на  $\lambda$ :  $\lambda \leq k/C$ . Итак, множество  $D$  значений  $\lambda, \varepsilon \geq 0$ , удовлетворяющих второму условию теоремы 3, определено неравенствами

$$0 \leq \lambda \leq \min(R/L, k/C), \quad 0 \leq \varepsilon \leq kC - \lambda C^2. \quad (35)$$

Изобразим множество  $D$  на плоскости  $(\lambda, \varepsilon)$ . С учетом правого неравенства во втором условии (35) ему принадлежат точки первого квадранта этой плоскости,

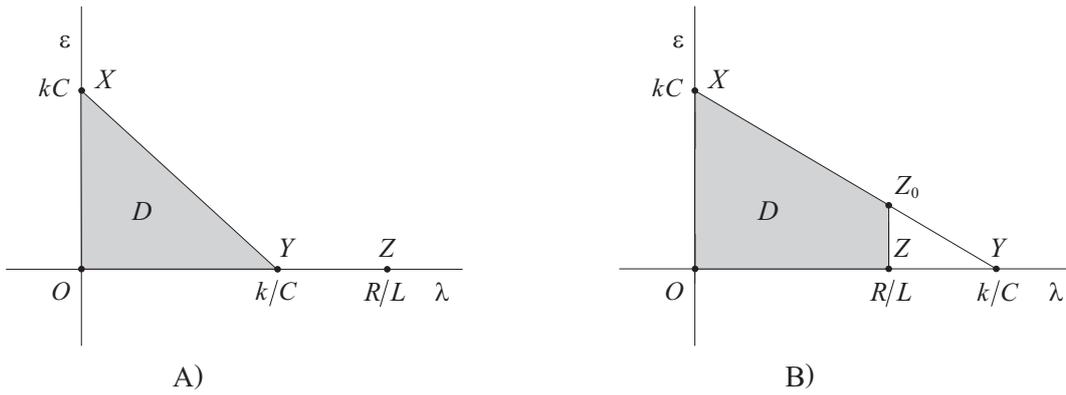


Рис. 2. Область  $D$  допустимых значений параметров  $\lambda, \varepsilon$  в случаях А)  $R/L \geq k/C$ , В)  $R/L < k/C$

лежащие на прямой  $\varepsilon = kC - \lambda C^2$  и ниже ее. Данная прямая пересекает координатные оси  $O\varepsilon$  и  $O\lambda$  в точках  $X = (0, kC)$  и  $Y = (k/C, 0)$ . Возможны два случая.

*Случай А:*  $R/L \geq k/C$ . В этом случае, согласно первому условию (35), параметр  $\lambda$  изменяется в диапазоне  $0 \leq \lambda \leq k/C$ . Под соответствующим отрезком  $XY$  прямой  $\varepsilon = kC - \lambda C^2$  лежат точки первого квадранта, образующие треугольник  $OXY$  (рис. 2, А), который и является допустимым множеством  $D$  в данном случае.

*Случай В:*  $R/L < k/C$ . В этом случае, согласно первому условию (35), параметр  $\lambda$  изменяется в диапазоне  $0 \leq \lambda \leq R/L$ . Таким образом, данное условие определяет на плоскости  $(\lambda, \varepsilon)$  полосу между двумя вертикальными прямыми, проходящими через точки  $O = (0, 0)$  и  $Z = (R/L, 0)$  на оси абсцисс. Прямая  $\varepsilon = kC - \lambda C^2$  пересекает вторую из этих вертикальных прямых в точке  $Z_0 = (R/L, kC - RC^2/L)$ , расположенной выше оси абсцисс. Под отрезком  $XZ_0$  этой прямой лежат точки первого квадранта, образующие трапецию  $OXYZ_0Z$ . Следовательно, в случае В множество  $D$  представляет собой трапецию  $OXZ_0Z$ , включая ее стороны (рис. 2, В).

В результате приходим к такому выводу.

