УДК 517.988.28

©2014. **Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров**

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Найдены значения наименьшего радиуса круга, в котором данные множества являются множествами Помпейю. В качестве множеств рассматриваются невыпуклые четырехугольники определенного вида.

Ключевые слова: *множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, невыпуклый четырехугольник.*

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B. $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ – шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A.

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$ и равенство $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$ почти всюду, будем говорить, что A является множеством Помпейю в $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для любого $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A, см. [1], [2]. В связи с этим в работе [3] поставлена следующая

Проблема (4.1.1 из [3], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{R}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем (см. [1], [2]), а также В.В. Волчковым (см. [3], Глава 4, §1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [3–8].

Рассмотрим некоторые примеры множеств A, для которых известно точное значение $\mathcal{R}(A)$.

1. Пусть A – правильный треугольник со стороной a. Тогда $\mathcal{R}(A) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ([9], В.В. Волчков, 1996).

2. Пусть A – правильный m-угольник со стороной длины l. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} l\,\mathrm{ctg}(\pi/2m)/2, & \text{если } m \text{ – нечетно;} \\ l\sqrt{1+4\mathrm{ctg}^2(\pi/m)}/2 & \text{если } m \text{ – четно} \end{cases}$$

([3], В.В. Волчков, 2000–2003).

3. Пусть A – треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}(A) = 1$ ([10], П.А. Машаров, 2001).

4. Пусть A – куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{n+3}/2$ ([11], В.В. Волчков, 1996).

5. Пусть A – полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{5}/2$ ([3], В.В. Волчков, 1996).

6. Пусть $A(h)$ – сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h-3h^2}\,/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([12], П.А. Машаров, 2011).

Известны также значения величины $\mathcal{R}(A)$ для случаев, когда A – круговой сектор ([13], П.А. Машаров, 2000), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ ([11], В.В. Волчков, 1998–2000), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ ([3], В.В. Волчков, 2001), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ ([14], Л.В. Елец, П.А. Машаров, 2009), другие множества.

1. Основные результаты. Всюду далее будем считать $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксированным числом. Рассмотрим точки $z_1(0;0)$, $z_2(\sqrt{3}/2;-1/2)$, $z_3(\sqrt{3}/2 - h;0)$, $z_4(\sqrt{3}/2;1/2)$. В данной работе рассмотрен невыпуклый четырехугольник $A(h)$ – замыкание внутренности ломаной $z_1z_2z_3z_4z_1$ (см. рис. 1). Для каждого $h \in (0;\sqrt{3}/2)$ получено точное значение $\mathcal{R}(A(h))$. Кроме того, показаны применения полученного результата в различных областях математики.

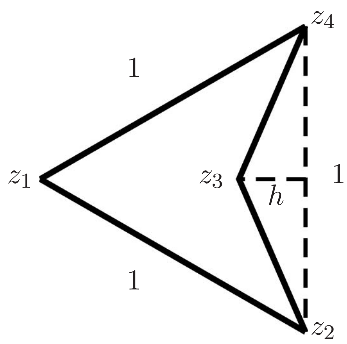

Рис. 1. Множество $A(h)$ – четырехугольник $z_1z_2z_3z_4$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого* $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ *верно равенство*

$$\mathcal{R}(A(h)) = R(h) \overset{\text{опр}}{=} \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2). \end{cases}$$

2. Вспомогательные конструкции. Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс функций $f\colon B \to \mathbb{C}$, для которых для любого компактного множества $A \subset B$ интеграл $\int_A f(x)\,dx < +\infty$. Здесь и далее под dx понимается мера Лебега. Для $p \in [1, +\infty)$ обозначение $L^p(B)$ будем использовать для класса функций, для которых $\|f\|_{L^p(B)} = \left(\int_B |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < +\infty$. Для $m \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка m которых (включая смешанные) непрерывны, $C(B)$ – класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \cap_{m=1}^{\infty} C^m(B)$. Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^m = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^m(B), m \in \mathbb{N}$, $\quad \mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ – класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$.

Из [3, предложение 1.5.6] следует, что дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ оставляют функцию в классе $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Поэтому их самих и всевозможные их произведения и линейные комбинации будем называть *допустимыми* дифференциальными операторами.

