УДК 517.444

©2015. **В. В. Волчков, Вит. В. Волчков**

ГОМЕОМОРФИЗМЫ С ТРАНСМУТАЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЗВЕШЕННОЙ СВЕРТКИ

Изучается обобщенный лапласиан $\mathfrak{L}$ на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, инвариантный относительно взвешенных сдвигов. Получены аналоги формулы обращения и теоремы Винера–Пэли для интегрального преобразования, порожденного радиальными собственными функциями оператора $\mathfrak{L}$. Построены трансмутационные отображения для взвешенной свертки на $\mathbb{H}^2$, индуцируемой указанными сдвигами.

1. Введение. Отображения со свойством трансмутации играют важную роль в теории уравнений свертки на симметрических пространствах и их многочисленных приложениях (см. [1–5] и библиографию к этим работам). Это объясняется тем, что трансмутационное свойство позволяет произвести редукцию многих задач, связанных со сверткой, к соответствующим проблемам теории одномерных уравнений свертки (см. [1–5]). Далее такие задачи допускают полное решение с использованием результатов о свойствах пространства решений одномерных уравнений свертки, полученных в [6] (см. также [4]). Реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и сферических преобразований на симметрических пространствах (см. [7]).

Доказательства основных результатов из цитированных выше работ основаны на методах гармонического анализа и существенно используют инвариантность рассматриваемых задач относительно соответствующей группы преобразований. В ряде случаев, когда такая инвариантность нарушается, подобные методы становятся либо неприменимыми, либо недостаточно тонкими. Это относится, в частности, к ситуации, когда рассматриваются интегральные преобразования с весом, часто возникающие в приложениях.

В данной работе развивается техника трансмутационных отображений относительно свертки с весом на гиперболической плоскости. Отметим, что помимо значительного самостоятельного интереса, такая свертка возникает в проблемах геометрического описания класса голоморфных функций (см. [6, часть 5, гл. 4], [8], [9]). Полученные результаты позволяют, в частности, получить для указанной свертки аналоги результатов из [6, часть 5, гл. 4], известных ранее для инвариантного случая.

2. Формулировка основного результата. Всюду в дальнейшем, G – группа конформных автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для любых $g \in G$, $z \in \mathbb{D}$ через gz будем обозначать образ точки z при отображении g. Введем взвешенный сдвиг функции $f \in C(\mathbb{D})$ по правилу

$$f_g(z) = f(g^{-1}z)\,(1 - g0 \cdot \overline{z})^{-2}, \quad z \in \mathbb{D},\ g \in G. \tag{1}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathfrak{L}$, действующий на пространстве $C^2(\mathbb{D})$ следующим образом

$$\mathfrak{L} = 4(1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - 8(1-|z|^2)\, z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

Прямой подсчет показывает, что оператор $\mathfrak{L}$ инвариантен относительно взвешенных сдвигов (1). Пусть

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1-|z|^2)^{\frac{1-i\lambda}{2}} F\left(\frac{5-i\lambda}{2}, \frac{1-i\lambda}{2}; 1; |z|^2\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и F – гипергеометрическая функция Гаусса. Используя формулы дифференцирования для гипергеометрической функции (см. [10, формулы 2.8(25), 2.8(26)]), из (2) и (3) получаем

$$(\mathfrak{L}\mathcal{H}_\lambda)(z) = -(\lambda^2+1)\, \mathcal{H}_\lambda(z). \tag{4}$$

Как известно, для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и

$$gw = \tau \frac{w-z}{1-\overline{z}w} \tag{5}$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отображения (5) являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$ (см., например, [7, введение, § 4]). Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ в этой модели определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1-\overline{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1-\overline{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

В частности,

$$d(z,0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} = \operatorname{arth}|z| \quad \text{и} \quad |z| = \operatorname{th} d(z,0), \quad z \in \mathbb{H}^2.$$

Расстояние d и гиперболическая мера $d\mu$ на $\mathbb{H}^2$, определенная равенством

$$d\mu(z) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge \overline{dz}}{(1-|z|^2)^2},$$

инвариантны относительно группы G.

