УДК 517.9

©2014. **С. М. Чуйко**

ОПЕРАТОР ГРИНА ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Найдены конструктивные условия существования, а также обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи, а также оператор Грина задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием.

Ключевые слова: *нетеровы краевые задачи, матричные дифференциальные уравнения, импульсное воздействие.*

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1, 2, 3]

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha,\beta)}(t)\right),\ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1\Big\{\ [a;b\ ] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ \alpha,\beta = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

матричного дифференциального уравнения [4]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t),\ t \neq \tau_i,\ a < \tau_i < b,\ \Phi(t) \in \mathbb{C}[a,b] \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta Z(\tau_i) = S_i\ Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i + \Psi_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p\ , \tag{2}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A},\ \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{3}$$

Здесь $A, B, S_i, R_i, \Psi_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – постоянные $(n\times n)$-матрицы. Условия разрешимости и структура решения системы (1) были приведены в монографии [4]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения системы (1) получены в статье [5] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [6]. Функционал, определяющий импульсное воздействие (2), является обобщением использованного ранее выражения [1, 2, 3]; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot):\ C^1\Big\{\ [a;b\ ] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\} \to \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Как известно [4], общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B,\ Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$X_0(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t),\ \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ – нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t),\ U(a) = I_n,\ V'(t) = BV(t),\ V(a) = I_n.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ задачи Коши [5]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t),\ Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$Z(t,\Theta) = X_0(t,\Theta) + K\Big[\Phi(s)\Big](t),\ \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где

$$K\Big[\Phi(s)\Big](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)\Phi(s)V(t)V^{-1}(s)ds$$

– оператор Грина, определяющий гладкое частное решение задачи Коши для матричного уравнения (1).

2. Обобщенный оператор Грина задачи Коши. Общее решение однородной части задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) определяет следующая лемма.

Лемма 1. *Общее решение*

$$Z(t) = \Big(z^{(\alpha,\beta)}(t)\Big),\ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1\Big\{\ [a;b\ ] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ \alpha,\beta = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

задачи Коши

$$Z(a) = \Theta,\ \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B,\ t \neq \tau_i \in [a,b],\ \Delta Z(\tau_i) = S_i\ Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i \tag{4}$$

имеет вид

$$X(t,\Theta) = \begin{cases} X_0(t,\Theta), & t \in [a;\tau_1[, \\ U(t)W_1(\Theta)V(t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\ , \\ U(t)W_p(\Theta)V(t), & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \tag{5}$$

где $W_i(\Theta)$ – постоянные $(n\times n)-$ мерные матрицы:

$$W_i(\Theta) := U^{-1}(\tau_i)\Big[(I_n + S_i)X(\tau_i - 0,\Theta) + X(\tau_i - 0,\Theta)R_i\Big]V^{-1}(\tau_i),\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p.$$

При условии $\det\Theta \neq 0$ матрица $X(t,\Theta)$ представляет собой фундаментальную систему решений однородной части задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для однородного матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). Матрицу

$\Xi(t) := X(t, I_n)$ назовем нормальной $\Xi(a) = I_n$ фундаментальной матрицей однородного матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). Утверждение леммы 1 является обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). При условии $\det \Theta = 0$ матрица $X(t, \Theta)$ вырождена и представляет собой аналог фундаментальной системы решений однородной части задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для однородного дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7, 8].

Пример 1. Условия леммы 1 выполнены для задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B, \ t \in [0; 3\pi], \ t \neq \tau_1 := \pi, \ t \neq \tau_2 := 2\pi, \tag{6}$$

$$\Delta Z(\tau_i) = S_i \ Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i, \ i = 1, \ 2, \ Z(0) = \Theta := I_3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение $Z(t)$ задачи Коши $Z(0) = I_3$ для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6) при $t \in [0; \pi[$ имеет вид

$$Z(t) = U(t) \cdot V(t),$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t & 5\sin t & 3 - 3\cos t - 4\sin t \\ -\sin t & \cos t + 2\sin t & 2 - 2\cos t - \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– нормальные $U(0) = I_3, \ V(0) = I_3$ фундаментальные матрицы. Обозначим вектор-столбцы