Обозначим $x_0 = \sqrt{3}/2 - h$, $k = 1/(2h)$. Рассмотрим следующие дифференциальные операторы: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $p_1 = \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $p_2 = \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $q_1 = 2h\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $q_2 = 2h\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $Q_0 = p_1 p_2 q_1$, $Q_1 = 2\sqrt{3} q_1$, $Q_2 = \left(-2h - \sqrt{3}\right) p_1$, $Q_4 = \left(-2h + \sqrt{3}\right) p_2$, $P_0 = p_1 p_2 q_1 q_2$, $P_1 = 2\sqrt{3} q_1 q_2$, $P_2 = \left(\sqrt{3} - 2h\right) p_1 q_1$, $P_3 = -4h p_1 p_2$, $P_4 = \left(\sqrt{3} - 2h\right) p_2 q_2$.

Следующая лемма содержит информацию о том, каким допустимым дифференциальным оператором следует подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по $A(h)$ от результирующей функции выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в вершинах четырехугольника $A(h)$.

Лемма 1. *Пусть* $A(h) \subset B$ *для некоторого открытого выпуклого множества* B, $f \in C^4(B)$. *Тогда*

$$\int_{A(h)} (Q_0 f)(x, y)\,dx\,dy = 2\int_0^h (p_1 p_2 f)(x_0 + t, -kt)\,dt + \sum_{j \in \{1,2,4\}} Q_j f(z_j), \tag{1}$$

$$\int_{A(h)} (P_0 f)(x, y)\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{4} P_j f(z_j). \tag{2}$$

Доказательство. Четырехугольник $A(h)$ можно представить в виде $z_1 z_2 z_3 z_4 = \triangle z_1 z_2 z_4 \setminus \triangle z_3 z_2 z_4 = \triangle z_1 z_2 z_3 \cup \triangle z_1 z_3 z_4$, причем соответствующие треугольники не имеют общих внутренних точек. Используя аддитивность интеграла, получаем

$$\int_{A(h)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} f(x,y)\,dy - \int_{x_0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-k(x-x_0)}^{k(x-x_0)} f(x,y)\,dy =$$
$$= \int_{-1/2}^{0} dy \int_{-\sqrt{3}y}^{-y/k+x_0} f(x,y)\,dx + \int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{3}y}^{y/k+x_0} f(x,y)\,dx.$$

Выбирая тот порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл, имеем

$$\int_{A(h)} q_1 f\,dx\,dy = 2h\left(\int_{-1/2}^{0} dy \int_{-\sqrt{3}y}^{-y/k+x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{3}y}^{y/k+x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) +$$
$$+ \int_0^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy - \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-k(x-x_0)}^{k(x-x_0)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy =$$
$$= 2h\int_{-1/2}^{0} f\Big(-\frac{y}{k}+x_0, y\Big)\,dy - 2h\int_{-1/2}^{0} f(-\sqrt{3}y, y)\,dy + 2h\int_0^{1/2} f\Big(\frac{y}{k}+x_0, y\Big)\,dy -$$
$$-2h\int_0^{1/2} f(\sqrt{3}y, y)\,dy + \int_0^{\sqrt{3}/2} f(x, x/\sqrt{3})\,dx - \int_0^{\sqrt{3}/2} f(x, -x/\sqrt{3})\,dx -$$
$$- \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} f(x, k(x-x_0))\,dx + \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} f(x, -k(x-x_0))\,dx.$$

Производя в полученных интегралах следующие замены: в первом: $y=-kt$, в восьмом: $x = x_0 + t$, во втором: $y=-t$, в шестом: $x = t\sqrt{3}$, в третьем: $y = kt$, в седьмом: $x = t + x_0$, в четвертом: $y=t$, в пятом: $x = t\sqrt{3}$, и складывая попарно эти интегралы, получаем

$$\int_{A(h)} q_1 f\,dx\,dy = 2\int_0^h f(x_0+t, -kt)\,dt +$$
$$+\Big(-2h-\sqrt{3}\Big)\int_0^{1/2} f(\sqrt{3}t, -t)\,dt + \Big(-2h+\sqrt{3}\Big)\int_0^{1/2} f(\sqrt{3}t, t)\,dt. \tag{3}$$

Подставляя в (3) p_1p_2f вместо f и учитывая перестановочность операторов с постоянными коэффициентами, получаем

$$\int_{A(h)} (q_1p_1p_2f)(x,y)\,dx\,dy = 2\int_0^h (p_1p_2f)(x_0+t, -kt)\,dt +$$
$$+\big(-2h-\sqrt{3}\big)\big(p_1f(z_2) - p_1f(z_1)\big) + \big(-2h+\sqrt{3}\big)\big(p_2f(z_4) - p_2f(z_1)\big).$$

