УДК 004.655

©2014. **А. С. Сенченко**

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ПРОЕКЦИИ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых в табличных алгебрах операция проекции дистрибутивна относительно операций пересечения и разности таблиц, а также критерий перестановочности операций проекции и активного дополнения. Приведены примеры, иллюстрирующие данные критерии.

Ключевые слова: *табличная алгебра, проекция, база данных.*

1. Введение. Процесс информатизации общества имеет объективный характер. Ядром для подавляющего большинства современных информационных систем являются базы данных. В настоящее время наиболее распространенными остаются реляционные базы данных, математическая модель которых была впервые предложенная Э. Коддом в 1970 году [1]. С математической точки зрения реляционная база данных является конечным множеством конечных отношений различной размерности (арности) между заранее определёнными множествами элементарных данных.

Табличные алгебры, введённые В.Н. Редько и Д.Б. Буем, построены на основе реляционных алгебр Э. Кодда и существенно их развивают. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и SQL-подобных языках.

В монографии [2] установлено значительное количество различных свойств операций табличных алгебр, большинство из которых для общего случая выполняются в виде включений. В настоящей работе приведены и доказаны критерии перехода трех таких включений в равенства. Эти равенства представляют интерес для теории табличных алгебр по той причине, что только на основе равенств можно осуществлять эквивалентные преобразования выражений. Эти преобразования необходимы для решения актуальной задачи оптимизации запросов [3], [4].

2. Основные определения. Зафиксируем некоторое непустое множество атрибутов $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Произвольное конечное подмножество множества A назовем схемой, причем схема может быть пустым множеством. Строкой s схемы R называется множество пар $s = \{(A'_1, d_1), \ldots, (A'_k, d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R, причем атрибуты $A'_1, \ldots, A'_k$ попарно различны, то есть строка является функциональным бинарным отношением. Таблицей схемы R называется конечное множество строк схемы R. Далее в работе рассматриваем таблицы схемы R с количеством атрибутов k. На множестве всех таких таблиц введены такие операции:

1) объединение $\bigcup\limits_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только

тех строк, которые принадлежат хотя бы одной из исходных таблиц;

2) пересечение $\bigcap\limits_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат одновременно обеим исходным таблицам;

3) разность $T_1 \underset{R}{-} T_2$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат таблице T_1 и не принадлежат таблице T_2.

Для введения операции насыщения необходимо одно вспомогательное понятие. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d | \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, состоящее, говоря содержательно, из всевозможных значений атрибута A в таблице T. Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod\limits_{A \in R} D_{A,T}$, где R – схема таблицы T, а $\prod$ – оператор прямого (декартового) произведения, отвечающий индексированию $A \mapsto D_{A,T}$, $A \in R$ [5]. Активным дополнением таблицы T называется таблица $\tilde{T} = C(T) \underset{R}{-} T$.

Введем определение операции проекции. Проекцией по множеству атрибутов $X \subseteq R$ называется унарная параметрическая операция π_X, значением которой является таблица, состоящая из ограничений по X всех строк исходной таблицы: $\pi_X(T) = \{s \mid x \ \mid s \in T\}$. Здесь ограничение понимается стандартно: $s \mid x = s \bigcap X \times \mathrm{pr}_2 s$, где $\mathrm{pr}_2 s$ – проекция строки s по второй компоненте. Пусть $X = \{X_1, \ldots, X_p\}$. Далее в работе через $O = \{O_1, \ldots, O_{k-p}\}$ обозначим множество атрибутов $R - X$, не участвующих в проекции.

Кроме этих операций на множестве всех таблиц введены операции селекции, соединения (в некоторых источниках, например, в [6] эта операция называется эквисоединением), деления таблиц и переименования атрибутов; эти операции не будут использованы в настоящей работе, поэтому их определения не приводим. Табличной алгеброй называют частичную алгебру с носителем – множеством всех таблиц произвольной схемы и приведёнными выше девятью операциями (насыщение рассматривается как вспомогательная операция). В табличной алгебре выделяют две особые таблицы: таблицу $T_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, где ε – пустая строка, при этом схема таблицы T_ε является пустым множеством, и таблицу $T_\emptyset = \emptyset$ – пустое множество строк произвольной (в том числе и непустой) схемы.