**Лемма 1.** *Множество  $D$  значений  $\lambda, \varepsilon \geq 0$ , удовлетворяющих второму условию теоремы 3, определено неравенствами (35). В случае А, когда  $R/L \geq k/C$ , множество  $D$  изображается на плоскости  $(\lambda, \varepsilon)$  треугольником  $OXY$  (рис. 2, А), включая его стороны. В случае В, когда  $R/L < k/C$ , множество  $D$  изображается на плоскости  $(\lambda, \varepsilon)$  в виде трапеции  $OXZ_0Z$  (рис. 2, В), включая ее стороны.*

Лемма 1 позволяет упростить формулировку теоремы 3, заменив в ней предположение о существовании значений параметров  $\lambda, \varepsilon$ , обеспечивающих выполнение условия 2 этой теоремы, конкретным указанием области изменения этих параметров, в которой гарантировано выполнение данного условия. Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть в замкнутой области  $D$  изменения параметров  $\lambda, \varepsilon$ , определенной неравенствами (34) и неравенствами  $\lambda, \varepsilon \geq 0$ , выбраны некоторые значения этих параметров, и пусть при этих значениях все решения дифференци-*

ального уравнения (21) ограничены на полуоси  $t \geq 0$ .

Тогда в любом решении (23) системы (14) функция  $\gamma(t)$  ограничена при  $t \geq 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При постоянном моменте нагрузки  $M$ , кроме нулевых, не существуют значения  $\lambda, \varepsilon \geq 0$ , для которых выполняется условие 2 теоремы 3.

Это следует из того, что при постоянном  $M$  данное условие эквивалентно двум неравенствам  $\lambda C + \varepsilon C^{-1} \leq 0$ ,  $-R + \lambda L \leq 0$ , которые получаются из (34) при  $k = 0$ . Первому из них не удовлетворяют никакие положительные значения  $\lambda, \varepsilon$ .

**7. Выбор параметров в теореме об ограниченности угла  $\gamma$ .** Уравнение сравнения (21) отличается от уравнения (3) тем, что в нем в качестве коэффициента демпфирования вместо  $a_0$  выступает величина

$$d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}. \quad (36)$$

Поэтому определение (9) параметров Трикоми для уравнения (21) принимает вид

$$a = d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0.$$

Согласно изложенным в п. 2 результатам, условие ограниченности решений уравнения (21) в теоремах 3, 4 означает, что для этого уравнения имеет место случай  $a > a_{\text{cr}}(c)$  (рис. 1,  $a$ ), то есть выполнено неравенство

$$d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c).$$

Этому неравенству тем легче удовлетворить, чем больше величина  $d(\lambda, \varepsilon)$ . Поэтому наилучшим является такой выбор математических параметров  $\lambda, \varepsilon$ , при котором величина  $d(\lambda, \varepsilon)$  принимает свое максимальное значение  $d_{\text{max}}$  в области  $D$  изменения этих параметров. Найдем значение  $d_{\text{max}}$ .

Вдоль любого луча  $\varepsilon = K\lambda$  ( $\lambda \in [0, +\infty)$ ,  $K = \text{const} > 0$ ), идущего на плоскости  $(\lambda, \varepsilon)$  из начала координат в первый квадрант, функция  $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$  строго монотонно возрастает. Поэтому свое максимальное значение  $d_{\text{max}}$  в области  $D$  функция (36) принимает на "северо-восточной" границе этой области, то есть на отрезке  $XU$  в случае А и на ломаной  $XZ_0Z$  в случае В (рис. 2). Но в случае В функция  $d(\lambda, \varepsilon)$  на вертикальном отрезке  $ZZ_0$  становится монотонно возрастающей функцией  $d(R/L, \varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon R/L}$  одной переменной  $\varepsilon$ . Поэтому в случае В функция  $d(\lambda, \varepsilon)$  не может достигать своего максимума  $d_{\text{max}}$  внутри отрезка  $ZZ_0$ . Следовательно, в обоих случаях А и В максимум функции  $d(\lambda, \varepsilon)$  в допустимой области  $D$  достигается на прямой  $\varepsilon = kC - \lambda C^2$ , а точнее, на отрезке  $XU$  этой прямой в случае А и на отрезке  $XZ_0$  в случае В.

На отрезке  $XU$  функция  $d(\lambda, \varepsilon)$  становится функцией

$$d_0(\lambda) = 2\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}, \quad \lambda \in [0, k/C], \quad (37)$$

одной переменной  $\lambda$ . Производная функции (37) по  $\lambda$  равна

$$d'_0(\lambda) = C \frac{k - 2\lambda C}{\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}}.$$

Она обращается в ноль при значении

$$\lambda = \lambda_0 = k/2C. \quad (38)$$

При этом слева от точки  $\lambda = \lambda_0$  производная  $d'_0(\lambda)$  положительна, а справа – отрицательна.

