УДК 531.376

©2015. **Р. Н. Нескородев**

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе предложен метод решения задач теории вязкоупругости, основанный на построении матриц уравнений закона Гука исходя из интегральных уравнений состояния. Элементы этих матриц строятся с использованием дробно-экспоненциальных функций Ю.Н. Работнова и зависят от времени. Это позволяет решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости. Приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: *ползучесть, релаксация, резольвентный оператор, метод Вольтерра, ортотропный вязкоупругий материал, переменные коэффициенты упругости.*

Введение. Непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным. Это связано с тем, что существует лишь незначительное число задач теории упругости, для которых известна явная зависимость от упругих постоянных, если использовать упругое решение в обычной форме. В общем случае это решение может содержать иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к решению таких задач. Поэтому, для решения упругих задач, применяются приближенные методы, идея которых состоит в поиске решения, когда его зависимость от упругих постоянных устанавливается в явном виде. Широкое применение нашло использование рядов по малому параметру. Этим методом решен ряд задач для изотропных и анизотропных сред [14].

Степенные ряды, в которые раскладываются иррациональные и трансцендентные функции, как правило, сходятся медленно. Чтобы обойти эту проблему в работах [5–6] предлагается использование цепных дробей, которые обеспечивают быстро сходящийся процесс последовательных приближений.

Методом переменных модулей названы способы решения задач вязкоупругости с использованием функций времени вместо интегральных операторов [1, 3].

В настоящей работе предлагается метод решения задач теории вязкоупругости, основанный на построении матриц уравнений закона Гука исходя из интегральных уравнений состояния. Элементы этих матриц строятся с использованием дробно-экспоненциальных функций Ю.Н. Работнова и зависят от времени. Это позволяет решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости [9, 12, 13].

1. Уравнения состояния. Функции ползучести и релаксации. Рассмотрим упругое равновесие анизотропного тела, отнесенного к системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для определения перемещений, напряжений и деформаций, возникающих в теле при его длительном нагружении внешними усилиями, используются уравнения состояния, учитывающие свойства материала деформироваться во времени [4]

$$\mathbf{s}\,(t)=\mathbf{R}\,(0)\ \mathbf{e}(t)+\int\limits_0^t \frac{d\mathbf{R}\,(t-\tau)}{d\,(t-\tau)}\,\mathbf{e}\,(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$\mathbf{e}\,(t)=\mathbf{P}\,(0)\ \mathbf{s}(t)+\int\limits_0^t \frac{d\mathbf{P}\,(t-\tau)}{d\,(t-\tau)}\,\mathbf{s}\,(\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Здесь принято: $\mathbf{s}\,(t)=s_m=[s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6]$, $\mathbf{e}\,(t)=e_n=[e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6]$ – векторы напряжений и деформаций в произвольный момент времени t; $\mathbf{R}\,(t)=R_{mn}\,(t)$ и $\mathbf{P}\,(t)=P_{mn}\,(t)$ $(m,n=\overline{1,6})$ – регулярные части матриц функций релаксации и ползучести. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги, матрицы модулей упругости $\mathbf{R}\,(0)=\mathbf{A}=A_{mn}$ и коэффициентов деформации $\mathbf{P}\,(0)=\mathbf{a}=a_{mn}$ – характеризуют свойства упругого материала.

Закон Гука для упругой задачи получаем из уравнений (1) и (2) в предположении, что $t=0$. В момент приложения внешних усилий или деформаций (время $t=0$) упругие постоянные материала характеризуются матрицей $\mathbf{A}$ – модулей упругости, или $\mathbf{a}$ – коэффициентов деформации, а решение является упругим. Дальнейшее поддержание усилий или деформаций (время $t>0$), приводит к тому, что материал продолжает деформироваться. Мгновенные значения функций ползучести $\mathbf{P}\,(0)=\mathbf{a}$, релаксации $\mathbf{R}\,(0)=\mathbf{A}$, напряжений $\mathbf{s}(0)=\sigma$ и деформаций $\mathbf{e}(0)=\varepsilon$ показывают, что функции времени наделяются начальными значениями, являющимися решением упругой задачи.

Представим функции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$ в виде произведения $\mathbf{R}\,(t)=R_{mn}\,(t)=A_{mn}r_{mn}\,(t)$, $\mathbf{P}\,(t)=P_{mn}\,(t)=a_{mn}p_{mn(t)}$, где $r_{mn}\,(t)$, $p_{mn}\,(t)$ – матрицы функций релаксации и ползучести. Уравнения состояния (1) и (2) легко преобразовать к виду

$$s_m\,(t)=\overline{A}_{mn}e_n\,(t)=A_{mn}\,(1-r^*_{mn})\,e_n,\ r^*_{mn}e_n=-\int\limits_0^t \frac{dr_{mn}\,(t-\tau)}{d\,(t-\tau)}\,e_n\,(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

$$e_m\,(t)=\overline{a}_{mn}s_n\,(t)=a_{mn}\,(1+p^*_{mn})\,s_n,\ p^*_{mn}s_n=\int\limits_0^t \frac{dp_{mn}\,(t-\tau)}{d\,(t-\tau)}s_n\,(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