3. Основные результаты. В монографии [2] в подразделе о свойствах проекции сформулирован и доказан ряд свойств этой операции. Автором были найдены необходимые и достаточные условия (в виде трех теорем), при которых включения превращаются в равенства для таблиц, не являющихся особыми; для особых таблиц эти равенства тоже выполняются, но в этом случае могут не выполняться критерии. Кроме формулировки и доказательства к каждой теореме будут приведены примеры, иллюстрирующие найденные критерии.

Теорема 1 (о перестановочности проекции и активного дополнения). *При $T \neq T_\emptyset$ равенство $\widetilde{(\pi_X(T))} = \pi_X(\tilde{T})$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ и любых значений $o_1 \in D_{O_1,T}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$, строка $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $(\widetilde{\pi_X(T)}) = \pi_X(\tilde{T})$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ и значения $o_1 \in D_{O_1,T}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$, что $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin T$. Тогда ввиду очевидного выполнения принадлежностей $x_1 \in D_{X_1,T}, \ldots, x_p \in D_{X_p,T}$, по определению операции активного дополнения выполняется $s' \in \tilde{T}$, и значит, $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(\tilde{T})$. С другой стороны, принадлежность $s \in \pi_X(T)$ влечет $s \notin (\widetilde{\pi_X(T)})$, то есть равенство $(\widetilde{\pi_X(T)}) = \pi_X(\tilde{T})$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие теоремы. От противного, допустим, что равенство $(\widetilde{\pi_X(T)}) = \pi_X(\tilde{T})$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $(\widetilde{\pi_X(T)}) \subseteq \pi_X(\tilde{T})$, доказанного в [2] (следствие 2.4.2, стр. 45), равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $w = \{(X_1, w_1), \ldots, (X_p, w_p)\}$, что $w \in \pi_X(\tilde{T})$ и $w \notin (\widetilde{\pi_X(T)})$. Тогда по определению проекции, из $w \in \pi_X(\tilde{T})$ следует существование в таблице $\tilde{T}$ строки $z = \{(X_1, w_1), \ldots, (X_p, w_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$ для некоторых значений $o_1 \in D_{O_1,T}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$. По определению операции активного дополнения выполняется $z \notin T$, и, кроме того, выполняются принадлежности $w_1 \in D_{X_1,T}, \ldots, w_p \in D_{X_p,T}$, откуда следует принадлежность $\{(X_1, w_1), \ldots, (X_p, w_p)\} \in C(\pi_X(T))$. Поскольку по предположению условие теоремы выполняется, то $z \notin T$ влечет выполнение $\{(X_1, w_1), \ldots, (X_p, w_p)\} \notin \pi_X(T)$, поэтому по определению активного дополнения $w = \{(X_1, w_1), \ldots, (X_p, w_p)\} \in (\widetilde{\pi_X(T)})$, что противоречит допущению. Следовательно, допущение неверно, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерии теоремы 1 на следующем примере.

Пример 1.

Пусть $X = \{A, B\}$ и $T = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$

Для строки $s = \{(A, 1), (B, 1)\} \in \pi_X(T)$ и значений $2 \in D_{C,T}, 1 \in D_{F,T}$ в таблице T отсутствует строка $s = \{(A, 1), (B, 1), (C, 2), (F, 1)\}$, то есть условие теоремы 1 не выполняется. Следовательно, равенство $(\widetilde{\pi_X(T)}) = \pi_X(\tilde{T})$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

$\tilde{T} = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$, $\pi_X(\tilde{T}) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$, $\pi_X(T) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$, $(\widetilde{\pi_X(T)}) = T_\emptyset$, то есть $(\widetilde{\pi_X(T)}) \neq \pi_X(\tilde{T})$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых операция проекции дистрибутивна относительно операции пересечения. В монографии [2] доказано включение $\pi_X(\bigcap_i T_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$ (утверждение 2.4.1, п. 8, стр. 42) и показано (следствие 2.4.1, п. 1, стр. 43), что достаточным условием для выполнения равенства $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ является условие: X – ключ таблицы $\bigcup_i T_i$, то есть все наборы значений на столбцах из X в таблице $\bigcup\limits_i T_i$ являются уникальными. Рассмотрим усиление этого результата для случая $\bigcap\limits_i T_i \neq T_\emptyset$.