В случае А значение  $\lambda_0$  принадлежит области определения  $[0, k/C]$  параметра  $\lambda$ . Следовательно, это значение соответствует точке максимума функции  $d_0(\lambda)$  при  $\lambda \in [0, k/C]$ , а значит, и точке максимума функции  $d(\lambda, \varepsilon)$  в допустимой области  $D$ . Подставив (38) в (37), находим максимум функции  $d_0(\lambda)$ , равный максимуму  $d_{\max}$  функции  $d(\lambda, \varepsilon)$  в случае А:  $d_{\max} = k$ .

В случае В возможны два подслучая  $B_1, B_2$  в зависимости от того, принадлежит ли значение (38) области определения  $[0, R/L]$  параметра  $\lambda$  или не принадлежит. В подслучае  $B_1$ , когда  $\lambda_0 \in [0, R/L]$ , максимум  $d_{\max}$  функции  $d(\lambda, \varepsilon)$  остается равным  $k$ , как и в случае А. В подслучае  $B_2$  значение  $\lambda_0 = k/2C$  аргумента функции  $d_0(\lambda)$ , соответствующее точке ее абсолютного максимума, строго больше правой границы допустимого промежутка  $[0, R/L]$ . Поэтому максимум функции  $d_0(\lambda)$  по допустимому промежутку достигается в его правой граничной точке  $\lambda = R/L$ , и этот максимум  $d_{\max} = 2\sqrt{\frac{R}{L} \left( \frac{k}{C} - \frac{R}{L} \right)}$  меньше абсолютного максимума этой функции, равного  $k$ .

Резюмируя, приходим к такому выводу.

**Лемма 2.** Для функции  $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ , являющейся коэффициентом демпфирования в уравнении (21), ее максимум в допустимой области  $D$  равен

$$d_{\max} = \begin{cases} k, & R/L \geq k/C; \\ k, & R/L < k/C, \quad k/(2C) \leq R/L; \\ 2\sqrt{\frac{R}{L} \left( \frac{k}{C} - \frac{R}{L} \right)} < k, & R/L < k/C, \quad k/(2C) > R/L. \end{cases} \quad (39)$$

**Замечание 2.** Согласно лемме 2, максимальное значение  $d_{\max}$  коэффициента демпфирования  $d(\lambda, \varepsilon)$  в уравнении сравнения (21) не превосходит  $k$ . Поэтому оно всегда меньше определенного в (4) значения коэффициента демпфирования  $a_0$  для уравнения собственной модели (3), которое всегда больше  $k$ .

Пользуясь леммой 2, получаем из теоремы 3 достаточный критерий ограниченности угла  $\gamma$ , в котором вместо коэффициента демпфирования  $d(\lambda, \varepsilon)$ , зависящего от двух параметров, используется его максимальное возможное значение  $d_{\max}$ .

**Теорема 5.** Пусть все решения дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (40)$$

где  $b_0, c_0, d_{\max}$  определены по формулам (4), (39), ограничены при  $t \geq 0$ .

Тогда

- 1) в любом решении (23) уравнений (14) функция  $\gamma(t)$  ограничена при  $t \geq 0$ ;

2) величина  $d_{\max}$  является максимально возможным коэффициентом демпфирования для уравнения вида (21) с коэффициентом демпфирования  $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ .

Используемая в данной работе двухтоковая модель синхронного электромотора описывается системой уравнений (1) или (14). Эта модель содержит механические параметры  $C, k$  и электротехнические параметры  $\beta, S, L, R, B, \omega, u$ . Предполагая параметры  $C, k, \beta, S, \omega$  фиксированными, укажем способ выбора параметров  $L, R, B, u$ , при котором обеспечивается выполнение условия теоремы 5.

Согласно изложенным в п. 2 результатам, это условие означает, что параметры Трикоми  $a, c$  для уравнения (40) удовлетворяют неравенству  $a > a_{\text{cr}}$ , где  $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(c)$  – критическое значение параметра  $a$ . В уравнении (3) коэффициент демпфирования обозначен через  $a_0$ , и параметры Трикоми для него определяются по формулам (9). В уравнении (40) коэффициентом демпфирования является величина  $d_{\max}$ . Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$k/C < R/L,$$

соответствующее практически интересному случаю А (рис. 2, А). Тогда  $d_{\max} = k$  согласно (39), и формулы (9) для уравнения (40) принимают вид

$$a = k/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0. \quad (41)$$

Здесь величины  $b_0, c_0$  выражаются через исходные параметры по формулам (4).