При использовании принципа Вольтерра, существенное значение имеет аналитическое задание ядер ползучести и релаксации. Ю.Н. Работнов [10] построил класс функций

$$Э_\alpha\,(\beta;\,t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(t-\tau)^{\alpha+n(1+\alpha)}\,\beta^n/\Gamma\,[(n+1)\,(1+\alpha)]. \tag{5}$$

Эти функции названы дробно-экспоненциальными. Операторы с ядрами вида (5) обладают специальной алгеброй, резольвенты их образованы из функций того же класса. Если принять $dp_{mn}(t-\tau)/d(t-\tau) = \lambda Э_\alpha(\beta;\, t-\tau)$, то интегральный оператор $\overline{a}_{mn}$ представлений (4) станет таким

$$\overline{a}_{mn} = a_{mn}\left[1 + \lambda_{mn} Э^*_\alpha(-\beta_{mn})\right]. \tag{6}$$

Уравнения состояния (3) и (4) имеют такой же вид, что и обычный закон Гука, только матрицы упругих постоянных A_{mn} и a_{mn} заменены упругими операторами $\overline{A}_{mn}$ и $\overline{a}_{mn}$, которые зависят от времени.

Функции $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ определяются из эксперимента. В опыте на ползучесть мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными напряжения [4]. Если нагрузки постоянны, то напряжения $s(\tau)$ в (2) можно принять зависимыми от верхнего предела и вынести из под знака интеграла. Интегрирование уравнения (2) в этом случае дает

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{s}(t). \tag{7}$$

В опыте на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации [4]. Полагаем их зависимыми от верхнего предела и выносим из под знака интеграла в уравнении (1). Интегрирование уравнения (1) в этом случае дает

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{e}(t). \tag{8}$$

Опыты на ползучесть и релаксацию осуществляются при одноосном растяжении, сжатии, изгибе или сдвиге. Они являются базовыми экспериментами, которые необходимы для определения ядер ползучести и релаксации. В одномерном случае при одноосном усилии s_n матричное уравнение (7) состоит из элементов

$$e_{mn} = P_{mn}s_n = a_{mn}p_{mn}s_n, \tag{9}$$

где e_{mn} – деформация e_m от воздействия усилия s_n.

Из соотношения (9) находим значения элементов матрицы $\mathbf{P}(t)$ по величине измеренных деформаций во времени

$$P_{mn} = a_{mn}p_{mn} = e_{mn}/s_n. \tag{10}$$

При усилиях s_n, для которых свойства материала остаются линейными, величина $P_{mn}(t) = e_{mn}/s_n$ не зависит от s_n.

Аналогично, матричное уравнение (8) в одномерном случае при одноосной деформации e_n распадается на элементы

$$s_{mn} = R_{mn}e_n = A_{mn}r_{mn}e_n, \tag{11}$$

где s_{mn} – усилия s_m от воздействия деформации e_n.

Из соотношения (11) находим значения элементов матрицы $\mathbf{R}(t)$ по величине измеренных напряжений во времени

$$R_{mn} = A_{mn}r_{mn} = s_{mn}/e_n. \tag{12}$$

При деформациях e_n, для которых свойства материала остаются линейными, величина $R_{mn}(t) = s_{mn}/e_n$ не зависит от e_n.

Экспериментальные данные e_{mn}/s_n и s_{mn}/e_n позволяют вычислить функции ползучести $p_{mn}(t)$ и релаксации $r_{mn}(t)$ и сформировать матрицы $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$. Отметим, что экспериментально найденные данные задаются таблично, дискретным набором значений, соответствующим некоторым фиксированным временам. При использовании таких данных в вычислениях, для обеспечения точности расчетов необходимо осуществить математическую обработку табличных данных. Такая обработка включает в себя сглаживание кривых ползучести или релаксации и восполнение табличных данных путем увеличения числа точек разбиения временного отрезка $[0,\ t]$. Эти вопросы рассмотрены в работе [13].

Связь между матрицами $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ установлена в работах [9, 12]. Имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{R}_{k-i}\left(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\right)\right)\mathbf{A} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ N); \tag{13}$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}_{k-i}\left(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}\right)\right)\mathbf{a} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ N), \tag{14}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$, $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$, $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$ – значения функций в соответствующие моменты времени.

С помощью представлений (13) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находим функции релаксации, а с помощью (14) – наоборот. Таким образом, соотношения (13) и (14) полностью решают задачу обращения уравнений (1) или (2).

Опытные данные по ползучести и релаксации, которые позволили бы определить все величины, входящие в правые части соотношений (10) и (12), в литературе отсутствуют. Поэтому, для уменьшения числа параметров, находящихся из экспериментов, при решении конкретных задач применяются различные допущения относительно реологического поведения материала [6, 10]. Симметрия матриц $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ показывает, что должны выполняться равенства $P_{ik} = P_{ki}$, $R_{ik} = R_{ki}$. Отсюда следует, что не все параметры должны определяться из эксперимента. В случае изотропного материала часто используется допущение об упруго сжимаемом материале. Это позволяет по заданному интегральному оператору $\overline{\nu}$ определять оператор $\overline{E}$ и наоборот [10].