Для $r > 0$ символом B_r будем обозначать открытый гиперболический круг радиуса r с центром в нуле, т.е.

$$B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0,z) < r\}.$$

Для $r \geq 0$ обозначим $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0,z) \leq r\}$.

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$) – множество всех функций с компактными носителями из $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $C^\infty(\mathbb{R}^1)$) со стандартной топологией (см., например, [7, гл. 2, § 2, п. 2]). Для функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ положим

$$r(f) = \min\{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset \overline{B}_r\},$$

где $\operatorname{supp} f$ – носитель f. Для $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ определим величину $r(f)$ равенством

$$r(f) = \min\{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset [-r, r]\}.$$

Символами $C_\natural(\mathbb{H}^2)$, $C_\natural^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ будем обозначать соответственно пространства радиальных функций из $C(\mathbb{H}^2)$, $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ с индуцированной топологией. Аналогично, символы $C_\natural^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ обозначают пространства четных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ соответственно. Для $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ определим функцию f_0 на $[0, +\infty)$ посредством равенства

$$f_0(|z|) = f(z), \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{6}$$

Как обычно, символом $\widehat{h}$ будем обозначать преобразование Фурье функции $h \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то есть

$$\widehat{h}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\lambda t}dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Если $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то определена свертка $h_1 * h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и при этом

$$\widehat{h_1 * h_2} = \widehat{h}_1 \widehat{h}_2. \tag{7}$$

Предположим, что $f_1, f_2 \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и что хотя бы одна из функций f_1, f_2 имеет компактный носитель. Введем взвешенную свёртку $f_1 \times f_2$ следующим образом:

$$(f_1 \times f_2)(g0) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z)\, f_2(g^{-1}z)\, \frac{(1-|z|^2)^2}{(1-z\,\cdot \overline{g0})^2}\, d\mu(z), \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{8}$$

Из (8) и инвариантности меры $d\mu$ следует, что $f_1 \times f_2 \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и

$$f_1 \times f_2 = f_2 \times f_1.$$

Далее, если $f_i \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$, $i = 1, 2, 3$, и хотя бы две из функций f_i имеют компактные носители, то из (8) имеем

$$(f_1 \times f_2) \times f_3 = f_1 \times (f_2 \times f_3).$$

Далее, пусть функция $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеет компактный носитель. Введем интегральное преобразование

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f(z)\mathcal{H}_\lambda(z)d\mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Положим

$$c(\lambda)=\frac{2^{3-i\lambda}\,\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\dfrac{i\lambda-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{i\lambda+3}{2}\right)},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

где Γ – гамма-функция.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Существует гомеоморфизм* $\mathfrak{A}: C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)\to C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$*, удовлетворяющий следующим условиям.*

(i) *Для* $f\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$*,* $t\in\mathbb{R}^1$

$$\mathfrak{A}(f)(t)=\frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)\ |c(\lambda)|^{-2}\ \cos(\lambda t)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}(f)(i)\ \cos(it). \tag{10}$$

(ii) *Пусть* $f\in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$*,* $r\in(0,+\infty)$*. Тогда* $f=0$ *в* B_r *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}(f)=0$ *на* $(-r,r)$*.*

(iii) *Если* $f_1\in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$*,* $f_2\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$*, то имеет место трансмутационное соотношение*

$$\mathfrak{A}(f_1\times f_2)=\frac{1}{2\pi}\ \mathfrak{A}(f_1)*\widehat{\mathcal{F}(f_2)}.$$

(iv) *Если* $\lambda\in\mathbb{C}$*, то*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t)=\cos\lambda t.$$

3. Вспомогательные утверждения. В этом разделе мы докажем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся взвешенной сверки и интегрального преобразования $\mathcal{F}$.