Существование стационарных решений систем уравнений (1), (14) и уравнения сравнения (40) обеспечивается неравенством  $c < 1$ . Так как  $c = c_0/b_0$ , выполнения этого неравенства можно добиться путем увеличения коэффициента  $b_0$ , например, за счет увеличения  $B, u$ . Благодаря увеличению коэффициента  $b_0$  величина  $c$  может быть сделана сколь угодно малой. Покажем, что отношение  $a(c)/a_{\text{cr}}(c)$  стремится к  $+\infty$  при  $c \rightarrow +0$ . Тогда при  $c$  достаточно малом выполняется неравенство  $a/a_{\text{cr}} > 1$ , эквивалентное условию теоремы 5.

Для критического значения  $a_{\text{cr}}$  разными авторами найдены аналитические оценки сверху и снизу, приведенные в [6]. Воспользуемся верхней оценкой Бёма:

$$a_{\text{cr}}(\theta_0) < a_{\text{B}}(\theta_0), \quad a_{\text{B}}(\theta_0) = 2 \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (42)$$

Здесь

$$\theta_0 = -\gamma^{(0)} = \arcsin c, \quad \theta_0 \in (0, \pi/2),$$

так что стремление величины  $c$  к нулю означает, что  $\theta_0 \rightarrow +0$ . Так как  $\sin \theta_0 = c$ , из (41) следует, что  $b_0 = c_0/c = c_0/\sin \theta_0$ , и параметр  $a$  выражается через параметр  $\theta_0$  по формуле

$$a = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \sqrt{c} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \sqrt{\sin \theta_0}. \quad (43)$$

В соответствии с (42), (43) имеем

$$\frac{a(\theta_0)}{a_{\text{B}}(\theta)} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{2 \sin \frac{\theta_0}{2}} = \frac{k}{\sqrt{c_0 C}} \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\theta_0}{2}}}{2 \sqrt{\sin \frac{\theta_0}{2}}}.$$

Отсюда следует, что отношение  $a(\theta_0)/a_B(\theta_0)$  стремится к  $+\infty$  при  $\theta_0 \rightarrow +0$ . Следовательно, при достаточно малых  $\theta_0 > 0$  будет

$$\frac{a(\theta_0)}{a_B(\theta_0)} > 1. \quad (44)$$

Но  $a_{cr}(\theta_0) < a_B(\theta_0)$  согласно (42). Поэтому из (44) следует, что при малых  $\theta_0 > 0$  справедливо неравенство

$$\frac{a(\theta_0)}{a_{cr}(\theta_0)} > \frac{a(\theta_0)}{a_B(\theta_0)} > 1.$$

Это означает, что при малых значениях  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$  выполняется неравенство  $a > a_{cr}$ , эквивалентное условию теоремы 5.

**8. Ограниченность всех фазовых переменных.** Докажем теперь, что для любого решения системы (14) в случае ограниченности угла  $\gamma$  имеет место ограниченность и остальных фазовых переменных  $\dot{\gamma}, j_1, j_2$ . Для обеспечения ограниченности угла  $\gamma$  достаточно принять условия одной из теорем 3–5. Таким образом, надо доказать следующую лемму.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия одной из теорем 3–5. Тогда любое решение (23) системы (14) ограничено по всем переменным при  $t \geq 0$ .

*Доказательство.* В доказательстве теоремы 2 для функции  $\gamma(t)$  получена оценка снизу:  $\gamma(t) \geq e_{n_0}$  ( $t \geq 0$ ), где  $e_{n_0}$  – значение угла  $\gamma$  для седловой точки уравнения сравнения (21) в теореме 2 и уравнения сравнения в одной из теорем 3, 4. Номер  $n_0 \leq 0$  этой седловой точки определен в ходе доказательства теоремы 3. На фазовой плоскости уравнения (21) слева и справа от седловой точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_{n_0}, 0)$  расположены устойчивые стационарные точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_{n_0+1}, 0)$  и  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_{n_0}, 0)$ . Из определения (17) функции  $U(\gamma)$  следует, что значения  $\gamma = e_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) соответствуют ее точкам локальных максимумов, а значения  $\gamma = d_n$  – точкам локальных минимумов. При этом значение  $\gamma = d_{n_0}$  является точкой минимума функции  $U(\gamma)$  на всей полуоси  $\gamma \geq e_{n_0}$ . Поэтому функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{n_0}) = \int_{d_{n_0}}^{\gamma} (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(\cos d_{n_0} - \cos \gamma) + c_0(\gamma - d_{n_0}) \quad (45)$$

неотрицательна на этой полуоси:  $\Delta U(\gamma) \geq 0, \gamma \geq e_{n_0}$ .