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи Коши $Z(0, \Theta) = I_3$ для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6)

$$X(t, \Theta) = \begin{pmatrix} X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 & X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 & X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 \end{pmatrix}, \ \Theta = I_3$$

определяют матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ W_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь при $t \in [0; \pi[$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -2\cos t + 3\cos 3t + \sin t - \sin 3t \\ -\cos t + \cos 3t - \sin 3t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\cos t + \cos 3t - 2\sin t + 3\sin 3t \\ \cos 3t - \sin t + \sin 3t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 3 - 3\cos t - 4\sin t \\ 2 - 2\cos t - \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \ \Theta = I_3.$$

Аналогично, при $t \in [\pi; 2\pi[$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -6\cos t + 3\cos 2t + 4\cos 3t + 3\sin t - 3\sin 3t \\ -3\cos t + 2\cos 2t + \cos 3t - 2\sin 3t \\ \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3\cos t + 3\cos 3t - 6\sin t + 3\sin 2t + 4\sin 3t \\ 2\cos 3t - 3\sin t + 2\sin 2t + \sin 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -3(-1 + \cos t + 8\sin t \\ 2 - 6\cos t - 9\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \ \Theta = I_3$$

и при $t \in [2\pi; 3\pi]$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 8\cos t + 6\cos 2t - 12\cos 3t + \sin t - 6\sin 2t + 4\sin 3t \\ 3\cos t + 4\cos 2t - 4\cos 3t + 2\sin t - 4\sin 2t + 4\sin 3t \\ 2(\cos 2t - \sin 2t) \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\cos t + 6\cos 2t - 4\cos 3t + 8\sin t + 6\sin 2t - 12\sin 3t \\ -2\cos t + 4\cos 2t - 4\cos 3t + 3\sin t + 4\sin 2t - 4\sin 3t \\ 2(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 6 - 5\cos t - 20\sin t \\ 4 - 6\cos t - 7\sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \ \Theta = I_3.$$

Общее решение неоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) определяет следующая лемма.

Лемма 2. *Общее решение*

$$Z(t)=\Big(z^{(\alpha,\beta)}(t)\Big),\ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot)\in C^1\Big\{\ [a;b\ ]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\},\ \alpha,\beta=1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

задачи Коши $Z(a)=\Theta$ *для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) имеет вид*

$$Z(t,\Theta)=X(t,\Theta)+K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t),\ \Theta\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

где

$$K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)=\begin{cases} K\Big[\Phi(s)\Big](t), & t\in[a;\tau_1[,\\ U(t)\Gamma_1V(t)+K\Big[\Phi(s)\Big](t), & t\in[\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\ ,\\ U(t)\Gamma_pV(t)+K\Big[\Phi(s)\Big](t), & t\in[\tau_p;b],\end{cases}$$

– оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2), Γ_i *– постоянные* $(n\times n)-$ *мерные матрицы:*

$$\Gamma_i:=U^{-1}(\tau_i)\Big\{S_iK\Big[\Phi(s)\Big](\tau_i)+K\Big[\Phi(s)\Big](\tau_i)R_i+\Phi_i\Big\}V^{-1}(\tau_i),\ i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p.$$

Утверждение леммы 2 является обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). При условии $\det\Theta=0$ оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2) представляет собой аналог оператора Грина задачи Коши для дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7,8].

Пример 2. Условия леммы 2 выполнены для задачи

$$dZ(t)/dt=AZ(t)+Z(t)B+\Phi(t),\ t\in[0;3\pi],\ t\neq\tau_1:=\pi,\ t\neq\tau_2:=2\pi, \tag{7}$$

$$\Delta Z(\tau_i)=S_i\ Z(\tau_i-0)+Z(\tau_i-0)R_i+\Psi_i,\ i=1,\ 2,\ Z(0)=\Theta:=I_3,$$