Лемма 1. *Пусть* $f_1,f_2\in C_\natural\cap C^2(\mathbb{H}^2)$ *и хотя бы одна из функций* f_1*,* f_2 *имеет компактный носитель. Тогда*

$$\mathfrak{L}(f_1\times f_2)=f_1\times\mathfrak{L}f_2=(\mathfrak{L}f_1)\times f_2. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (8) может быть переписано в виде

$$(f_1\times f_2)(z)=\int\limits_G f_1(g0)\,f_2(g^{-1}z)\,\frac{(1-|g0|^2)^2}{(1-\overline{\zeta}\cdot g0)^2}\,dg, \tag{12}$$

где dg – мера Хаара на G, нормированная условием

$$\int\limits_G f(g0)dg=\int\limits_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z),\quad f\in\mathcal{D}(\mathbb{D})$$

(см. [7, введение, § 4, п. 3]). Тогда первое равенство в (11) проверяется непосредственным вычислением с использованием (12) и (2). Второе равенство в (11) следует из первого в силу коммутативности взвешенной свертки. □

Лемма 2. *Пусть функции f_1 и f_2 класса $C_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеют компактные носители. Тогда*

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2) = \mathcal{F}(f_1)\,\mathcal{F}(f_2). \tag{13}$$

Доказательство. Из равенства (9) и ассоциативности взвешенной свертки находим

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} (f_1 \times f_2)(z)\mathcal{H}_\lambda(z)\,d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z)F(z)\,d\mu(z), \tag{14}$$

где

$$F(z) = \mathcal{H}_\lambda \times f_2. \tag{15}$$

Используя лемму 1 и (4), получаем

$$\mathfrak{L}F = (\mathfrak{L}\mathcal{H}_\lambda) \times f_2 = -(\lambda^2 + 1)F. \tag{16}$$

Равенство (15) показывает, что функция F является непрерывной в нуле. Сопоставляя этот факт с соотношением (16), заключаем, что

$$F(z) = F(0)\mathcal{H}_\lambda(z) = \mathcal{F}(f_2)\mathcal{H}_\lambda(z) \tag{17}$$

(см. [7, введение, доказательство леммы 3.7]). Тогда из (14) имеем

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \mathcal{F}(f_2) \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z)\mathcal{H}_\lambda(z)\,d\mu(z) = \mathcal{F}(f_1)\,\mathcal{F}(f_2),$$

что и требовалось. □

Получим теперь формулу обращения для преобразования $\mathcal{F}$.

Предложение 1. Пусть $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и

$$\int\limits_0^\infty \lambda\,|\mathcal{F}(f)(\lambda)|\,d\lambda < +\infty. \tag{18}$$

Тогда

$$f(z) = \frac{16}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)\,\mathcal{H}_\lambda(z)\,|c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}(f)(i)\,\mathcal{H}_i(z), \tag{19}$$

при этом интеграл в (19) сходится абсолютно и локально равномерно по z.

Доказательство. При $z \in \mathbb{H}^2$, $t = \operatorname{arth}|z|$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\xi}}\; F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\xi}{2\operatorname{ch} t}\right) \cos\lambda\xi\,d\xi \tag{20}$$

(см. [4, предложение 7.3]). Положим $h(t,\xi) = \mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}t$ при $0 < \xi < t/2$ и $h(t,\xi) = 2(t-\xi)\,\mathrm{sh}\,t$ при $t/2 \le \xi < t$. Применяя теорему Лагранжа о среднем, получаем оценку

$$h(t,\xi) \le \mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}2\xi.$$

Тогда при $z \in \overline{B}_r$ из (20) и разложения функции F в гипергеометрический ряд вытекает, что

$$|\mathcal{H}_\lambda(z)| \le c_1\, e^{r|\mathrm{Im}\,\lambda|} \int\limits_0^t \mathrm{ch}^2\, t\, (h(t,\xi))^{-1/2}\, d\xi \le c_2\, e^{r|\mathrm{Im}\,\lambda|}, \tag{21}$$

