

УДК 517.547

©2014. М. З. Двейрин, А. С. Левадная

ОБОБЩЕННЫЙ ПОРЯДОК И ОБОБЩЕННЫЙ ТИП ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ ЕЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В статье выясняется связь между обобщенным порядком и обобщенным типом целой функции бесконечного порядка и скоростью ее наилучшей полиномиальной аппроксимации для большого семейства банаховых пространств функций, аналитических в единичном круге. Найдены соотношения, определяющие обобщенный порядок и тип целой функции через последовательность ее наилучших приближений. Полученные результаты являются обобщением более ранних результатов Редди, Д. Сато, И.И. Ибрагимова и Н.И. Шихалиева, С.Б. Вакарчука, Р. Мамадова.

Ключевые слова: целая функция, наилучшее приближение, обобщенный порядок целой функции, обобщенный тип целой функции.

1. Введение. В данной работе в качестве X рассматривается линейное нормированное пространство, образованное аналитическими в единичном круге D функциями, имеющими конечную норму $\|\cdot\|$. При этом будем предполагать, что $\|\cdot\|$ помимо обычных свойств нормы удовлетворяет также условиям:

$$i) \quad \|f(\cdot e^{it})\| \equiv \|f(\cdot)\| \quad (1)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $f \in X$;

$$ii) \quad \|f(\cdot)\| < \infty \quad (2)$$

для любой целой функции (т.е. пространство X содержит все целые функции);

$$iii) \quad \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z e^{it}) g(t) dt \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)| dt \|f(\cdot)\| \quad (3)$$

для любых функций $f \in X$ и $g \in L[0; 2\pi]$ (иначе говоря, для любых $f \in X$ и $g \in L[0; 2\pi]$ $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_{L[0; 2\pi]}$).

Этим требованиям удовлетворяет норма в целом ряде функциональных пространств, являющихся объектом многочисленных исследований (авторам неизвестны примеры пространств, в которых выполняются условия i), ii) и при этом не выполняется условие iii)). Приведем некоторые из них.

1) Пространство B функций, аналитических в единичном круге \mathbb{D} и непрерывных на его замыкании $\bar{\mathbb{D}}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{z \in \bar{\mathbb{D}}} |f(z)| < \infty.$$

2) Пространства Харди H_p ($p \geq 1$) функций, аналитических в круге \mathbb{D} с нормой

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r), \quad M_p(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1; \infty);$$

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, \quad p = \infty.$$

3) Пространства Бергмана H'_p функций, аналитических в круге \mathbb{D} при $p \in [1; \infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_{z \in D} \int |f(x + iy)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

и обобщенные (весовые) пространства Бергмана $H'_{p,\rho}$ функций, аналитических в круге \mathbb{D} при $p \in [1; \infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_{z \in D} \int |f(x + iy)|^p \rho(|z|) dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

и радиальным весом $\rho(|z|)$.

4) Пространства A_p , $p \in (0; 1)$ функций, аналитических в круге \mathbb{D} с нормой

$$\|f\| = \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(f, r) dr,$$

впервые изучавшиеся Харди и Литтлвудом [1] и позднее Ромбергом, Дюреном и Шилдсом [2].

5) Пространства $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$, $0 < p < q \leq \infty$, $\lambda > 0$, функций, аналитических в круге \mathbb{D} с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f, r) dr \right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left\{ (1-r)^{(1/p-1/q)} M_q(f, r) \right\}, \quad \lambda = \infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1] (см. также [3]). Известно [3], что в случае $\min(q, \lambda) \geq 1$ пространства $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$ являются банаховыми.

6) Пространства со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}$, ($p, q \geq 1$, $\alpha > 0$), образованные функциями, аналитическими в круге \mathbb{D} с конечной нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 (1-r)^{q\alpha-1} M_p^q(f, r) dr \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left\{ (1-r)^\alpha M_p(f, r) \right\}, \quad q = \infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1]. Заметим, что пространства $H^{p,q,\alpha}$ и $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$ отличаются лишь способом введения параметров.

7) Пространство $BMOA$ [4], состоящее из функций $f \in H_1$ с нормой

$$\|f\| = \sup_I \int_I |f(\zeta) - f_I| d\sigma(\zeta),$$

где $f(\zeta)$ – граничные значения функции $f(z)$ на единичной окружности, а f_I – среднее арифметическое значение функции $f(\zeta)$ на дуге I .

8) Пространства типа Блоха \mathcal{B}_α , $\alpha \in (0, \infty)$, состоящие из функций, аналитических в D с конечной нормой

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)|.$$

Пространства \mathcal{B}_α являются банаховыми [5], при $\alpha = 1$ \mathcal{B}_α совпадает с пространством Блоха \mathcal{B} .