Для ортотропного материала, принимаются допущения, аналогичные принятым допущениям для изотропного материала. Вводится величина обратная модулю объемной деформации при гидростатическом давлении [2]

$$\frac{1}{K} = \frac{1 - \nu_{12} - \nu_{13}}{E_1} + \frac{1 - \nu_{21} - \nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - \nu_{31} - \nu_{32}}{E_3}. \tag{15}$$

Упругие постоянные, входящие в представление (15), для всякого однородного анизотропного тела удовлетворяют условию [8]

$$\frac{2}{K}=\frac{1-2\nu_{12}}{E_1}+\frac{1-2\nu_{21}}{E_2}+\frac{1-2\nu_{23}}{E_2}+\frac{1-2\nu_{32}}{E_3}+\frac{1-2\nu_{31}}{E_3}+\frac{1-2\nu_{13}}{E_1}\geq 0. \qquad (16)$$

Следуя Работнову [10], потребуем, чтобы оператор, соответствующий величине (15) был постоянным. Это значит, что

$$1/\overline{K}=1/K=const. \qquad (17)$$

Считая объемную деформацию упругой, полагаем приведенные ниже слагаемые представления (16) постоянными

$$\frac{1-2\nu_{12}}{E_1}+\frac{1-2\nu_{21}}{E_2}=\frac{1-2\overline{\nu}_{12}}{\overline{E}_1}+\frac{1-2\overline{\nu}_{21}}{\overline{E}_2},\ \frac{1-2\nu_{23}}{E_2}+\frac{1-2\nu_{32}}{E_3}=\frac{1-2\overline{\nu}_{23}}{\overline{E}_2}+\frac{1-2\overline{\nu}_{32}}{\overline{E}_3},$$

$$\frac{1-2\nu_{13}}{E_1}+\frac{1-2\nu_{31}}{E_3}=\frac{1-2\overline{\nu}_{13}}{\overline{E}_1}+\frac{1-2\overline{\nu}_{31}}{\overline{E}_3}. \qquad (18)$$

Условия (18) дают постоянство соотношению (17), а из условия (16) следует, что анизотропное тело в условиях ползучести находится в упругом состоянии. Соотношения (18) позволяют определить величины $\overline{\nu}_{ik}$ по известному значению операторов $\overline{E}_i$ и наоборот.

2. Установление связи между интегральными операторами и функциями ползучести и релаксации. Матричные уравнения (8) и (7) запишем в форме

$$s_m\left(t\right)=A_{mn}r_{mn}\left(t\right)e_n\left(t\right) \quad \text{и} \quad e_m\left(t\right)=a_{mn}p_{mn}\left(t\right)s_n\left(t\right) \quad \left(m,n=\overline{1,6}\right), \qquad (19)$$

и сравним с уравнениями состояния (3) и (4). В результате получим равенства

$$\left(1-r^*_{mn}\right)=r_{nm}\left(t\right), \quad \left(1+p^*_{mn}\right)=p_{nm}\left(t\right). \qquad (20)$$

Рассмотрим случай, когда из эксперимента на ползучесть определена матрица функций ползучести $P_{mn}=a_{mn}p_{mn}\left(t\right)$. В этом случае второе равенство (20) с учетом представления (6) будет таким

$$p_{mn}\left(t\right)=1+p^*_{mn}=1+\lambda_{mn}Э^*_\alpha\left(-\beta_{mn}\right). \qquad (21)$$

Соотношение (21) позволяет, путем аппроксимации, по заданной функции ползучести $p_{mn}\left(t\right)$, определить значение интегрального оператора $\lambda_{mn}Э^*_\alpha\left(-\beta_{mn}\right)$. Временные матрицы уравнений закона Гука определяется соотношениями

$$\overline{a}_{mn}=a_{mn}\left[1+\lambda_{mn}Э^*_\alpha\left(-\beta_{mn}\right)\right], \quad \overline{A}_{mn}=\left(\overline{a}_{mn}\right)^{-1}. \qquad (22)$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда из эксперимента на релаксацию определена матрица функций релаксации $R_{mn}\left(t\right)$. В этом случае имеем

$$r_{mn}\left(t\right)=1-r^*_{mn}=1-\lambda_{mn}Э^*_\alpha\left(-\beta_{mn}\right). \qquad (23)$$

Соотношение (23) позволяет, путем аппроксимации, по заданной функции релаксации $r_{mn}(t)$, определить значение интегрального оператора $\lambda_{mn}Э^*_\alpha(-\beta_{mn})$. Временные матрицы уравнений закона Гука определяются соотношениями

$$\overline{A}_{mn} = A_{mn}\left[1 - \lambda_{mn}Э^*_\alpha(-\beta_{mn})\right], \quad \overline{a}_{mn} = \left(\overline{A}_{mn}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Дальнейшее решение задач теории вязкоупругости в любой момент времени ничем не отличается от решения задач теории упругости.