Приводя подобные слагаемые и используя введенные перед леммой обозначения, получаем (1). Для доказательства равенства (2) подставим q_2f вместо f в (1)

$$\int_{A(h)} (P_0f)(x,y)\,dx\,dy = 4h\big(p_1p_2f(x_2) - p_1p_2f(z_3)\big) +$$
$$+ Q_1q_2f(z_1) + Q_2q_2f(z_2) + Q_4q_2f(z_4).$$

Приводя подобные и учитывая введенные обозначения, получаем (2). □

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функции, заданные на $(0;\varepsilon)$ формулами $g_{1,\varepsilon}(\rho) = \exp\bigl(1/(\rho^2 - \varepsilon\rho)\bigr)$, $g_{2,\varepsilon}(\rho) = \exp\bigl(\rho^2/(\rho - \varepsilon)\bigr)$ и нулем в остальных случаях. Обозначим $C_j = \int_{\mathbb{B}_\varepsilon} g_{j,\varepsilon}(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, $j = \overline{1,2}$. Тогда не тождественно равная нулю функция

$$\Phi_\varepsilon(x,y) = C_2 g_{1,\varepsilon}(\sqrt{x^2+y^2}) - C_1 g_{2,\varepsilon}(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{4}$$

обладает следующими свойствами: она радиальная, бесконечно дифференцируемая, имеет носитель в $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon$, и для нее $\int_{\mathbb{B}_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Для $R > \sqrt{3}/3$ положим $\mathcal{U}(h,R) = \{z = \lambda z_j : \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h),\mathbb{B}_R),\ j = \overline{1,4}\}$; отрезок, соединяющий точки z_3 и z_2, обозначим $l_h = \{(x_0+t; -kt) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant t \leqslant h\}$; $\mathrm{Sh}(A,B) = \{w \in \mathbb{R}^2 \colon A + w \subset B\}$; $\mathbb{B}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : a < |x| < b\}$ – кольцо с радиусами a и b. Используя теорему 4.3.2 из [3] и равенство (2) леммы 1, получаем

Лемма 2. *Пусть $R > \sqrt{3}/3$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h),\mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(h,R)$.*

Используя равенство (1) леммы 1, лемму 2 и рассуждения из доказательства леммы 4.5.6 из [3], получаем

Лемма 3. *Пусть $R > \sqrt{3}/3$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h),\mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $\int_{l_h} \bigl(q(\Delta)f\bigr)(x+u; y+v)\,ds = 0$ для любого вектора $(u,v) \in \mathrm{Sh}(A(h),\mathbb{B}_R)$.*

Используя рассуждения, подобные тем, что применяются при доказательстве леммы 4.1.1 из [3], получаем

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(A,\mathbb{B}_R) = \{0\}$ для некоторого $R > \sqrt{3}/3$. Тогда $\mathcal{R}(A) \leqslant R$.*

Лемма 5. *Пусть $0 \leqslant a < b < d < R$, $f \in L(0;R)$, $f = 0$ в $(a;b) \cup (d;R)$, и при некоторых a_1, a_2 таких, что $a < a_1 < a_2 < b$, $\int_0^{\sqrt{d^2-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy = 0$ для всех $x \in (a_1,a_2)$. Тогда $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}_{a,R}$.*

Доказательство. Сделаем в данном интеграле замену $t = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда для всех перечисленных условий на входящие в интеграл параметры получим для всех $x \in (a_1;a_2)$ равенство $\int_x^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt = 0$. Так как функция $f(t) = 0$ при $t \in (a;b)$, то для любого $x \in (a_1;a_2)$ верно $\int_b^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt = 0$.

Разложим в ряд Лорана $\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}} = (1-(x/t)^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}\cdot(x/t)^{2j}$, $|t| > x$. Подставив разложение в предыдущее равенство, получаем

$$0 = \sum_{j=0}^\infty \left(\int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}}\,dt\right) \frac{(2j-1)!!x^{2j}}{(2j)!!}, \quad \forall x \in (a_1;a_2).$$

Таким образом, $\int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}}\,dt = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Сделаем в полученном интеграле замену $z = 1/t^2$. Получим $\int_{1/d^2}^{1/b^2} z^{j-1}\frac{f(1/\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = 0$.

