ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2014. Том 28

УДК 531.38

©2014. **А. М. Ковалев, Г. В. Горр, Д. А. Данилюк**

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Для прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой определены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона. На основе этих зависимостей найдены инвариантные соотношения, содержащие данные кинематические параметры.

Ключевые слова: *прецессионные движения, параметры Родрига–Гамильтона, углы Эйлера.*

Введение. Параметры Родрига–Гамильтона широко используются в аналитической механике. Они тесно связаны с углами Эйлера и вектором конечного поворота [1, 2]. Параметры Родрига–Гамильтона применяются не только в гамильтоновой механике [3, 4], но и в изучении колебаний тяжелого твердого тела [5, 6]. В [5, 6] показано, что применение специальной системы координат особенно эффективно в задачах об исследовании колебательных движений тяжелого твердого тела в данных кинематических параметрах.

Прецессионное движение в динамике твердого тела представляет собой один из наиболее наглядных и распространенных классов движений [7, 8]. Они исследованы только при помощи углов Эйлера. Поэтому представляет большой интерес применение параметров Родрига–Гамильтона в задаче об изучении свойств прецессий. В данной статье определены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для случаев регулярных прецессий, полурегулярных прецессий первого и второго типов и некоторых классов прецессий общего вида.

1. Постановка задачи. Известно [1, 2], что любой поворот твердого тела, имеющего неподвижную точку, из начального положения в конечное осуществляется как плоский поворот на угол $\varkappa$ вокруг вектора конечного поворота $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{a}_* \operatorname{tg} \frac{\varkappa}{2}. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы системы координат, неизменно связанной с телом. Обозначим через α', β', γ' – углы, которые образует вектор $\mathbf{a}_*$ с векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Тогда имеем следующие значения параметров Родрига–Гамильтона [1, 2]:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_1 = \cos\alpha' \sin\frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_2 = \cos\beta' \sin\frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\gamma' \sin\frac{\varkappa}{2}. \tag{2}$$

Параметры (2) применяются в кинематических задачах ориентации различного рода объектов, управления движением, инерциальной навигации и т.п. Эти параметры можно выразить через углы Эйлера:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\
\lambda_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости тела с неподвижной точкой, $\boldsymbol{\nu}(t)$ – вектор, указывающий направление силы тяжести. Как правило, уравнения движения тела с неподвижной точкой можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4}$$

В подвижном базисе векторы $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\nu}(t)$ таковы:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\nu} = \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3, \tag{5}$$

где $\omega_i = \omega_i(t)$, $\nu_i = \nu_i(t)$ выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad \omega_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi,\\
&\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

В дальнейшем будут использоваться формулы:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}. \tag{7}$$

Очевидно, что параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{8}$$

После подстановки выражений (6) в уравнения (4) получаем уравнения на переменные $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$. Если удается проинтегрировать полученные уравнения, то есть найти указанные функции, то подставив их в равенства (3), устанавливаем зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Отметим связь величин ν_i, ω_i и параметров $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_1} - \lambda_1\dot{\lambda_0} + \lambda_3\dot{\lambda_2} - \lambda_2\dot{\lambda_3}),\\
\omega_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_2} - \lambda_2\dot{\lambda_0} + \lambda_1\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_1}),\\
\omega_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_0} + \lambda_2\dot{\lambda_1} - \lambda_1\dot{\lambda_2}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Формулы (9), (10) используются в том случае, когда известны зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Для получения замкнутой системы уравнений относительно переменных ω_i, λ_j необходимо подставить выражения (9) в уравнения (4). Тогда система уравнений (4) примет вид (первое уравнение представим в векторном виде)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}, \Lambda_i(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&2\dot{\lambda_0} = -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3), \quad 2\dot{\lambda_1} = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,\\
&2\dot{\lambda_2} = \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \quad 2\dot{\lambda_3} = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.
\end{aligned} \tag{12}
$$

В (11) вектор-функция $\boldsymbol{F}$ зависит от координат ω_i и параметров λ_i. Уравнение (11) в настоящей работе конкретизировать не будем, поскольку целью статьи является исследование кинематических свойств движения тела, имеющего неподвижную точку. С различными динамическими моделями твердого тела или гиростата можно ознакомиться в публикациях [3, 7, 8].