Из представлений $\mathbf{P}(t) = a_{mn}p_{mn}(t)$ и $\mathbf{R}(t) = A_{mn}r_{mn}(t)$ и связи между ними, отмеченную соотношениями (13) и (14) следует, что если экспериментально найдена матрица функций ползучести $\mathbf{P}(t)$ (или релаксации $\mathbf{R}(t)$), то матрица функций релаксации $\mathbf{R}(t)$ (или ползучести $\mathbf{P}(t)$) может быть найдена аналитически по формулам (13) (или (14)) или экспериментально.

3. Обобщенное плоское напряженное состояние анизотропной пластины.

3.1. Представление решения. Рассмотрим упругое равновесие анизотропной пластины толщиной $2h$. Отнесем ее к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ее срединная плоскость совпала с плоскостью Ox_1x_2, а ось Ox_3 направим по нормали к срединной плоскости. Предполагаем, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [7]. Уравнения закона Гука для средних напряжений и деформаций в этом случае можно записать в форме (3) или (4), когда $t = 0$ и введены векторы напряжений и деформаций $s_n(0) = \sigma_n = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6]$, $e_m(0) = \varepsilon_m = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6]$, а матрицы коэффициентов деформации и модулей упругости будут такими

$$a_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad A_{mn} = (a_{mn})^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Указанные уравнения закона Гука вместе с уравнениями равновесия без учета объемных сил $\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 = 0$, $\partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 = 0$, и уравнениями связи между составляющими деформации и перемещений $\varepsilon_1 = \partial_1 u_1$, $\varepsilon_2 = \partial_2 u_2$, $\varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропной пластине.

Общее решение этой системы уравнений выражается через две аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ [13]

$$u^*_k = 2Re\sum_{j=1}^{2} R_{kj}\Phi_j(z_j). \tag{26}$$

В соответствии с решением (26), представление для напряжений примут вид:

$$\sigma^*_1 = 2Re\left(\mu_1^2\Phi'_1 + \mu_2^2\Phi'_2\right), \quad \sigma^*_2 = 2Re\left(\Phi'_1 + \Phi'_2\right), \sigma^*_6 = -2Re\left(\mu_1\Phi'_1 + \mu_2\Phi'_2\right). \tag{27}$$

Комплексные параметры $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ являются решением характеристического уравнения четвертого порядка

$$l_{11}(\mu)\, l_{22}(\mu) - l_{12}(\mu)\, l_{21}(\mu) = 0. \tag{28}$$

Величины $l_{ik}(\mu)$ и коэффициенты R_{kj} находятся из соотношений

$$\begin{gathered} l_{11} = A_{11} + 2A_{16}\mu + A_{66}\mu^2,\ l_{12} = l_{21} = A_{16} + (A_{12} + A_{66})\,\mu + A_{26}\mu^2, \\ l_{22} = A_{66} + 2A_{26}\mu + A_{22}\mu^2,\ R_{1j} = l_{22}(\mu_j)/\Delta_j,\ R_{2j} = -l_{21}(\mu_j)/\Delta_j, \\ \Delta_j = A_{21}l_{22}(\mu_j) - A_{26}l_{21}(\mu_j) + \mu_j\left[A_{26}l_{22}(\mu_j) - A_{22}l_{21}(\mu_j)\right]. \end{gathered} \tag{29}$$

Отметим, что решение (26) выписано для случая, когда параметры μ_j различны. В случае, когда пластина изотропна или уравнение (28) имеет равные комплексные параметры $\mu_1 = \mu_2$ при решении граничных задач можно использовать соотношения (26), (27) с учетом методики, предложенной в работе [15].

Плоскость Ox_1x_2, в которой определены функции $\Phi_j(z_j)$ и их производные $\Phi_j'(z_j) = d\Phi_j/dz_j$, обозначим буквой S. Функции $\Phi_j(z_j)$ можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных $z_j = x_j + iy_j$, где

$$x_j = x_1 + \alpha_j x_2, \quad y_j = \beta_j x_2, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \tag{30}$$

При этом, функции $\Phi_j(z_j)$ должны быть определены не в области S, а в областях $S_j\left(j = \overline{1,2}\right)$, полученных из области S аффинными преобразованиями (30).

3.2. Упругая задача для пластины с отверстиями.Рассмотрим решение задачи для пластины с отверстиями, когда на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_1^0 = p, \quad \sigma_2^0 = q, \quad \sigma_6^0 = l. \tag{31}$$

Перемещения и деформации в пластине без отверстий представляются в форме

$$u_1^0 = \varepsilon_1^0 x_1 + \frac{\varepsilon_6^0}{2}x_2, \quad u_2^0 = \frac{\varepsilon_6^0}{2}x_1 + \varepsilon_2^0 x_2, \tag{32}$$

$$\varepsilon_1^0 = a_{11}p + a_{12}q + a_{16}l, \quad \varepsilon_2^0 = a_{21}p + a_{22}q + a_{26}l, \quad \varepsilon_6^0 = a_{61}p + a_{62}q + a_{66}l.$$

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет отверстий, описываются функциями (26), (27). Определение этих функций осуществляется из граничных условий на контурах отверстий. Рассмотрим два вида таких условий.