Теорема 2 (дистрибутивность проекции относительно пересечения). *При $\bigcap\limits_i T_i \neq T_\emptyset$ равенство $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap\limits_i \pi_X(T)$ существуют такие значения $o_1 \in D_{O_1, \bigcap\limits_i T_i}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap\limits_i T_i}$, что строка $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap\limits_i T_i$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap\limits_i \pi_X(T)$, что для всех значений $o_1 \in D_{O_1, \bigcap\limits_i T_i}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap\limits_i T_i}$ строки $\{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin \bigcap\limits_i T_i$. Тогда по определению операций проекции и пересечения непосредственно получаем, что $\{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p))\} \notin \pi_X(\bigcap\limits_i T_i)$, то есть равенство $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие теоремы. От противного, допустим, что равенство $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) \subseteq \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$, равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\}$, что $s \in \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$ и $s \notin \pi_X(\bigcap\limits_i T_i)$. По условию теоремы существуют такие значения $o_1 \in D_{O_1, \bigcap\limits_i T_i}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap\limits_i T_i}$, что $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap\limits_i T_i$. Тогда по определению проекции $\{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p))\} \in \pi_X(\bigcap\limits_i T_i)$, то есть $s \in \pi_X(\bigcap\limits_i T_i)$. Получившееся противоречие доказывает неверность допущения, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерий теоремы 2 на следующем примере.

Пример 2.

$$\text{Пусть } R = \{A, B, C, F\}, X = \{A, B\}, T_1 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \text{ и } T_2 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}.$$

Тогда $\pi_X(T_1) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}$, $\pi_X(T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$ и $\pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$.

Для строки $s = \{(A,1),(B,2)\} \in \pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2)$ условие теоремы 2 не выполняется. Следовательно, равенство $\pi_X(T_1\bigcap\limits_R T_2) = \pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2)$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

$$T_1\bigcap_R T_2 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array},\ \pi_X(T_1\bigcap_R T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array},$$

то есть $\pi_X(T_1\bigcap\limits_R T_2) \neq \pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2)$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых операция проекции дистрибутивна относительно операции разности. В монографии [2] доказано включение $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ (утверждение 2.4.1, п. 9, стр. 42) и показано (следствие 2.4.1, п. 2, стр. 43), что достаточным условием для выполнения равенства $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ является условие: X – ключ таблицы $T_1\bigcap\limits_R T_2$. Рассмотрим усиление этого результата для случая $\pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2) \neq T_\emptyset$.