где

$$A=\begin{pmatrix}-2&5&-4\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ B:=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ S_1:=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R_1:=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ S_2:=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ R_2:=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку однородная часть задачи Коши (7) совпадает с задачей Коши (6), постольку нам известны нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$, а также фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части задачи Коши (7). Оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения с импульсным воздействием (7) представим в виде

$$K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big](t) = \Big(\ K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big]\mathcal{P}_1 \quad K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big]\mathcal{P}_2 \quad K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big]\mathcal{P}_3 \ \Big),$$

где при $t \in [0; \pi[$:

$$K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big](t)\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-12\cos t - 8t\cos t + 12\cos 3t - 35\sin t + \\ +24t\sin t + 24\sin 2t + \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(-5\cos t - 8t\cos t + 5\cos 3t - 18\sin t + \\ +8t\sin t + 16\sin 2t - 2\sin 3t) \\ -\sin t + \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big](t)\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(25\cos t - 24t\cos t - 24\cos 2t - \cos 3t - 12\sin t - \\ -8t\sin t + 12\sin 3t) \\ \frac{1}{8}(14\cos t - 8t\cos t - 16\cos 2t + 2\cos 3t + \sin t - \\ -8t\sin t + 5\sin 3t) \\ \cos t - \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big](t)\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-7t\cos t + 9\sin t - 6t\sin t) \\ \frac{1}{2}(-4t\cos t + 4\sin t - t\sin t) \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $t \in [\pi; 2\pi[$:

$$K\Big[\Phi; S_i; R_i\Big]\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-80\cos t + 6\pi\cos t - 8t\cos t + 80\cos 3t - 34\pi\cos 3t - \\ -31\sin t + 32\pi\sin t + 24t\sin t - 35\sin 3t - 32\pi\sin 3t) \\ \frac{1}{8}(-33\cos t - 4\pi\cos t - 8t\cos t + 25\cos 3t - 20\pi\cos 3t - \\ -30\sin t + 14\pi\sin t + 8t\sin t - 30\sin 3t - 6\pi\sin 3t) \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi; S_i; R_i\Big]\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(21\cos t - 32\pi\cos t - 24t\cos t + 35\cos 3t + 32\pi\cos 3t - \\ -80\sin t + 6\pi\sin t - 8t\sin t + 80\sin 3t - 34\pi\sin 3t) \\ \frac{1}{8}(26\cos t - 14\pi\cos t - 8t\cos t + 30\cos 3t + 6\pi\cos 3t - \\ -27\sin t - 4\pi\sin t - 8t\sin t + 25\sin 3t - 20\pi\sin 3t) \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)\mathcal{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(-2\pi\cos t-7t\cos t-\sin t-26\pi\sin t-6t\sin t)\\ \frac{1}{2}(-2\cos t-6\pi\cos t-4t\cos t-10\pi\sin t-t\sin t)\\ \sin t\end{pmatrix}$$

и при $t\in[2\pi;3\pi]$:

$$K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)\mathcal{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}(-132\cos t+234\pi\cos t-8t\cos 3t+24\cos 2t+\\ +172\cos 3t-310\pi\cos 3t-75\sin t+208\pi\sin t+\\ +24t\sin t-48\sin 2t+41\sin 3t-100\pi\sin 3t)\\ \frac{1}{8}(-45\cos t+52\pi\cos t-8t\cos 3t+16\cos 2t+\\ +77\cos 3t-144\pi\cos 3t-58\sin t+130\pi\sin t+\\ +8t\sin t-32\sin 2t-18\sin 3t+22\pi\sin 3t)\\ \cos 2t-\sin t-2\sin 2t\end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)\mathcal{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}(65\cos t-208\pi\cos t-24t\cos t+48\cos 2t-\\ -41\cos 3t+100\pi\cos 3t-132\sin t+234\pi\sin t-\\ -8t\sin t+24\sin 2t+172\sin 3t-310\pi\sin 3t)\\ \frac{1}{8}(54\cos t-130\pi\cos t-8t\cos t+32\cos 2t+\\ +18\cos 3t-22\pi\cos 3t-39\sin t+52\pi\sin t-\\ -8t\sin t+16\sin 2t+77\sin 3t-144\pi\sin 3t)\\ \cos t+2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)\mathcal{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(6+10\cos t-14\pi\cos t-7t\cos t+\\ +29\sin t-112\pi\sin t-6t\sin t)\\ \frac{1}{2}(4+8\cos t-28\pi\cos t-4t\cos t+\\ +10\sin t-42\pi\sin t-t\sin t)\\ 1+\sin t\end{pmatrix}.$$