Контур не подкреплен. Граничные условия на контуре для определения функций $\Phi_j(z_j)$ будут такими [7]:

$$2Re\left[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2\right] = lx - py + c_1, \quad 2Re\left[\Phi_1 + \Phi_2\right] = ly - qx + c_2. \tag{33}$$

Контур жестко подкреплен. При жестко подкрепленном контуре на его боковой поверхности нужно положить равными нулю перемещения. Условия для определения функций $\Phi_j(z_j)$ будут такими

$$2Re\sum_{j=1}^{2} R_{kj}\Phi_j(z_j) = -u_k^0 \quad \left(k = \overline{1,2}\right). \tag{34}$$

3.3. Пластина с одним отверстием эллиптического сечения. Рассмотрим случай, когда пластина ослаблена одним отверстием эллиптического сечения. Полуоси эллипса a и b. Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура L_j будет такой [13]

$$z_j = R_j\varsigma_j + m_j/\varsigma_j \tag{35}$$

$$R_j = (a - i\mu_j b)/2,\ m_j = (a + i\mu_j b)/2,\ \varsigma_j = r_j\sigma,\ r_j \geq 1,\ \sigma = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Представим функцию $\Phi_j(z_j)$ в виде:

$$\Phi_j(z_j) = a_j/\varsigma_j. \tag{36}$$

Методом рядов из граничных условий (33) и (34) найдем системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов функции (36):

для неподкрепленного контура

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = (la - pbi)/2, \quad a_1 + a_2 = (lbi - qa)/2; \tag{37}$$

для жестко подкрепленного контура

$$R_{11}a_1 + R_{12}a_2 = -\left(\varepsilon_1^0 a + \varepsilon_6^0 bi/2\right)/2, \quad R_{21}a_1 + R_{22}a_2 = -\left(\varepsilon_6^0 a/2 + \varepsilon_2^0 bi\right)/2. \tag{38}$$

Решение вязкоупругой задачи проводится аналогичным образом, но вместо уравнений состояния (3) или (4), когда $t = 0$, выбирается случай, когда t – произвольно. При этом, если контур не подкреплен, выбирается уравнение состояния (4), при жестком подкреплении используется уравнение состояния (3).

4. Формирование матриц уравнений состояния, меняющихся во времени. Рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случая обобщенного плоского напряженного состояния ортотропной пластинки. Матрицы a_{mn} и A_{mn} представлений (25) формируются с помощью технических упругих постоянных, которые в процессе длительного нагружения пластинки заменяются временными интегральными операторами. Отметим, что из экспериментов на ползучесть или релаксацию определяются операторы именно технических упругих постоянных. Из упругих постоянных матриц a_{mn} и A_{mn} формируется матрица интегральных операторов $\overline{a}_{mn}$ и $\overline{A}_{mn}$

$$\overline{a}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\overline{E}_1} & -\frac{\overline{\nu}_{21}}{\overline{E}_2} & 0 \\ -\frac{\overline{\nu}_{12}}{\overline{E}_1} & \frac{1}{\overline{E}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{G}_{12}} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{E}_1}{1-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{21}} & \frac{\overline{E}_2\overline{\nu}_{12}}{1-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{21}} & 0 \\ \frac{\overline{E}_1\overline{\nu}_{21}}{1-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{21}} & \frac{\overline{E}_2}{1-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Здесь модули Юнга E_i, коэффициенты Пуассона ν_{ik}, модуль сдвига G_{12}, входящие в уравнения закона Гука, заменены линейными интегральными операторами $\overline{E}_i$, $\overline{\nu}_{ik}$, и $\overline{G}_{12}$. Для сохранения симметрии матрицы уравнений состояния, необходимо чтобы выполнялись условия

$$\overline{\nu}_{12}\overline{E}_2 = \overline{\nu}_{21}\overline{E}_1. \tag{40}$$

В работе [5] приведены результаты экспериментов по ползучести полимерного композитного материала на основе эпоксидного связующего (материал 1). Операторы $1/\overline{E}_i$ и $1/\overline{G}_{12}$ аппроксимировались с помощью операторов

$$\frac{1}{\overline{E}_i} = \frac{1}{E_i}\left[1 + \lambda_i Э^*_\alpha(-\beta_i)\right], \quad \frac{1}{\overline{G}_{12}} = \frac{1}{G_{12}}\left[1 + \lambda_6 Э^*_\alpha(-\beta_6)\right], \tag{41}$$

где интегральные операторы $Э^*_\alpha(-\beta_i)$ содержат ядро Работнова (5).

Операторный коэффициент Пуассона принят равным мгновенному значению. Упругие и реологические характеристики указанного материала приведены ниже.

