

УДК 531.38

©2015. А. И. Андрюхин, С. Н. Судаков

## ДИНАМИКА ЖИДКОГО ЭЛЛИпсоИДА С МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПЛАНЕТЫ ЮПИТЕР

Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – твердый однородный шар. Для решения уравнений использован численный метод Рунге–Кутты. В качестве примера приведен расчет движения системы с массово-геометрическими параметрами системы Юпитер–Солнце.

*Ключевые слова:* задача двух тел, жидкий эллипсоид, однородное вихревое движение.

Начиная с Ньютона, задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов привлекала внимание многих ученых и была подробно исследована [1, 2, 5, 6, 8, 9]. Гораздо менее изучены важные для астрономии задачи о движении нескольких взаимогравитирующих жидких и твердых тел. Здесь широко известна проблема Роша об определении формы Луны [6]. Е.В. Петкевичем [3–4] получены уравнения движения для задачи двух жидких тел. Поскольку эти проблемы имеют фундаментальное значение для теории вращающихся звезд и жидких планет, представляется важным продолжить эти исследования.

Ниже рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – твердый однородный шар. Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к шару по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [7]. Составлены уравнения движения, которые решались численным методом Рунге–Кутты. В качестве примера рассмотрен случай движения с массово-геометрическими параметрами системы Юпитер–Солнце.

**1. Системы координат.** Обозначим через  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  обозначим подвижную прямоугольную систему координат, начало которой  $O_1$  совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Через  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида.

**2. Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости.** Положение точки  $O_1$  определим сферическими координатами  $r_1, \varphi_1, \theta_1$ , где  $\theta_1$  – угол между плоскостью  $O\xi_1\xi_2$  и радиусом-вектором  $OO_1$ ;  $\varphi_1$  – угол между полуосью  $O\xi_1$  и проекцией вектора  $OO_1$  на плоскость  $O\xi_1\xi_2$ . Тогда координаты точки  $O_1$  в осях  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выразятся формулами

$$\xi_1 = r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_2 = r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_3 = r_1 \sin \theta_1. \quad (1)$$

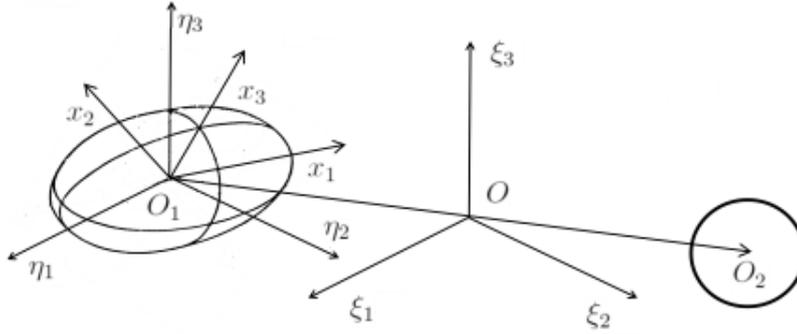


Рис. 1. Используемые системы координат

Дифференцируя формулы (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки  $O_1$ ) на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по  $t$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + \\ &\quad + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_3 &= \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Положение осей  $O_1x_1x_2x_3$  относительно  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  определим углами Кардана  $\alpha, \beta, \varphi$ . Матрица перехода  $A = (a_{ij})$  от осей  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  к  $O_1x_1x_2x_3$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \varphi & \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi & \sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi \\ -\cos \beta \sin \varphi & \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi & \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода  $A$ , находим проекции ускорения точки  $O_1$  на оси  $O_1x_1x_2x_3$

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

**3. Координаты центра масс шара.** Центр масс шара обозначим через  $O_2$ . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение

$$m_1r_1 = m_2r_2, \quad (5)$$

где  $m_1$  – масса жидкого эллипсоида,  $m_2$  – масса шара,  $r_i = |\overline{OO_i}|$ ,  $i = 1, 2$ . Точки  $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  при движении лежат на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки  $O_2$  в осях  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ :

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1}r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1}r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1}r_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $m = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ . Тогда в осях  $O_1x_1x_2x_3$  точка  $O_2$  будет иметь координаты

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

#### 4. Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны шара.

Проекции на оси  $O_1x_1x_2x_3$  силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны шара, определяются формулами

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2[(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho$  – плотность жидкости,  $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$ ,  $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$ ,  $\tilde{x}_i = x_i/r$ ,  $x_1, x_2, x_3$  – координаты рассматриваемой частицы жидкости в осях  $Ox_1x_2x_3$ .

**5. Линеаризация.** В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние  $r$  между точками  $O_1$  и  $O_2$  настолько велико, что можно провести линеаризацию величин  $f_i$  по  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь

$$f_1 = G\rho m_2 \frac{x_{21}}{r^3} + \frac{G\rho m_2}{r^5}(3x_{21}^2 + r^2)x_1 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5}x_2 + 3G\rho m_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5}x_3 \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине  $m_2$  и к первому индексу величин  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ .

**6. Уравнения гидродинамики.** Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu - \\ &- \mathbf{w} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – скорость движения жидкости относительно осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – координатный вектор,  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость осей  $O_1x_1x_2x_3$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  – полудлины главных осей жидкого эллипсоида,  $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$  – абсолютное ускорение точки  $O_1$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ .

Кинематическую вязкость  $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  определяем выражением

$$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где  $\nu_0 = \text{const}$ . Границу жидкости в осях  $O_1x_1x_2x_3$  задаем уравнением

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости  $\nu = 0$ .

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости  $\sigma$  имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал  $\Phi$  гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

где

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D},$$

$$D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

**Замечание.** Задание кинематической вязкости как функции координат, на первый взгляд, может показаться неестественным. Однако в дальнейшем будут рассматриваться только однородные вихревые движения эллипсоидальной массы жидкости, при которых вязкость имеет одно и то же значение на каждом эллипсоиде из семейства соосных концентрических эллипсоидов, подобных границе жидкости.

Частицы жидкости, лежащие в какой-то момент времени на одном из таких эллипсоидов, никогда не сходят с него. То есть вязкость каждой частицы жидкости остается постоянной.

**6. Уравнения движения.** В случае однородного вихревого движения компоненты скорости  $v_1, v_2, v_3$  частицы жидкости с координатами  $x_1, x_2, x_3$  и давление  $p$  ищем в виде

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1}x_1 - \frac{c_1}{c_2}\omega_3^*x_2 + \frac{c_1}{c_3}\omega_2^*x_3 \quad (123), \quad p = -p_0(t)\left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1\right), \quad (9)$$

где  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  и  $p_0(t)$  – неизвестные функции времени  $t$ . Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\frac{c_3}{c_1}\omega_2^*\omega_2 - 2\frac{c_2}{c_1}\omega_3^*\omega_3 +$$

$$+ 2\pi\rho G\alpha_1 - \frac{Gm_2}{r^5}(3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{\dot{c}_1}{c_2}\omega_3^* - \frac{c_1}{c_2}\dot{\omega}_3^* - \frac{\dot{c}_1}{c_2}\omega_3^* + \frac{c_1}{c_2}\omega_1^*\omega_2^* +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2 + 2\frac{c_3}{c_2}\omega_1^*\omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2}\omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{13} = \frac{\dot{c}_1}{c_3}\omega_2^* + \frac{c_1}{c_3}\dot{\omega}_2^* + \frac{\dot{c}_1}{c_3}\omega_2^* + \frac{c_1}{c_3}\omega_1^*\omega_3^* +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 + \frac{2c_3}{c_3}\omega_2 + \frac{2c_2}{c_3}\omega_1^*\omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не распространяется на  $m_2$  и первые индексы символов  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ .

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях  $x_1, x_2, x_3$  из области занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $k_{ij}$  определены выражениями (11). Из условия несжимаемости следует

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = \text{const}. \quad (13)$$

Движение осей  $O_1x_1x_2x_3$  относительно  $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$  определяются кинематическими уравнениями, которые запишем в виде

$$\dot{\alpha} = (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) / \cos \beta,$$

$$\dot{\beta} = \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – проекции угловой скорости осей  $O_1x_1x_2x_3$  на эти оси.

Соотношения (12)–(14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных  $\omega_i^*, \omega_i, c_i, i = 1, 2, 3, p_0, \alpha, \beta, \varphi, r_1, \varphi_1, \theta_1$ , и после задания начальных условий, они полностью описывают движение системы.

**7. Уравнения движения в нормальной форме.** Уравнения  $k_{23} = 0, k_{32} = 0$  (123) представим в виде

$$\frac{c_2}{c_3} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{23}, \quad \frac{c_3}{c_2} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{32} \quad (123), \quad (15)$$

где

$$f_{23} = -\frac{2\dot{c}_2}{c_3} \omega_1^* + \frac{c_2}{c_3} \omega_2^* \omega_3^* + \omega_2 \omega_3 + 2\frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_3 - 2\frac{\dot{c}_3}{c_3} \omega_1 + \\ + \frac{2\nu_0}{c_3^2} \left( \frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* - 3Gm_2 \frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

$$f_{32} = -\frac{2\dot{c}_3}{c_2} \omega_1^* - \frac{c_3}{c_2} \omega_2^* \omega_3^* - \omega_2 \omega_3 - 2\frac{c_1}{c_2} \omega_3^* \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_1 - \\ - \frac{2\nu_0}{c_2^2} \left( \frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* + 3Gm_2 \frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123). \quad (16)$$

Разрешая систему (15) относительно  $\omega_1^*, \omega_1$ , получаем

$$\dot{\omega}_1^* = \frac{c_2 c_3}{c_2^2 - c_3^2} (f_{23} - f_{32}), \quad \dot{\omega}_1 = \frac{c_2^2 f_{32} - c_3^2 f_{23}}{c_2^2 - c_3^2} \quad (123). \quad (17)$$

Теперь исключим переменные  $p_0$  и  $\dot{c}_3$  из уравнений  $k_{ii} = 0, i = 1, 2$ . Из уравнения  $k_{33} = 0$  находим

$$\frac{2p_0}{\rho} = \ddot{c}_3 c_3 + c_3^2 f_{33}, \quad (18)$$

где

$$f_{33} = -\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2} - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\frac{c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_1 - 2\frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_2 + \\ + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_3}{c_3^2} + 2\pi\rho G\alpha_3 - \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{23}^2 - r^2) \quad (123).$$

Из условия (13) следуют равенства

$$c_3 = R^3 c_1^{-1} c_2^{-1}, \quad \dot{c}_3 = -R^3 (c_1^{-2} c_2^{-1} \dot{c}_1 + c_1^{-1} c_2^{-2} \dot{c}_2), \quad (19)$$

$$\ddot{c}_3 = \frac{R^3}{c_1 c_2} \left( -\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right). \quad (20)$$

Используя (20), запишем выражение (18) в виде

$$\frac{2p_0}{\rho} = \frac{R^6}{c_1^2 c_2^2} \left( -\frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \frac{\ddot{c}_2}{c_2} + \frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{2\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + c_3^2 f_{33}. \quad (21)$$

При помощи (21), представим уравнения  $k_{11} = 0$  и  $k_{22} = 0$  в виде

$$\left( 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \right) \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_1, \quad \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \frac{\ddot{c}_1}{c_1} + \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = F_2, \quad (22)$$