В данной статье рассмотрены прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой – движения, при которых постоянен угол между двумя осями l_1 и l_2, содержащими неподвижную точку O и неизменными соответственно в теле (ось l_1) и в пространстве (ось l_2). Обозначая этот угол через θ_0 [7], из формул (3) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\\
&\lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Из соотношений (13) вытекают два инвариантных соотношения для прецессий:

$$
\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{14}
$$

Свойство (14) характерно для всех классов прецессионных движений [7, 9].

2. Маятниковые движения. Эти движения можно отнести к частному типу прецессий и охарактеризовать условиями:

$$
\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0. \tag{15}
$$

Из (13) при наличии (15) следует

$$
\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{16}
$$

На основании соотношений (16) имеем два линейных инвариантных соотношения:

$$
\lambda_0 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{17}
$$

Известно [9], что зависимость $\varphi(t)$ для маятниковых движений определяется уравнением

$$
\dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2\sin\varphi}, \tag{18}
$$

где β_1 и β_2 – постоянные.

Анализ решения уравнения (18) приводит к трем вариантам зависимости $\varphi(t)$. Здесь будем для определенности предполагать

$$
\beta_1 > -\beta_2 > 0. \tag{19}
$$

Тогда в силу (19) из уравнения (18) получим

$$
\begin{gathered}
\varphi = 2\mathrm{am}\mu_1 t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{sn}\mu_1 t - \mathrm{cn}\mu_1 t), \\
\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{sn}\mu_1 t + \mathrm{cn}\mu_1 t), \quad \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_1 = \sqrt{-\frac{\beta_2}{2\mu_1^2}},
\end{gathered} \tag{20}
$$

где $\mathrm{am}\mu_1 t, \mathrm{sn}\mu_1 t, \mathrm{cn}\mu_1 t$ – эллиптические функции Якоби, k_1 – их модуль.

В силу соотношений (16), (20) получим

$$
\begin{gathered}
\lambda_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{cn}\mu_1 t + \mathrm{sn}\mu_1 t), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{cn}\mu_1 t + \mathrm{sn}\mu_1 t), \\
\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\mathrm{sn}\mu_1 t - \mathrm{cn}\mu_1 t), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\mathrm{sn}\mu_1 t - \mathrm{cn}\mu_1 t).
\end{gathered} \tag{21}
$$

Для маятниковых движений в силу (16), (17), (21) только один параметр из λ_i является независимым.

3. Регулярные прецессии. Они характеризуются равенствами [9]:

$$
\theta = \theta_0, \quad \varphi = nt, \quad \psi = mt, \tag{22}
$$

где t – время. Учитывая в соотношениях (13) равенства (22), получим

$$
\begin{gathered}
\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n+m)t}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n-m)t}{2}, \\
\lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(m-n)t}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(n+m)t}{2}.
\end{gathered} \tag{23}
$$

В случае (22) имеем два инвариантных соотношения (14) и соотношение

$$
(m-n)\arccos\frac{\lambda_0}{\cos\frac{\theta_0}{2}} - (m+n)\arccos\frac{\lambda_1}{\sin\frac{\theta_0}{2}} = 0,
$$

которое следует из равенств (23) при исключении времени t.

Рассмотрим частный случай регулярных прецессий – прецесионно-изоконические движения. Движение гиростата называется изоконическим, если подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной плоскости к аксоидам. Для регулярных прецесионно-изоконических движений выполняется условие [9]: $m = n$. Тогда из (23) следует

$$
\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos nt, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin nt. \tag{24}
$$

Учитывая формулы (14), (24), запишем все инвариантные соотношения (ИС) для рассматриваемого класса прецессий:

$$
\lambda_1 = \mathrm{const}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{25}
$$

4. Полурегулярные прецессии первого типа. Они определяются условием [9]:

$$\psi = mt. \tag{26}$$

Как показано в [7, 9] имеют место три варианта зависимости $\varphi = \varphi(t)$. В первом варианте $\varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \sin\varphi). \tag{27}$$

Если предполагать $b_0 > c_0 > 0$, то из (27) получим

$$\varphi(t) = 2\mathrm{arctg}\frac{b_0 \mathrm{tg}\tau}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2} - c_0 \mathrm{tg}\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{m\sqrt{b_0^2 - c_0^2}}{2}t. \tag{28}$$

В силу (26), (28) для параметров Родрига–Гамильтона имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\left(\cos\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_1 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\left(\cos\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_2 &= \sin\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\\
\lambda_3 &= \cos\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{mt}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{mt}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}, \quad \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{b_0 \mathrm{tg}\tau}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2} - c_0 \mathrm{tg}\tau}. \tag{30}$$