Материал 1.

$$\begin{gathered} E_1 = 23 \cdot 10^3\,МПа,\ \lambda_1 = 0.0323\,c^\delta,\ \beta_1 = 0.1570\,c^\delta,\ \nu_{12} = 0.11, \\ E_2 = 16 \cdot 10^3\,МПа,\ \lambda_2 = 0.1295\,c^\delta,\ \beta_2 = 0.2745\,c^\delta,\ \nu_{21} = 0.0765, \\ G_{12} = 3.08 \cdot 10^3\,МПа,\ \lambda_6 = 0.0717\,c^\delta,\ \beta_6 = 0.0276\,c^\delta, \\ \lambda_{12} = \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0,\ \delta = -(1+\alpha),\ \alpha = -0.846. \end{gathered} \tag{42}$$

Исходные операторы имеют вид (41) и

$$\overline{\nu}_{12} = \nu_{12}\left[1 + \lambda_{12} Э^*_\alpha(-\beta_{12})\right], \quad \overline{\nu}_{21} = \nu_{21}\left[1 + \lambda_{21} Э^*_\alpha(-\beta_{21})\right].$$

Требование одновременного равенства операторов $\overline{\nu}_{12}$ и $\overline{\nu}_{21}$, мгновенному значению, как это указано в соотношениях (42) приводит к нарушению равенства (40). Укажем несколько возможных выходов из создавшегося положения.

1. Полагаем $\overline{\nu}_{12} = \nu_{12} = const$. Тогда из равенства (40) находим $\overline{\nu}_{21}$. Затем полагаем $\overline{\nu}_{21} = \nu_{21} = const$. Из равенства (40) определяем $\overline{\nu}_{12}$. Комбинируя полученные соотношения, получим

$$\begin{gathered} \overline{\nu}_{12} = \nu_{12}\left[1 + (1-\gamma)\,\lambda_{12} Э^*_\alpha(-\beta_2) - (1-\gamma)\,\lambda_{11} Э^*_\alpha(-\beta_1 - \lambda_1)\right], \\ \overline{\nu}_{21} = \nu_{21}\left[1 + \gamma\lambda_{21} Э^*_\alpha(-\beta_1) - \gamma\lambda_{22} Э^*_\alpha(-\beta_2 - \lambda_2)\right] \quad (0 \le \gamma \le 1), \\ \lambda_{12} = \lambda_2 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \beta_1 - \beta_2}, \quad \lambda_{11} = \lambda_1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \beta_1 - \beta_2}, \\ \lambda_{21} = \lambda_1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 + \beta_2 - \beta_1}, \quad \lambda_{22} = \lambda_2 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 + \beta_2 - \beta_1}. \end{gathered} \tag{43}$$

2. Из первого соотношения (18) находим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\nu}_{12}}{\overline{E}_1} = \frac{\overline{\nu}_{21}}{\overline{E}_2} &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\overline{E}_1} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{\overline{E}_2} - \frac{1}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1}\right] = \\ &= \frac{\nu_{12}}{E_1}\left[1 + \frac{\lambda_1}{4\nu_{12}} Э^*_\alpha(-\beta_1) + \frac{\lambda_2}{4\nu_{21}} Э^*_\alpha(-\beta_2)\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Представление (44) позволяет, используя алгебру операторов Работнова, определить операторы $\overline{\nu}_{12}$ и $\overline{\nu}_{21}$.

3. Полагаем
$$\frac{\overline{\nu}_{12}}{\overline{E}_1}=\frac{\nu_{12}}{E_1},\quad \frac{\overline{\nu}_{21}}{\overline{E}_2}=\frac{\nu_{21}}{E_2}. \tag{45}$$

Таким образом, для приведенного выше материала можно сформировать симметричную матрицу $\overline{a}_{mn}$ уравнений состояния (39).

Для изотропного материала имеем $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, $G_{12} = G = E/2/(1+\nu)$.

В работе [11] приведены опытные данные об изменении коэффициента Пуассона во времени в медных образцах. Оператор $\overline{\nu}$ аппроксимировался с помощью дробно-экспоненциального оператора с ядром Работнова (5)

$$\overline{\nu}=\nu\left[1+\lambda_\nu Э^*_\alpha(-\beta_\nu)\right]. \tag{46}$$

Упругие и реологические характеристики для меди приведены ниже.

Материал 2 – медь

$$G=4.51\times 10^4\,МПа,\quad E=2(1+\nu)G,\quad \lambda_\nu=6.65\times10^{-3}c^{-(1+\alpha)},$$
$$\beta_\nu=9.2\times10^{-3}c^{-(1+\alpha)},\quad \nu=0.25,\quad \alpha=-0.5. \tag{47}$$

Приведенные в работе [11] опытные данные не содержат информации для определения операторов $\overline{E}$ или $\overline{G}$. Используем предположение об упруго сжимаемом материале. Тогда, на основании первого равенства (18), соотношений алгебры операторов, а также известных зависимостей $1/\overline{G}=2(1+\overline{\nu})/\overline{E}$, последовательно найдем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\overline{E}}=\frac{1}{E}\left[1+\lambda_e Э^*_\alpha(-\beta_e)\right],\ \lambda_e=2\nu\lambda_\nu/(1-2\nu),\ \beta_e=\beta_\nu-\lambda_e,\\ \frac{1}{\overline{G}}=\frac{1}{G}\left[1+\lambda_g Э^*_\alpha(-\beta_e)\right],\ \lambda_g=\frac{3\lambda_\nu\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)},\\ \frac{\overline{\nu}}{\overline{E}}=\frac{\nu}{E}\left[1+\lambda_{\nu e} Э^*_\alpha(-\beta_e)\right],\ \lambda_{\nu e}=\frac{\lambda_\nu}{1-2\nu}.\end{gathered} \tag{48}$$

Реологические постоянные приведенных операторов, выразились через известные величины ν, α, λ_ν и β_ν, которые найдены в результате эксперимента.