Так как система многочленов $\{1, z, z^2, ...\}$ замкнута в пространстве $C(1/d^2;1/b^2)$, то $f(1/\sqrt{z})/\sqrt{z} = 0$ в $(1/d^2;1/b^2)$, откуда следует $f(t) = 0$ в $(b;d)$. Учитывая равенство нулю функции f в $(a;b) \cup (d;R)$, получаем требуемое утверждение леммы. □

Учитывая, что $A(h) \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^2)$, используя лемму 4.1.3 из [3], получаем

Лемма 6. *Пусть $R > \sqrt{3}/3$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

3. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 1. Считаем $h \in (0; \sqrt{3}/2)$, $R > R(h)$, $\varepsilon \in (0, R - R(h))$ фиксированными числами. Необходимо доказать, что $\mathfrak{P}\big(A(h), \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$. Используя стандартный метод сглаживания (см, например, §1.3.3 в [3]), видим, что достаточно доказать, что $\mathfrak{P}^\infty\big(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big) = \{0\}$. Учитывая лемму 4, видим, что достаточно доказать равенство $\mathfrak{P}_0^\infty\big(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big) = \{0\}$.

Рассмотрим произвольную $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big)$. Тогда по лемме 2 существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $F \overset{\text{опр}}{=} q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(h, R-\varepsilon)$. Отметим, что при различных h множество $\mathcal{U}(h, R-\varepsilon)$ может быть кругом $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$ или объединением круга $\mathbb{B}_{a(h,R-\varepsilon)}$ и кольца $\mathbb{B}_{b(h,R-\varepsilon),R-\varepsilon}$ для некоторых $a(h, R-\varepsilon)$ и $b(h, R-\varepsilon)$. Во втором случае, применяя к функции $F \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big)$ леммы 3 и 5, получаем, что существует такой ненулевой многочлен $\widetilde{q}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, что $\widetilde{F} \overset{\text{опр}}{=} \widetilde{q}(\Delta)F = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$.

Учитывая, что произведением многочленов является многочлен, применяя к функции f лемму 6, в которой многочленами являются q в первом и $\widetilde{q} \cdot q$ – во втором случаях, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь $R < R(h)$. В этом случае найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$ выполняется включение $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \lambda A(h)$. Тогда определенная равенством (4) ненулевая функция $\Phi_\varepsilon(x; y) \in \mathfrak{P}^\infty(A(h), \mathbb{B}_R)$, что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

4. Применения. Решение локального варианта проблемы Помпейю имеет применения в различных областях математики. Рассмотрим некоторые из них.

I. Теория приближений.

Теорема 2. *Для фиксированных $h \in (0; \sqrt{3}/2)$, $p\colon 1 \leqslant p < \infty$, $R > R(h)$ любую функцию $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$ можно аппроксимировать с любой точностью в $L_p(\mathbb{B}_R)$ линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda A(h)$, $\lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$.*

Доказательство. Пусть существует функция $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$, которую нельзя аппроксимировать с произвольной точностью линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda A(h)$, $\lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. Тогда эта функция ортогональна всем таким индикаторам. То есть для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$ верно равенство

$$\int_{\mathbb{B}_R} f(x, y) \cdot \chi_{\lambda A(h)}(x, y)\, dx\, dy = \int_{\lambda A(h)} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Отсюда, применяя теорему 1, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, а такую функцию можно приблизить линейными комбинациями каких угодно функций, то есть предположение не верно, что доказывает теорему. $\square$

II. Комплексный анализ.

Следующий результат является теоремой типа Мореры.

Теорема 3. *Пусть $f \in C(\mathbb{B}_R)$ и выполнено условие*

$$\int_{\partial(\lambda A(h))} f(z)\,dz = 0 \text{ при всех } \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R). \tag{5}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) если $R > R(h)$, то f голоморфна в $\mathbb{B}_R$;

2) если $\sqrt{3}/3 < R < R(h)$, то существуют неголоморфные, бесконечно дифференцируемые функции в $\mathbb{B}_R$ с условием (5).

Доказательство. Используя стандартный метод сглаживания, достаточно доказать аналитичность функции $f \in \mathfrak{P}^\infty(\partial A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$ для каждого $\varepsilon \in (0; R - R(h))$. Применяя формулу Грина, получаем $\int_{\partial(\lambda A(h))} f(z)\,dz = 2i \int_{\lambda A(h)} \frac{df}{d\bar z}\,dx\,dy = 0$ $\forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$. Это означает, что $\frac{df}{d\bar z} \in \mathfrak{P}^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, откуда по теореме 1 следует $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, а значит и в $\mathbb{B}_R$. Тогда из условий Коши–Римана получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения, в качестве примера неголоморфной функции из класса $\mathfrak{P}^\infty(\partial A(h), \mathbb{B}_R)$ можно взять $\Phi_\varepsilon(\rho)$, заданную равенством (4) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. $\square$

Получим теперь одно из уточнений теоремы Дзядыка.