Теорема 3 (дистрибутивность проекции относительно разности). *При $\pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2) \neq T_\emptyset$ равенство $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1,x_1),\ldots,(X_p,x_p)\} \in \pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2)$ и всех значений $o_1 \in D_{O_1,T_1\bigcup\limits_R T_2},\ldots,o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T_1\bigcup\limits_R T_2}$, из принадлежности $s' = \{(X_1,x_1),\ldots,(X_p,x_p),(O_1,o_1),\ldots,(O_{k-p},o_{k-p})\} \in T_1$ следует принадлежность $s' \in T_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существуют такая строка $s = \{(X_1,x_1),\ldots,(X_p,x_p)\} \in \pi_X(T_1)\bigcap\limits_X \pi_X(T_2)$ и такие значения $o_1 \in D_{O_1,T_1\bigcup\limits_R T_2},\ldots,o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T_1\bigcup\limits_R T_2}$, что $s' = \{(X_1,x_1),\ldots,(X_p,x_p),(O_1,o_1),\ldots,(O_{k-p},o_{k-p})\} \in T_1$ и $s' \notin T_2$. Тогда $s' \in T_1 \underset{R}{-} T_2$, и по определению проекции $\{(X_1,x_1),\ldots,(X_p,x_p)\} \in \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$, то есть $s \in \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$. С другой стороны, по предположению $s \in \pi_X(T_1)$ и $s \in \pi_X(T_2)$, поэтому по определению разности таблиц $s \notin \pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2)$, то есть в этом случае равенство $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Теперь докажем достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие теоремы. От противного, допустим, что равенство $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$, равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\}$, что $s \in \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ и $s \notin \pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2)$. Поскольку $s \in \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$, то в таблице $T_1 \underset{R}{-} T_2$ существует строка $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$, для некоторых значений $o_1 \in D_{O_1, T_1 \underset{R}{\bigcup} T_2}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \underset{R}{\bigcup} T_2}$, поэтому по определению разности таблиц $s' \in T_1$ и $s' \notin T_2$. Тогда по определению проекции выполняется принадлежность $\{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1)$, то есть $s \in \pi_X(T_1)$. По предположению $s \notin \pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2)$, что с учетом $s \in \pi_X(T_1)$ по определению разности таблиц может быть только в том случае, когда $s \in \pi_X(T_2)$, следовательно $s \in \pi_X(T_1) \underset{X}{\bigcap} \pi_X(T_2)$. Ввиду выполнения условия теоремы в этом случае строка s' должна принадлежать таблице T_2, что противоречит допущению. Получившееся противоречие доказывает неверность допущения, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерий теоремы 3 на следующем примере.

Пример 3.

Пусть $R = \{A, B, C, F\}$, $X = \{A, B\}$, $T_1 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$ и $T_2 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}$.

Тогда $\pi_X(T_1) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$, $\pi_X(T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}$ и $\pi_X(T_1) \underset{X}{\bigcap} \pi_X(T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$.

Для строки $s = \{(A, 2), (B, 1)\} \in \pi_X(T_1) \underset{X}{\bigcap} \pi_X(T_2)$ существуют такие значения $2 \in D_{C, T_1 \underset{R}{\bigcup} T_2}, 2 \in D_{F, T_1 \underset{R}{\bigcup} T_2}$, что строка $s = \{(A, 2), (B, 1), (C, 2), (F, 2)\}$ принадлежит таблице T_1 и не принадлежит таблице T_2, то есть условие теоремы 3 не выполняется. Следовательно, равенство $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

$$T_1 \underset{R}{-} T_2 = \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}, \ \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}, \ \pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) = \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & 2 \end{array}$$

то есть $\pi_X(T_1) \underset{X}{-} \pi_X(T_2) \neq \pi_X(T_1 \underset{R}{-} T_2)$.

4. Выводы. В работе исследованы свойства операции проекции для табличных алгебр. Найдены критерии, при которых некоторые включения из [2] превращаются в равенства. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес. На основании равенств можно вводить аналоги определяющих соотношений, являющихся эффективным средством задания и анализа различных дискретных структур, а также осуществлять эквивалентные преобразования выражений, необходимые для их оптимизации, в том числе и для оптимизации запросов в реляционных базах данных.

Автор благодарит Дмитрия Борисовича Буя за постановку задачи и полезные замечания.

1. *Codd E.F.* A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E. F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – V.13, N. 6. – P. 377–387. (русский перевод: Е.Ф. Кодд. Реляционная модель данных для больших совместно используемых банков даннях // СУБД. – 1995. – № 1. – С. 145–160).
2. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков]. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
3. *Donald E. Knuth.* The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions / D.E. Knuth // Addison-Wesley Professional, 2008. – 240 p.
4. *Мендекович Н.А.* Обзор развития методов лексической оптимизации запросов / Н.А. Мендекович, С.Д. Кузнецов // Труды ИСП РАН. – 2012. – Т. 23. – С. 195–214.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 1 / К. Куратовский. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.
6. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.

A. S. Senchenko

The properties of projection operation in table algebra.

In this paper, the necessary and sufficient conditions under which a projection operation is distributive with respect to intersection and difference operations are found. The criterion of permutability for projection and active complement operations is also found. Obtained conditions are illustrated by some examples.

Keywords: *table algebra, projection, database.*

Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко
`senchenko@pisem.net`

Получено 17.12.13