Наиболее интересным является второй вариант – полурегулярные прецесионно-изоконические движения первого типа [9]. Для них выполняется условие [9]

$$b_0^2 = 1 + c_0^2. \tag{31}$$

В случае (31) формула (28) упрощается. Запишем ее в виде

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{b_0 \mathrm{tg}\tau}{1 - c_0 \mathrm{tg}\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{mt}{2}. \tag{32}$$

Для нахождения зависимостей параметров Родрига–Гамильтона от времени можно воспользоваться формулами (29), (30), в которых необходимо учесть соотношения (31), (32). Интерес представляет вид ИС для прецесионно-изоконических движений первого типа. Для его получения воспользуемся формулами (7), (26), (32). Тогда найдем зависимости:

$$\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{b_0(\sin mt + c_0\cos mt - c_0)}{\cos mt - c_0 \sin mt}, \quad \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3} = \frac{\sin mt}{\cos mt}. \tag{33}$$

Исключим из соотношений (33) время t

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}b_0c_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\sin\theta_0+(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)-\\-c_0(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)-b_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)[(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)+\\+c_0(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)]=0.\end{gathered}\tag{34}$$

Таким образом, для данного класса прецессии имеют место два ИС второго порядка (14) и одно ИС (34) четвертого порядка.

В третьем случае прецессия (26) характеризуется зависимостью (18), неравенством (19) и соотношениями (20). Тогда параметры Родрига–Гамильтона таковы:

$$\begin{aligned}\lambda_0&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t+\mathrm{cn}\mu_1t)-\sin\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t-\mathrm{cn}\mu_1t)\right],\\\lambda_1&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t+\mathrm{cn}\mu_1t)+\sin\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t-\mathrm{cn}\mu_1t)\right],\\\lambda_2&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\left[\sin\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t+\mathrm{cn}\mu_1t)-\cos\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t-\mathrm{cn}\mu_1t)\right],\\\lambda_3&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\left[\sin\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t+\mathrm{cn}\mu_1t)+\cos\frac{mt}{2}(\mathrm{sn}\mu_1t-\mathrm{cn}\mu_1t)\right].\end{aligned}\tag{35}$$

Структуру ИС в рассматриваемом варианте находим, используя формулы (7), (20), (26):

$$\frac{2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)}{(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)}=\frac{2\mathrm{sn}^2\mu_1g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)-1}{\mathrm{sn}\mu_1g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\mathrm{cn}\mu_1g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)},\tag{36}$$

где

$$g(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\frac{1}{m}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}.$$

Итак, имеем три ИС: (14) и (36).

5. Полурегулярные прецессии второго типа. Эти движения характеризуются равенством $\dot\varphi=n$, где n – постоянная. Выбирая начальное значение φ_0 нулевым, имеем

$$\varphi=nt.\tag{37}$$

Рассмотрим первый класс прецессии второго типа – прецессионно-изоконические движения [9]. Для него скорость прецессии определяется уравнением

$$\dot\psi=\frac{n}{b_0+c_0\sin nt},\quad \text{где}\quad b_0^2=1+c_0^2.\tag{38}$$

Примем начальное значение $\psi_0=0$. Тогда из (38) получим

$$\psi(t)=2\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{nt}{2}}{b_0+c_0\mathrm{tg}\frac{nt}{2}}.\tag{39}$$

Из (39) следуют соотношения:

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0+c_0\sin nt)}}, \quad \cos\frac{\psi}{2} = \frac{b_0\cos\frac{nt}{2}+c_0\sin\frac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0+c_0\sin nt)}}. \tag{40}$$

Параметры Родрига–Гамильтона в силу (13), (37) определяются формулами:

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt+\psi(t)}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{nt-\psi(t)}{2},\\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t)-nt}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi(t)+nt}{2},\end{gathered} \tag{41}$$

где $\sin\frac{\psi}{2}, \cos\frac{\psi}{2}$ имеют значения (40). Обращаясь к (7), (37), (39), получим

$$\begin{gathered}(b_0c_0G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)+G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)+c_0^2)(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)-\\ -(c_0+b_0G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)-c_0G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3))(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)=0,\end{gathered} \tag{42}$$

где

$$G_1(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_2-\lambda_1\lambda_3)}{\sin\theta_0}, \quad G_2(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)}{\sin\theta_0}. \tag{43}$$

Таким образом, в силу (14), (42), (43) данный класс прецессий можно охарактеризовать двумя ИС квадратичного типа и одним ИС, имеющим третий порядок.