где $c_1, c_2 > 0$ зависят только от r. Далее, применение формулы Стирлинга [10, п. 1.18(2)] показывает, что при $\lambda \ge 0$

$$|c(\lambda)|^{-1} \le \gamma(1+\lambda)^{1/2}, \tag{22}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от λ. Из оценок (21), (22) и условия (18) следует, что интеграл в (19) сходится абсолютно и локально равномерно по z.

Рассмотрим теперь случай, когда $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Функция $(c(-\lambda))^{-1}$ является мероморфной в $\mathbb{C}$, при этом единственной особой точкой этой функции в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ является $\lambda = i$. В этой точке функция $(c(-\lambda))^{-1}$ имеет простой полюс и

$$\operatorname*{res}_{\lambda=i}\, (c(\lambda)\, c(-\lambda))^{-1} = \frac{i}{64}. \tag{23}$$

Далее, пусть

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2};\ \alpha+1;\ -\mathrm{sh}^2\, t\right),$$

$$\Delta_{\alpha,\beta}(t) = (2\,\mathrm{sh}\,t)^{2\alpha+1}\,(2\,\mathrm{ch}\,t)^{2\beta+1}.$$

Тогда из определения $\mathcal{F}$ имеем

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int\limits_0^\infty \Phi(t)\, \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\, \Delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt,$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 2$, и

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{2^{2(\alpha+\beta)+1}}\, \frac{f_0(\mathrm{th}\,t)}{(\mathrm{th}\,t)^\alpha (\mathrm{ch}\,t)^{\alpha+\beta+2}}.$$

Отсюда, используя [11, теорема 2.3] и (23), получаем соотношение (19) для $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$.

Рассмотрим теперь общий случай. Обозначим через $F(z)$ правую часть в равенстве (19). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Тогда

$$(F \times \varphi)(z) = \frac{16}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)\, \mathcal{F}(\varphi)(\lambda)\, \mathcal{H}_\lambda(z)\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F}(f)(i)\, \mathcal{F}(\varphi)(i)\, \mathcal{H}_i(z) \tag{24}$$

(см. (17)). С другой стороны, для $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеем $f \times \varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ и по уже доказанному равенство (19) имеет место для функции $f \times \varphi$ вместо f. Сопоставляя этот факт с равенством (24) и учитывая (13), заключаем, что $F \times \varphi = f \times \varphi$. В силу произвольности $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ отсюда следует, что $F = f$ и тем самым утверждение доказано в общем случае. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ *и имеет компактный носитель. Тогда, если* $\mathcal{F}(f)(\lambda) = 0$ *при всех* $\lambda > 0$, *то* $f = 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Используя лемму 2, имеем

$$\mathcal{F}(f \times \varphi)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) = 0$$

при всех $\lambda > 0$. В силу аналитичности функции $\mathcal{F}(f \times \varphi)$ по λ последнее равенство выполнено при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $f \times \varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, из предложения 1 следует, что $f \times \varphi = 0$ в $\mathbb{H}^2$. Отсюда и из произвольности φ заключаем, что $f = 0$. $\square$

Получим теперь аналог теоремы Пэли–Винера для преобразования $\mathcal{F}$.