где

$$F_1 = \frac{2R^6}{c_1^4 c_2^2} \left( \frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_1^2} f_{33} - f_{11}, \quad (23)$$

$$F_2 = \frac{2R^6}{c_1^2 c_2^4} \left( \frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_2^2} f_{33} - f_{22}.$$

Разрешая систему (22) относительно  $\ddot{c}_1/c_1$  и  $\ddot{c}_2/c_2$ , получаем

$$\frac{\ddot{c}_1}{c_1} = \left[ \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} \right) F_1 - \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} F_2 \right] \Delta^{-1}, \quad \frac{\ddot{c}_2}{c_2} = \left[ \left( 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} \right) F_2 - \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4} F_1 \right] \Delta^{-1}, \quad (24)$$

$$\Delta = 1 + \frac{R^6}{c_1^4 c_2^2} + \frac{R^6}{c_1^2 c_2^4}.$$

Уравнения  $k_{0i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  записываем в виде

$$w_{x_i} = Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где  $w_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекции абсолютного ускорения точки  $O_1$  на оси  $O_1 x_1 x_2 x_3$ , которые определяются формулами (3), (4). Величины  $x_{2i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определены формулами (7). Умножая уравнения (25) слева на матрицу  $A^T$ , обратную матрице  $A$ , приводим их к виду

$$w_i = \frac{Gm_2}{r^3} \sum_{j=1}^3 a_{ji} x_{2j} \quad i = 1, 2, 3.$$

Учитывая (7), перепишем эти уравнения так

$$w_j = \frac{Gm_2}{r^3} \eta_{2j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $\eta_{2j}$  определены формулами (6). Используя (3) и (6), запишем последние уравнения в виде

$$\begin{aligned} & \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ & - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\
 -r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
 -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 r_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 &= -\frac{Gm_2}{mr^3}r_1 \sin \theta_1.
 \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно  $\ddot{r}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\theta}_1$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_1 &= r_1(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2) - \frac{Gm_2}{mr^3}r_1, \\
 \ddot{\varphi}_1 r_1 \cos \theta_1 &= 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \theta_1, \\
 \ddot{\theta}_1 r_1 &= -r_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Уравнения (26) представляют собой уравнения движения в задаче двух тел. Второе из этих уравнений может быть проинтегрировано и представлено в виде

$$\dot{\varphi}_1 r_1^2 \cos^2 \theta_1 = \text{const.}$$

Уравнения (14), (17), (24), (26) разрешены относительно старших производных и представляют собой систему четырнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырнадцати неизвестных  $\alpha, \beta, \varphi, \omega_i^*, \omega_i, i = 1, 2, 3, c_1, c_2, r_1, \varphi_1, \theta_1$ , которая после задания начальных условий, полностью описывает движение рассматриваемой механической системы.

При численном интегрировании уравнений (14), (17), (24), (26) вводим безразмерные переменные  $\tau = t/T, \zeta_i = c_i/R, u_i = d\zeta_i/d\tau, \tilde{\omega}_i^* = T\omega_i^*, \tilde{\omega}_i = T\omega_i, i = 1, 2, 3, \tilde{r}_1 = r_1/R$ , где  $T$  – размерность времени,  $R = \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}$ . Для решения уравнений воспользуемся численным методом Рунге–Кутты 4–5. На рис. 2 приведены графики решения  $\zeta_1(\tau), \zeta_2(\tau)$  для системы с массово-геометрическими параметрами

$$\begin{aligned}
 T &= 24 \cdot 60^2 \text{ с}, \quad m_1 = 1.899414000 \cdot 10^{27} \text{ кг}, \quad m_2 = 1.988686458 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \\
 R &= 6.371000685 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad \rho = 1327.708338 \text{ кг/м}^3, \quad G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \\
 \nu_0 &= 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^2/\text{с}
 \end{aligned}$$

и следующими начальными данными при  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= 1.0384178705, \quad \zeta_2 = 1.038417869425, \quad \frac{d\zeta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = 0, \\
 \Omega_1 &= -0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 15.18589420, \\
 \omega_1 &= 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.00004832107001,
 \end{aligned}$$