Второй класс прецессий данного типа отвечает случаю, когда [9]

$$\psi(t) = \mu t + 2\mathrm{arctg}\,(b_0-c_0)\mathrm{tg}\left(\frac{nt}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{44}$$

Функции $\lambda_i(t)$ $(i=\overline{0,3})$ получим подстановкой выражений (37), (44) в соотношения (13):

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n+\mu)t+\psi^*(t)}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{(n-\mu)t-\psi^*(t)}{2},\\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(\mu-n)t+\psi^*(t)}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{(\mu+n)t+\psi^*(t)}{2}.\end{gathered} \tag{45}$$

В формулах (44), (45) μ, b_0, c_0 – постоянные. Функция ψ^* из (45) определена вторым слагаемым формулы (44). Значения параметров b_o, c_0 в частности могут удовлетворять условию $b_0^2 = n^2 + c_0^2$ [8]. Дополнительное к (14) ИС находится путем исключения t из соотношений (45).

Третий класс прецессий второго типа может быть охарактеризован соотношениями [9]:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = nt, \quad \psi(t) = \mu t + 2\mathrm{arctg}\,\lambda\cos nt, \tag{46}$$

где n, μ, λ – постоянные. Для нахождения зависимостей параметров Родрига–Гамильтона от времени необходимо в формулы (45) подставить $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, а $\psi^*(t) = 2\mathrm{arctg}\,\lambda\cos nt$.

6. Прецесионно-изоконические движения общего вида. Положим, что движение тела обладает свойством прецессионности и свойством изоконичности (подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу). Имеют место два класса таких движений в динамике твердого тела с неподвижной точкой [9]:

$$\psi = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}, \tag{47}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2), \quad \dot{\varphi} = \alpha + \beta \sin\varphi. \tag{48}$$

В формулах (47), (48) $\beta_1, \beta_2, b_0, c_0, \alpha, \beta$ – постоянные, которые для каждой конкретной задачи динамики имеют свои значения.

Рассмотрим случай (47). Учитывая в формулах (13) равенства (20), (47), получим

$$\begin{gathered} \lambda_0 = 2\cos\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sn}\mu_1 t\operatorname{cn}\mu_1 t, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2} = \mathrm{const}, \\ \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\left(\operatorname{sn}^2\mu_1 t - \operatorname{cn}^2\mu_1 t\right). \end{gathered} \tag{49}$$

В силу (14), (49) для класса движений (47) имеют место два линейных ИС и одно квадратичное ИС на параметры Родрига–Гамильтона.

Изучим случай (48). Из первого уравнения (48) найдем зависимость $\psi(\varphi)$:

$$\psi(\varphi) = 2\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}, \tag{50}$$

а из второго – зависимость $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \arcsin\frac{\alpha(\beta(\cos\upsilon - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin\upsilon)}{\alpha^2 - \beta(\cos\upsilon - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin\upsilon}, \quad \text{где} \quad \upsilon = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}t. \tag{51}$$

Зависимость параметров Родрига–Гамильтона от времени устанавливаем из формул (13) в силу (50), (51). Поскольку окончательные формулы имеют достаточно сложный вид, то укажем только дополнительное к (14) инвариантное соотношение на данные параметры. Используя формулы (7), (50), получим

$$\begin{gathered} \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right)\cdot \\ \cdot\left[b_0 + c_0\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}\right)\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{52}$$

Следовательно, ИС (52) имеет иррациональную структуру.

Заключение. Изучены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений твердого тела: регулярных; полурегулярных прецессий; прецессий общего вида, которые характеризуются дополнительным свойством изоконичности.

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз. – 1961. – 824 с.
2. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Изд-во Института математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
3. *Ковалев А.М.* Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 67–73.
4. *Козлов В.В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теорет. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.
5. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.
6. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ. – 2012. – 364 с.
8. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 408 с.
9. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

A. M. Kovalev, G. V. Gorr, D. A. Danilyuk

Application of Rodrigues–Hamilton parameters in investigation of precessional motion of a rigid body with a fixed point.

Dependences of Rodrigues–Hamilton parameters on the time are determined for the precessional motions of a rigid body with a fixed point. Using these dependences, invariant relations are constructed. These relations are include Rodrigues–Hamilton parameters.

Keywords: *precessional motion, Rodrigues–Hamilton parameters, Euler angles.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`kovalev@iamm.ac.donetsk.ua`
Получено 16.04.14