Предложение 2. Для того чтобы четная целая функция w являлась преобразованием $\mathcal{F}$ от функции из $C_\natural^\infty(\mathbb{H}^2)$ с носителем в $\overline{B}_r$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существовала константа $c_N > 0$ такая, что

$$|w(\lambda)| \le c_N\, \frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{(1+|\lambda|)^N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Доказательство. (i) *Необходимость.* Пусть $w = \mathcal{F}(f)$, где $f \in C_\natural^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_r$. Полагая

$$D = \frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,(1-\rho^2)^2\,\frac{d}{d\rho}\right),$$

из определения оператора $\mathfrak{L}$ имеем

$$(Df_0)(\rho) = (\mathfrak{L}f)_0(\rho). \tag{26}$$

Соотношение (9) можно переписать в виде

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = 2\pi \int\limits_0^1 \rho\, f_0(\rho)\, H_\lambda(\rho)\, d\rho, \tag{27}$$

где
$$H_\lambda(|z|) = \mathcal{H}_\lambda(z) \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}. \tag{28}$$

Интегрируя в (27) по частям с использованием соотношений

$$(1-\rho^2)\,\frac{d}{d\rho}\,H_\lambda(\rho) = 2\,(\nu+1)\,\nu\,\rho\,(1-\rho^2)^\nu\,F\left(\nu+2,\ \nu+1;\ 2;\ \rho^2\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left((1-\rho^2)^{\nu+1}\,\rho^2\,F\left(\nu+2,\ \nu+1;\ 2;\ \rho^2\right)\right) = 2H_\lambda(\rho)$$

(см. (3), (28) и [10, формулы 2.8(25), 2.8(26)]), находим

$$w(\lambda) = 2\pi\,(4\nu\,(\nu+1))^{-m}\int\limits_0^1 \rho\,(D^m f_0)(\rho)\,H_\lambda(\rho)\,d\rho, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда с учетом (26) получаем

$$w(\lambda) = (4\nu\,(\nu+1))^{-m}\,\mathcal{F}\left(\mathfrak{L}^m f\right)(\lambda), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{29}$$

В силу произвольности $m \in \mathbb{Z}_+$ отсюда, из определения $\mathcal{F}$ и из (21) получаем оценку (25).

Достаточность. Пусть w – четная целая функция, удовлетворяющая условию (25). По теореме Винера-Пэли для косинус-преобразования Фурье (см. [12, теорема 1.7.7]) существует четная функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-r, r]$ и

$$w(\lambda) = \int\limits_0^r \varphi(t)\cos(\lambda\,t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Положим
$$u(t) = F(2,\,-2;\,1/2;\,t), \quad |t| < 1.$$

Согласно [13, гл. 3, § 4, теорема 4.6] существует функция $\Phi \in C[1, +\infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int\limits_y^\infty \frac{\Phi(x)}{\sqrt{x-y}}\;u\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y}{1+x}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1+y}{2}}\right), \quad y \geq 1. \tag{30}$$

Полагая $y = \operatorname{ch} 2\xi$ и производя в интеграле (30) замену переменной $x = \operatorname{ch} 2t$, имеем

$$2^{3/2}\int\limits_\xi^\infty \frac{f_0(\operatorname{th} t)\operatorname{th} t}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\xi}}\;u\left(\frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\xi}{2\operatorname{ch} t}\right)dt = \varphi(\xi), \quad \xi \geq 0,$$

где

$$f_0(\operatorname{th} t) = \frac{\Phi(\operatorname{ch} 2t)}{1 - \operatorname{th}^2 t}.$$

Отсюда и из (20) следует, что носитель функции $f(z) = f_0(|z|)$ содержится в $\overline{B}_r$ и $\mathcal{F}(f) = w$. Кроме того, из (25) и предложения 1 заключаем, что f удовлетворяет (19). Интегрируя по частям в (20) и повторяя рассуждения из доказательства предложения 1, имеем оценку

$$\max_{z \in \overline{B}_r} \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} (\mathcal{H}_\lambda(z)) \right| \leq c\,(1 + |\lambda|)^{\alpha+\beta}\, e^{r|\operatorname{Im}\lambda|},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ. Отсюда, из (25) и (19) следует, что $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ и утверждение доказано. $\square$

Следствие 2. *Существует и единственная биекция Λ: $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2) \to \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям*

$$\widehat{\Lambda(T)} = \mathcal{F}(T) \quad \text{и} \qquad r(\Lambda(T)) = r(T) \tag{31}$$