3. Оператор Грина линейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием. Подставляя общее решение

$$Z(t,\Theta)=\Big(z^{(\alpha,\beta)}(t)\Big),\ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\Theta)\in C^1\Big\{\ [a;b\,]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\},\ \alpha,\beta=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

задачи Коши $Z(a)=\Theta$ для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2)

$$Z(t,\Theta)=X(t,\Theta)+K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)$$

в краевое условие (3), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}X(\cdot,\Theta)=\mathcal{A}-\mathcal{L}K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](\cdot) \tag{8}$$

относительно матрицы $\Theta\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Линейный ограниченный векторный функционал $\mathcal{L}Z(\cdot)$ представим в виде

$$\mathcal{L}Z(\cdot)=\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_iZ(\cdot),$$

где
$$\mathcal{L}_0 Z(\cdot):\ C^1[a;\tau_1]_I \to \mathbb{R}^{m\times n},\ ...,\ \mathcal{L}_p Z(\cdot):\ C^1[\tau_p,b]_I \to \mathbb{R}^{m\times n}.$$
Таким образом,
$$\mathcal{L}X(\cdot,\Theta)=\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_i X(\cdot,\Theta)=\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_i U(\cdot)W_i(\Theta)V(\cdot)=\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_i U(\cdot)\sum_{j=1}^{n^2}\Xi_i^{(j)}c_j V(\cdot);$$
здесь $\Xi_i^{(j)}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ j=1,2,\ ...\ n^2$ – базис пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ и $c_j,\ j=1,2,\ ...\ n^2$ – константы, определяющие разложения матриц
$$W_i(\Theta)=\sum_{j=1}^{n^2}\Xi_i^{(j)}c_j,\ c_j\in\mathbb{R}^1,\ i=1,2,\ ...\ p$$
по векторам $\Xi_i^{(j)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению
$$\sum_{j=1}^{n^2}\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_i U(\cdot)\Xi_i^{(j)}V(\cdot)\ c_j=\mathcal{A}-\mathcal{L}K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](\cdot)$$
относительно n^2 констант $c_j\in\mathbb{R}^1,\ j=1,2,\ ...\ n^2$. Определим оператор
$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n^2},$$
как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\in\mathbb{R}^{n^2}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор
$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\Big\}:\ \mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{n\times n},$$
который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\in\mathbb{R}^{n^2}$ матрицу $\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению
$$\mathcal{Q}c=\mathcal{B} \tag{9}$$
относительно вектора $c\in\mathbb{R}^{n^2}$, равносильному уравнению (8); здесь
$$\mathcal{Q}:=\Big[\ M\Big[\mathcal{Q}^{(1)}\Big]\ M\Big[\mathcal{Q}^{(2)}\Big]\ ...\ M\Big[\mathcal{Q}^{(n^2)}\Big]\ \Big],\ \mathcal{B}:=M\Big[\mathcal{A}\Big]-M\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](\cdot)\Big\},$$
где
$$\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{m\cdot n\times n^2},\ \mathcal{Q}^{(j)}:=\sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_i U(\cdot)\Xi_i^{(j)}V(\cdot)\in\mathbb{R}^{m\times n},\ j=1,2,\ ...\ n^2.$$
Как известно [2], уравнение (9) разрешимо тогда и только тогда, когда
$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{B}=0. \tag{10}$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^{m\cdot n\times m\cdot n} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$. При условии (10) и только при нем общее решение уравнения (9)

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{B} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r$$

определяет общее решение матричного уравнения (8)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{Q}^+\mathcal{B}\Big] + \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big],$$