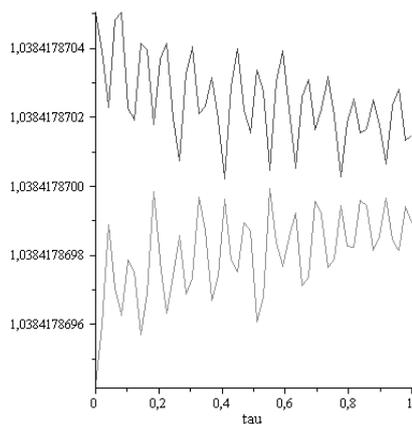


Рис. 2. Графики  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  
 $\zeta_1(\tau)$  – верхний график,  
 $\zeta_2(\tau)$  – нижний график

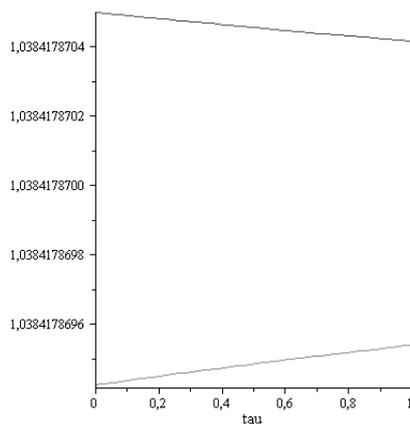


Рис. 3. Графики  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при  $\nu_0 = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  
 $\zeta_1(\tau)$  – верхний график,  
 $\zeta_2(\tau)$  – нижний график

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \varphi = 0,$$

$$r_1 = 4670670.751, \quad \varphi_1 = 0, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = 0.00004832107001, \quad \frac{d\theta_1}{d\tau} = 0.$$

На рис. 3 показаны графики переменных  $\zeta_1(\tau)$  и  $\zeta_2(\tau)$  при тех же значениях параметров и тех же начальных условиях, но при значительно более высоком значении кинематической вязкости  $\nu_0 = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}$ .

**Выводы.** Составлены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид, а другое – твердый однородный шар. Составлена компьютерная программа для решения уравнений движения. Сделаны пробные расчеты плоского движения при массово-геометрических параметрах системы Юпитер Солнце. Пробные расчеты показали, что полученные уравнения движения достаточно хорошо решаются численным методом Рунге–Кутты. Однако расчеты требуют значительных затрат машинного времени, что связано с наличием особенности в уравнениях (17) при  $c_1 = c_2$ . Представляет интерес провести более детальных расчеты на больших временных интервалах, а также исследовать численно общий случай движения.

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.) Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрон. журн. – **3**, № 9. – 1977. – С. 424–428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух жидких тел // Письма в Астрон. журн. – **3**, № 11. – 1977. – С. 522–525.

5. *Стеклов В.А.* Работы по механике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 492 с.
6. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. – М.: Гостехиздат, 1949. – **3**. – 289 с.
7. *Судаков С.Н.* О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217–226.
8. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.
9. *Ядрицкий В.С.* Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 298 с.

**A. I. Andrukhin, S. N. Sudakov**

**The dynamics of liquid ellipsoid with the mass-geometrical parameters of the planet Jupiter.**

The problem of two bodies, one of which is the liquid ellipsoid and other is the homogeneous rigid ball, is investigating in this paper. The motion of liquid ellipsoid assumes to be uniform rotational flow, and the liquid has the stratified viscosity that makes possible such motion. The equations of motions are obtained and solved by Runge–Kutta method for mass-geometric parameters of Jupiter-Sun system.

*Keywords:* the problem of two bodies, ellipsoidal mass of liquid, uniform rotational flow.

Ин-т прикл. математики и механики, Донецк  
sudakov@iamm.su

Получено 19.12.14