для любой функции $T \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 2 и теоремы Винера-Пэли для косинус-преобразования Фурье. $\square$

4. Доказательство основного результата. Перейдем к доказательству теоремы 1. Для $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, $t \in \mathbb{R}^1$ определим $\mathfrak{A}(f)(t)$ равенством (10). Из предложения 1 и (22) следует, что $\mathfrak{A}(f) \in C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$. Продолжим отображение $\mathfrak{A} : \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2) \to C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$ на пространство $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$.

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, $r \in (0, +\infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $f = 0$ *в* B_r;

(ii) $\mathfrak{A}(f) = 0$ *на* $(-r; r)$.

Доказательство. Из предложения 1, (6) и (20) имеем

$$f_0(\operatorname{th}\rho) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^\rho \mathfrak{A}(f)(t)\, \frac{\operatorname{ch}^2 \rho}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2t}}\; F\left(2, -2; \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch}\rho - \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{ch}\rho}\right) dt \tag{32}$$

для любого $\rho > 0$. Если $f = 0$ в B_r, отсюда получаем

$$\int_0^\rho \mathfrak{A}(f)(t)\, K(\rho, t)(\rho - t)^{-\frac{1}{2}} dt = 0, \quad \rho \in (0, r),$$

для некоторой функции $K \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Из данного интегрального уравнения следует (см. [13, гл. 3, § 4, теорема 4.6]), что $\mathfrak{A}(f)(t) = 0$ на $(0, r)$. Тем самым, в силу четности функции $\mathfrak{A}(f)$, убеждаемся в справедливости импликации (i) $\Rightarrow$ (ii). Обратная импликация очевидна ввиду равенства (32). □

Утверждение леммы 3 позволяет продолжить оператор $\mathfrak{A}$ на пространство $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$ по формуле

$$\mathfrak{A}(f)(t) = \mathfrak{A}(f\eta)(t), \quad f \in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2),\ t \in \mathbb{R}^1, \tag{33}$$

где η – произвольная функция класса $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, равная единице в $B_{|t|+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда $\mathfrak{A}(f) \in C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$ и

$$\mathfrak{A}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}(f)|_{(-r,r)} \quad \text{для любого} \quad r > 0.$$

Определение оператора $\mathfrak{A}$ на пространстве $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$ показывает (см. (33)), что утверждение (iii) достаточно установить для $f_1 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. В этом случае из (10), леммы 2 и (31) имеем

$$\mathfrak{A}(f_1 \times f_2)(t) = \frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f_1)(\lambda)\,\widehat{\Lambda(f_2)}(\lambda)\,|c(\lambda)|^{-2}\,\cos(\lambda t)\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}(f_1)(i)\,\widehat{\Lambda(f_2)}(i)\,\cos(it), \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{34}$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{A}(f_1) * \Lambda(f_2)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{A}(f_1)(\xi)\,\Lambda(f_2)(t-\xi)\,d\xi. \tag{35}$$

Подставляя соотношение (10) в правую часть равенства (35), с учетом (7) и четности функции $\Lambda(f_2)$ заключаем, что левые части равенств (34) и (35) совпадают. Отсюда следует утверждение (iii) в теореме 1.

Далее, из (33) вытекает, что равенство (32) выполнено для любой функции $f \in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$. Из (32) и интегрального представления (20) имеем

$$\int\limits_0^\rho \left(\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t) - \cos(\lambda t)\right)(\mathrm{ch}2\rho - \mathrm{ch}2t)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(2,\ -2;\ \frac{1}{2};\ \frac{\mathrm{ch}\rho - \mathrm{ch}t}{2\,\mathrm{ch}\rho}\right) dt = 0$$

для любого $\rho > 0$. Как и в доказательстве леммы 3, отсюда следует (iv).