Рассмотрим функцию

$$v(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) = W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \Delta U(\gamma).$$

Она лишь на константу отличается от функции  $V(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2)$ , определенной в (17), и поэтому имеет такую же производную (19) по  $t$  в силу системы (14):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, j_1, j_2) = -k\dot{\gamma}^2 - \beta R(j_1^2 + j_2^2).$$

Поскольку  $\dot{v}(\dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq 0$ , на решении системы (14) функция  $v$  не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\gamma, \dot{\gamma}, j_1, j_2) : W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\}, \\ v_0 &= W(\dot{\gamma}(0), j_1(0), j_2(0)) + \Delta U(\gamma(0)). \end{aligned} \quad (46)$$

Из неотрицательности функций  $W, \Delta U$  следует, что  $v_0 \geq 0$ , и тогда из (46) следуют неравенства

$$W(\dot{\gamma}, j_1, j_2) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \quad (47)$$

Согласно определению (17), функция  $W$  является определенно положительной квадратичной формой переменных  $\dot{\gamma}, j_1, j_2$ . Поэтому первому из неравенств (47) удовлетворяют только значения этих переменных, лежащие в шаре  $\dot{\gamma}^2 + j_1^2 + j_2^2 \leq \rho^2$  конечного радиуса  $\rho$ . Второе неравенство (47) с учетом выражения (45) для  $\Delta U$  приводит к еще одному доказательству ограниченности функции  $\gamma(t)$  сверху.  $\square$

**9. Структура притягивающего множества.** Перейдем к третьему пункту намеченного в конце п. 4 плана и докажем следующую лемму.

**Лемма 4.** Пусть функция  $V$  определена по формуле (17), и пусть  $M$  – множество точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий всех решений системы (14), определенных на полуоси  $t \geq 0$  и удовлетворяющих условию  $\dot{V} = 0$ .

Множество  $M$  состоит только из стационарных точек системы (14), причем расстояния между любыми двумя стационарными точками ограничены снизу положительной постоянной.

*Доказательство.* Из формулы (19) для  $\dot{V}$  следует, что множество  $M$  образовано фазовыми траекториями, для которых  $\dot{\gamma} = 0, \quad j_1 = j_2 = 0$ , то есть оно состоит из стационарных точек  $\gamma = \gamma^0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad j_1 = j_2 = 0$  системы (14). В п. 3 установлено, что при сделанном предположении  $c = c_0/b_0 < 1$  множество стационарных точек данной системы состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям (7) постоянной  $\gamma^0$ . Отсюда с учетом (8) следует, что расстояние между любыми двумя стационарными точками ограничено снизу величиной  $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$ .  $\square$

**10. Теорема о глобальной устойчивости.** В каждой из теорем 3–5 даны условия ограниченности решений системы уравнений (2) по переменной  $\gamma$ . Далее, в лемме 3 установлено, что из ограниченности решений системы (2) по  $\gamma$  следует их ограниченность по всем переменным.

Тогда из принципа Ла-Салля (см. п. 4) с функцией Ляпунова  $V$ , определенной в (17), следует, что при выполнении условий одной из теорем 3–5 любое решение системы уравнений (14) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству  $M$ . Согласно лемме 4, множество  $M$  – это множество стационарных точек системы (14). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества  $M$  ограничены снизу положительной постоянной, то стремление решения к  $M$  означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При

этом на  $2\pi$ -периоде изменения угла  $\gamma$  существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарная точка.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия одной из теорем 3–5. Тогда система уравнений (14), описывающая двухтоковую модель синхронного электродвигателя, глобально устойчива, то есть каждое ее решение с течением времени стремится к одному из двух стационарных решений, существующих на  $2\pi$ -периоде изменения угла  $\gamma$ .

1. Леонов Г.А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // ПММ. – 1976. – 40, вып. 2. – С. 238–244.
2. Геллиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – 2, no. 2. – P. 1–20.
4. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
5. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б., Мозалевская Г.В. Асимптотическая устойчивость в целом двухтоковой модели асинхронного электродвигателя // См. наст. сб. – С. 70–79.
6. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
7. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электродвигателя // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2014. – 29. – С. 121–126.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука. – 1967. – 224 с.
9. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

**B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich**

**Global stability of the two-current model of the synchronous electric motor.**

This investigation is based on the two-current model of the synchronous electric motor. The load moment is assumed to be linear dissipative. Effective sufficient condition is obtained guaranteeing that any motion of the synchronous electric motor tends with time to its steady rotation.

**Keywords:** *synchronous electric motor, global stability, nonlocal reduction method, LaSalle invariance principle.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк  
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 15.04.16