Операторы (43)–(45) и (48) могут восполнить недостающие данные для представленных выше материалов.

5. Решение для изотропной пластинки с круговым отверстием. Решение упругой задачи для изотропной пластины с круговым отверстием радиуса R, когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_1^0=p$, $\sigma_2^0=q$ представлены в работах [9, 12]. Ниже представлено решение, когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_6^0=l$

$$\begin{gathered}\sigma_\theta=-\left(l+\frac{3b_{3i}}{r^4}\right)f_1,\ \sigma_r=\left(l-\frac{4a_{1i}}{r^2}+\frac{3b_{3i}}{r^4}\right)f_1,\ \tau_{r\theta}=\left(l-\frac{3b_{3i}}{r^4}+\frac{2a_{1i}}{r^2}\right)f_2,\\ u_r=\frac{1}{2G}\left[rl+\frac{a_{1i}(\kappa+1)}{r}-\frac{b_{3i}}{r^3}\right]f_1,\ u_\theta=\frac{r}{2G}\left[l+\frac{a_{1i}(\kappa-1)}{r}+\frac{b_{3i}}{r^3}\right]f_2,\end{gathered} \tag{49}$$

$$\kappa = (3-\nu)\,/\,(1+\nu)\,,\ f_1 = \sin(2\theta)\,,\ f_2 = \cos(2\theta)\,.$$

Решение для свободного контура. Коэффициенты a_{1i} и b_{3i} определяются из граничных условий на контуре неподкрепленного отверстия $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ при $r = R$. Они будут такими

$$a_{1i} = lR^2, \quad b_{3i} = lR^4. \tag{50}$$

Из соотношений (50) видно, что найденные коэффициенты от упругих постоянных не зависят. Тогда и напряжения, определенные соотношениями (49), от упругих постоянных также не зависят и во времени не меняются. В представления для перемещений входят величины $1/G$ и κ/G. Операторы, соответствующие этим величинам будут входить в выражения для перемещений.

Решение для жестко подкрепленного контура. Если контур отверстия жестко подкреплен, то из граничных условий $u_r = u_\theta = 0$ при $r = R$, находим коэффициенты a_{1i} и b_{3i}. Они будут такими

$$a_{1i} = -\frac{R^2}{\overline{\kappa}}l, \quad b_{3i} = -\frac{R^4}{\overline{\kappa}}l. \tag{51}$$

Из соотношений (51) видно, что коэффициенты представлений (49) зависят от упругих постоянных. Этот факт свидетельствует об изменении в этом случае во времени как перемещений, так и напряжений. При этом, кроме приведенных выше, возникают и другие комбинации упругих постоянных: $1/k$, $1/(Gk)$. Операторы, соответствующие этим величинам будут входить в выражения для напряжений и перемещений.

6. Численные исследования. Апробация предложенного метода осуществлена проведением численных исследований для изотропной и ортотропной пластин с неподкрепленным и жестко подкрепленным контуром. Результаты для изотропной пластины были получены методом, предложенным в данной работе при использовании методики, изложенной в работе [15]. Решение упругой задачи для бесконечной изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R, когда на бесконечности заданы усилия (31), представлено в виде явной зависимости перемещений и напряжений от упругих постоянных [9, 12] и (49). Это дает возможность построить точное решение вязкоупругой задачи методом Вольтерра и провести численные исследования. Результаты исследований, в случае, когда контур не подкреплен или жестко подкреплен, использованы в виде теста при решении этих же задач методом, предложенным в настоящей работе. Сравнение результатов, полученных методом Вольтерра и предложенным в настоящей работе, показало их полное совпадение.

В табл. 1 приведены значения перемещений u_r и u_θ в характерных точках кругового отверстия изотропной медной пластинки в различные моменты времени для случая когда $\sigma_1^0 = 0$, $\sigma_2^0 = 0$, $\sigma_6^0 = l$. Результаты, полученные методом Вольтерра и предложенными в данной работе полностью совпадают. Как видно из табл. 1 стабилизация перемещений с течением времени происходит довольно медленно.

Таблица 1

Перемещения	t, час				
	0	100	500	1000	5000
$u_r \cdot G/(lR)(\theta = 45°)$	1.6	4.4509	5.1107	5.2958	5.5559
$u_\theta \cdot G/(lR)(\theta = 0°)$	1.6	4.4509	5.1107	5.2958	5.5559

Исследования, проведенные для ортотропного материала с упругими и реологическими параметрами (42) показали, что напряжения, возникающие на контуре свободного отверстия, зависят от времени. Максимальные значения напряжений σ_θ/l возникают в точках близких к $\theta = 60°$ и растут со временем. В табл. 2 эти напряжения приведены для точек контура кругового отверстия в условиях предположения $\overline{\nu}_{12}/\overline{E}_1 = \nu_{12}/E_1$ и $\overline{\nu}_{21}/\overline{E}_2 = \nu_{21}/E_2$.