Для доказательства утверждений (i) и (ii) остается проверить, что преобразование $\mathfrak{A}$ осуществляет гомеоморфизм между $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$ и $C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$.

Для $F \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ положим

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{F}(\lambda)\,\mathcal{H}_\lambda(z)\,d\lambda, \quad z\in\mathbb{H}^2. \tag{36}$$

Пусть $f_1 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$, $f_2 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Используя соотношения (36), (7) и (17), находим

$$(\mathfrak{B}(f_1)\times f_2)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{f_1}(\lambda)\,(\mathcal{H}_\lambda\times f_2)(z)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{f_1}(\lambda)\,\mathcal{F}(f_2)(\lambda)\mathcal{H}_\lambda(z)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{f_1}(\lambda)\,\widehat{\Lambda(f_2)}(\lambda)\,\mathcal{H}_\lambda(z)\,d\lambda = \mathfrak{B}(f_1 * \Lambda(f_2))(z). \tag{37}$$

Далее, из (36), (20) и формулы обращения для косинус-преобразования Фурье имеем равенство

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{2^{\,3/2}}{\pi}\int\limits_0^{\mathrm{arth}\,\rho} F(t)\,(\mathrm{ch}2\rho - \mathrm{ch}2t)^{-\frac{1}{2}}\,F\left(2,\,-2;\,\frac{1}{2};\,\frac{\mathrm{ch}\rho - \mathrm{ch}t}{2\mathrm{ch}\rho}\right)dt.$$

Из последнего равенства следует, что если $F\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ и $r>0$, то $F=0$ на $(-r,r)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}(F)=0$ в B_r (см. доказательство леммы 3. Продолжим оператор $\mathfrak{B}$ на пространство $C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$ по формуле

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \mathfrak{B}(F\eta)(z), \quad F\in C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1), \quad z\in\mathbb{H}^2,$$

где η – произвольная функция из $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$, равная единице в некоторой окрестности отрезка $[-\mathrm{arth}\,|z|, \mathrm{arth}\,|z|]$. Из вышесказанного следует, что такое продолжение не зависит от η. При этом $\mathfrak{B}(F)\in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$, $\mathfrak{B}(F|_{(-r,r)}) = \mathfrak{B}(F)|_{B_r}$ для любого $r>0$ и равенство (37) выполнено для $f_1\in C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$, $f_2\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Повторяя теперь рассуждения из [4, доказательство теоремы 9.5], получаем, что $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^{-1}$ и теорема 1 полностью доказана.

1. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Мат. сборник. – 2008. – **199**, № 8. – С. 29–60.
2. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group // J. Analyse Math. – 2008. – **105**. – P. 43–124.
3. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Об одной проблеме Беренстейна-Гэя и ее обобщениях // Известия РАН. Сер. матем. – 2010. – **74**, № 4. – С. 33–62.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer–Verlag, 2009. – 671 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.

6. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. +++
7. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.
8. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al). – Dordrecht: Kluwer, 1992. – P. 185–194.
9. *Berenstein C.A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk // Israel J. Math. – 1994. – **86**. – P. 61–106.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296, 296 с.
11. *Koornwinder T.H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications (R.A. Askey et al. (eds.)). – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984. – P. 1–85.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986, 462 с.
13. *Helgason S.* Integral Geometry and Radon Transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Homeomorphisms with the transmutation property with respect to weighted convolution.

Ageneralizedlaplasian $\mathfrak{L}$ on hyperbolic plane invariant over weighted shifts is studied. For integral transform induced by eigenfunctions of $\mathbb{H}^2$ we obtain the analogues of the inversion formula and the Paley–Wiener theorem.Transmutation mappings for a weighted convolution on a hyperbolic plane induced by weighted shifts are constructed.

Keywords: *hyperbolic plane, transmutation property, generalized convolution.*

Донецкий национальный ун-т

Получено 30.09.15

valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com