Теорема 4. *Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксировано, $R > R(h)$, действительнозначные функции $u, v \in C(\mathbb{B}_R)$. Тогда для того, чтобы одна из функций $u + iv$ или $u - iv$ была голоморфной в $\mathbb{B}_R$, необходимо и достаточно, чтобы части поверхностей графиков функций u, v и $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенные над каждым множеством $\lambda A(h)$, где $\lambda \in \mathrm{Mot}(A(h); \mathbb{B}_R)$, имели одинаковую площадь.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из классической теоремы Дзядыка. Действительно, если площади равны над произвольным множеством K, то и над множествами вида λA при $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим функции $f_1(x,y) = \big(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\big)^{1/2}$, $f_2(x,y) = \big(1+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2\big)^{1/2}$ и $f_3(x,y) = \big(1+(\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial x})^2+(\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial y})^2\big)^{1/2}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ из условия теоремы следует $\int_{\lambda A(h)} f_1(x,y)\,dx\,dy = \int_{\lambda A(h)} f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_{\lambda A(h)} f_3(x,y)\,dx\,dy$ или $\int_{\lambda A(h)} (f_j(x,y) - f_k(x,y))\,dx\,dy = 0$. Отсюда по теореме 1 получаем $f_j - f_k = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Значит, для любого подмножества $K \subset \mathbb{B}_R$ верно равенство $\int_K f_1(x,y)\,dx\,dy = \int_K f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_K f_3(x,y)\,dx\,dy$. Следовательно, выполняется условие классической теоремы Дзядыка, что влечет за собой утверждение теоремы. $\square$

III. Теория отображений, сохраняющих меру.

Здесь под $\mathrm{meas}\, E$ понимается мера Лебега множества E.

Теорема 5. *Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксировано, $R > R(h)$ и f – C^1-диффеоморфизм $\mathbb{B}_R$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда, если $\forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$, верно равенство $\mathrm{meas}\, f\big(\lambda A(h)\big) = \mathrm{meas}\, \lambda A(h)$, то $\mathrm{meas}\, f(E) = \mathrm{meas}\, E$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$.*

Доказательство. Пусть J_f – якобиан отображения f. По условию $\int\limits_{\lambda A(h)} dx\,dy = \int\limits_{f(\lambda A(h))} dx\,dy = \int\limits_{\lambda A(h)} |J_f|\,dx\,dy$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. Отсюда получаем, что $\int\limits_{\lambda A(h)} \big(|J_f| - 1\big)\,dx = 0\ \forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. По теореме 1, $|J_f| = 1$ в $\mathbb{B}_R$, откуда $\int\limits_E dx\,dy = \int\limits_E |J_f|\,dx\,dy = \int\limits_{f(E)} dx\,dy$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$, что и требовалось. $\square$

1. *Berenstein C.A.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
2. *Berenstein C.A.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
3. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer, 2009. – 671 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhäuser, 2013. – 592 p.
6. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня, – № 1, вып. 12. – Киев, 2001. – С. 51–79.
7. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185–194.
8. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. – № 278. – P. 69–74.
9. *Волчков В.В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
10. *Машаров П.А.* Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело // Вісник Дніпропетровського університету. Математика, вип. 6. – 2001. – С. 72–81.
11. *Волчков В.В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
12. *Машаров П.А.* Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т.23. – С. 163–171.
13. *Машаров П.А.* Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29
14. *Елец Л.В., Машаров П.А.* Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ. – Т. 61. – 2009. – С. 61–72.

N. S. Ivanisenko, P. A. Masharov

A local version of the Pompeiu problem for a nonconvex quadrangle.

The exact values for the smallest radius of the ball in which the given sets are the Pompeiu sets are obtained in the paper. The considered sets are nonconvex quadrangles of certain type

Keywords: *Pompeiu set, extremal version of the Pompeiu problem, Pompeiu radius, nonconvex quadrangles.*

Донецкий национальный ун-т
`pavelmasharov@gmail.com`

Получено 10.04.14