Таблица 2

Напряжения	t, сек.				
	0	10	100	300	600
σ_θ/l	3.5514	3.6001	3.6104	3.6150	3.6183

Сравнение результатов, полученных по предложенной методике переменных коэффициентов, с результатами, полученными по методу Вольтерра, для случая жесткого подкрепления кругового отверстия в медной пластинке представлены в табл. 3.

Таблица 3

t, с	Метод Вольтерра			Метод переменных коэффициентов		
	$\sigma_r/l(45°)$	$\sigma_\theta/l(45°)$	$\tau_{r\theta}/l(0°)$	$\sigma_r/l(45°)$	$\sigma_\theta/l(45°)$	$\tau_{r\theta}/l(0°)$
0	1.4545	0.3636	1.4545	1.4537	0.3634	1.4545
100	1.4638	0.3913	1.4638	1.4630	0.3914	1.4639
300	1.4697	0.4091	1.4697	1.4691	0.4099	1.4700
600	1.4749	0.4248	1.4749	1.4747	0.4264	1.4756

Максимальные значения напряжений $|\sigma_r/l|$ в ортотропной пластинке с круговым жестко подкрепленным отверстием возникают в точках $\theta = \pm 45°$ и $\theta = \pm 135°$. Максимальные значения напряжений $|\sigma_\theta/l|$ получаются вблизи $\theta = \pm 73°$ и $\theta = \pm 107°$. Максимальные значения касательных напряжений $\tau_{r\theta}/l$ возникают при $\theta = 0°$ и $\theta = 180°$ и минимальные при $\theta = 90°$ и $\theta = 270°$. В табл. 4 даны соответствующие значения напряжений, изменяющиеся во времени.

Таблица 4

t, с	$|\sigma_r/l|$	$|\sigma_\theta/l|$	$\tau_{r\theta}/l(0°)$	$\tau_{r\theta}/l(90°)$
0	1.8367	1.7836	1.7255	-1.9478
100	1.8557	1.9819	1.7074	-2.0040
300	1.8622	2.0191	1.7100	-2.0144
600	1.8671	2.0460	1.7124	-2.0218

Проведенные испытания метода переменных коэффициентов упругости выявили его высокую эффективность и сравнительную, с другими методами, простоту решений задач вязкоупругости. Метод не требует решения, представленного в явном виде от упругих коэффициентов. Достаточно сформировать матрицу операторов представлений (39). Компоненты этой матрицы зависят от времени. Поэтому последующее решение задачи вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в необходимый момент времени.

1. *Айталиев Ш.М.* Развитие механики подземных и специальных сооружений в Казахстане за последние 49 лет // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 10. – С. 3–35.
2. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение. – 1980. – 247 с.
3. *Булычев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
4. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
5. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
6. *Каминский А.А.* Разрушение вязко-упругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с.
7. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
9. *Нескородев Р.Н.* О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред // Вестник Донецкого нац. университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 7–15.
10. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
11. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
12. *Шевченко В.П., Нескородев Р.Н.* Новый метод решения задач вязкоупругости анизотропных сред // Доповіді НАН України. – 2010. – № 11. – С. 51–58; 2009. – Вып. 2. – С. 7–15.
13. *Шевченко В.П., Нескородев Р.Н.* Численно-аналитический метод решения задач линейной теории вязкоупругости // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 3. – С. 42–53.
14. *Kaloerov S.A., Kolomiets M.A.* Determination of the Viscoelastic State of an Anisotropic Plate with Rigid Inclusions // J. Math. Sciences. – 2010. – **167**, № 2. – P. 242–254.
15. *Kosmodamianskii A.S., Neskorodev N.M.* The Relation Between the Equations of the Two-dimensional Theory of Elasticity for Anisotropic and Isotropic Bodies // J. Appl. Maths Mechs. – 1998. – **62**, № 2. – P. 319–321.
16. *Podil'chuk I.Yu.* Stress Concentration in Viscoelastic Ortotropic Plate with Rigid Circular Inclusion // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, № 8. – P. 660–668.
17. *Podil'chuk I.Yu.* Study of Stress Concentration in a Viscoelastic Ortotropic Plate with an Elliptical Hole // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, № 9. – P. 731–739.

R. N. Neskorodev

Method of variable elasticity coefficients solving problems of viscoelasticity.

The paper presents a method for solving the problems of the theory of viscoelasticity, based on the construction of the matrix equations of Hooke's law on the basis of integral equations of state.The elements of these matrices are constructed using fractional exponential functions Yu.N. Rabotnova and time-dependent. This allows you to solve the problems of viscoelasticity at any time as normal elasticity problem. The results of numerical studies.

Keywords: *creep, relaxation, resolvent operator, method Volterra, orthotropic viscoelastic material, variable elasticity coefficients.*

Донецкий национальный ун-т
`nromn@i.ua`

Получено 04.09.15