которое, в свою очередь, определяет решение матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2), подчиненное краевому условию (3)

$$Z(t,\Theta_r) = X(t,\Theta_r) + G\Big[\Phi(s);\mathcal{A}\Big](t),\ \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^{n^2\times n^2} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{n^2\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G\Big[\Phi(s);\mathcal{A}\Big](t) := X\Big[t,\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+\mathcal{B})\Big] + K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Линейная нетерова матричная краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (10). При условии (10) и только при нем общее решение*

$$Z(t) = \Big(z^{(\alpha,\beta)}(t)\Big),\ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1\Big\{\ [a;b\ ] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ \alpha,\beta = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет вид

$$Z(t,\Theta_r) = X(t,\Theta_r) + G\Big[\Phi(s);\mathcal{A}\Big](t),\ \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big],$$

где

$$G\Big[\Phi(s);\mathcal{A}\Big](t) := X\Big[t,\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+\mathcal{B})\Big] + K\Big[\Phi(s);S_i;R_i\Big](t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет место критический случай, при этом задача (1)–(3) разрешима лишь для тех неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (10). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричной краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет место некритический случай, при этом задача (1)–(3) разрешима для любых неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$.

Следствие. *В некритическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) нетерова матричная краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) разрешима для любых неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$, при этом общее решение*

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha,\beta)}(t)\right), \ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1\Big\{\ [a;b\,] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \ \alpha, \beta = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ n$$

нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет вид

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G\Big[\Phi(s); \mathcal{A}\Big](t), \ \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r\Big],$$

где

$$G\Big[\Phi(s); \mathcal{A}\Big](t) := X\Big[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B})\Big] + K\Big[\Phi(s); S_i; R_i\Big](t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

Утверждение теоремы и следствия являются обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием. При условии $\det \Theta = 0$ оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2) представляет собой аналог оператора Грина задачи Коши для дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7, 8].

Пример 3. Условия следствия выполнены для антипериодической задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \ t \in [0; 2\pi], \ t \neq \tau_1 := \pi, \tag{11}$$

$$\Delta Z(\tau_1) = S_1 \ Z(\tau_1 - 0) + Z(\tau_1 - 0)R_1 + \Psi_1, \ \mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) + Z(2\pi) = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку однородная часть дифференциального уравнения с импульсным воздействием (11) совпадает с однородной частью дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6), постольку нам известны нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$, а также фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (11) и оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения с импульсным воздействием (11). Для антипериодической задачи (11) имеет место некритический ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) случай, следовательно задача (11) разрешима. Единственное решение матричной антипериодической задачи с импульсным воздействием (11)

$$Z(t) = G\Big[\Phi(s); \mathcal{A}\Big](t) = X\Big[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B})\Big] + K\Big[\Phi(s); S_1; R_1\Big](t)$$

определяет матрица

$$\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^{+}\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \pi & 3\pi - \frac{15}{4} & \frac{7\pi}{2} \\ \frac{1}{4} + \pi & \pi - 3 & 2\pi + \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что конструкция обобщенного оператора Грина линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) может быть перенесена на задачи с запаздыванием [9], а также на случай более общего импульсного воздействия [10, 11, 12].

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
3. *Мышкис А.Д., Самойленко А.М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сборник.– 1967. – **74 (116)**, № 2. – С. 202–208.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука: 1969. – 367 с.
5. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464–471.
6. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – **50**, № 8. – P. 1162–1169.
7. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 588–594.
8. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. – 1999. – № 6. – С. 43–47.
9. *Бигун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. – **59**, № 4. – С. 435–446.
10. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.
11. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 51–65.
12. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. Июль 2001. – **379**, № 2. – С. 170–172.

S. M. Chuiko

Green operator for linear Noetherian boundary value problem for the matrix differential equations with impulsive effect.

Constructive conditions for the existence of solutions have been found and the generalized Green operator for the linear Noetherian problem and the Green operator of the Cauchy problem for linear matrix system of the differential equation with impulsive effect has been constructed.

Keywords: *Noetherian boundary value problems, matrix differential equations, impulsive effect.*

Донбасский государственный педагогический ун-т, Славянск
chujko-slav@inbox.ru
Получено 08.05.14