9) Введенные Е.М. Дынькиным [6] пространства $\mathcal{A}_{p,q}^s(\mathbb{D})$ функций, являющиеся аналогами классов О.В. Бесова $\mathcal{B}_{p,q}^s[-1; 1]$. Эти пространства образованы функциями $f \in H_p$, $p \in [1; \infty]$ с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\omega_m(f, t)_p}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} + \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r).$$

Здесь $q \in [1; \infty]$, $s > 0$, $m > s$ – натуральное число, $\omega_m(f, t)_p$ – m -ый модуль гладкости в пространстве L_p функции $f(e^{it})$, представляющей собой радиальные предельные значения f . Случай $q = \infty$ трактуется традиционно.

10) Обобщенные пространства Дирихле $\mathcal{D}_p(\alpha)$ функций, аналитических в \mathbb{D} , с нормой

$$\|f(z)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \alpha_k \right)^{1/p},$$

где $c_k = c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции f , $p \geq 1$, $\alpha = \{\alpha_k\}$ – фиксированная последовательность положительных чисел с условиями

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} \geq 1.$$

Отметим, что приведенные выше примеры функциональных пространств со свойствами i), ii) и iii) не исчерпывают их многообразия.

Напомним общепринятые определения основных характеристик целой функции. В дальнейшем будем использовать функцию $\ln \ln \dots \ln x$, где x логарифмируется q раз. Введем для нее обозначение: $\ln^{(q)} x := \ln \ln \dots \ln x$, $\ln^{(0)} x := x$. Будем также обозначать

$$M(f, r) := \sup_{0 < |z| < r} |f(z)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Порядок роста целой функции равен

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(f, r)}{\ln r}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тип целой функции равен (если $0 < \rho < \infty$)

$$\sigma := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(f, r)}{r^\rho}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенный порядок роста ρ_q индекса q (q -порядок) целой функции равен (в случае, когда $\rho = \infty$)

$$\rho_q := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q)} M(f, r)}{\ln r},$$

где q – натуральное число, удовлетворяющее условиям $\rho_{q-1} = \infty$, $\rho_q < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенный тип σ_q индекса q (q -порядок) целой функции равен (для $0 < \rho_q < \infty$)

$$\sigma_q := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M(f, r)}{r^{\rho_q}}.$$

Данные определения обобщенного порядка и обобщенного типа введены Сато Д. в [7] и Редди А.Р. в [8] (в случае $q = 2$ мы будем использовать обозначения ρ вместо ρ_2 и σ вместо σ_2). Введение q -порядка и q -типа позволяет различать скорость роста целой функции в случае, когда $\rho = \infty$.

В частности, в статье Сато Д. [7] были получены формулы, которые связывают величины ρ_q и σ_q с тейлоровскими коэффициентами c_n целой трансцендентной функции f :

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|},$$

если $q = 2, 3, \dots$ и

$$\sigma_q = \begin{cases} \frac{1}{e^{\rho_q}} \limsup_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 2; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Связи между ростом максимума модуля целых функций или функций, аналитических в круге, и наилучшим приближением изучались в работах Редди А.Р. [8], Ибрагимова И.И. и Шихалиева Н.И. [11], [12], Вакарчука С.Б. [10], Мамадова Р. [13] и Двейрина М.З. [9]. Ими были получены соотношения, выражающие порядок и тип целой функции через последовательность ее наилучших приближений $E_n(f)$ для аппроксимации по различным нормам. Более полное изложение истории исследований по данной теме можно найти в [14].

Напомним, что $E_n(f) \equiv E_n(f, L_n)$ – наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами линейного подпространства L_n определяется следующим образом:

$$E_n(f) := \inf_{p \in L_n} \|f - p\|.$$

В качестве аппроксимирующего подпространства будем использовать \mathcal{P}_n – совокупность алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше $(n - 1)$.

Приведем некоторые нужные для дальнейшего факты из статьи [9]:

Теорема 1. Пусть $f \in X$. Тогда условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{\frac{1}{n}} = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f была целой.

Лемма 1. Пусть $f \in X$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда $|c_n| \cdot \|z^n\| \leq E_n(f) \leq \|f\|$.

Лемма 2. Пусть $f \in X$ и $\mu_1 := \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}$, $\mu_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}$. Тогда $\mu_1 \geq 1$, $\mu_2 < \infty$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho \in (0; +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный положительный предел

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha. \quad (4)$$

При этом справедливо равенство $\alpha = \rho$.

Теорема 3. Пусть существует конечный предел $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}} = \mu > 0$. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho \in (0; +\infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0; +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho}{n}}. \quad (5)$$

В настоящей статье будут получены аналоги теорем 1–3, устанавливающие связи между наилучшими полиномиальными приближениями функции и ее обобщенным порядком ρ_q и обобщенным типом σ_q в случае $q > 2$ (случай $q = 2$ соответствует результатам, полученным ранее в [9]).

Всюду в дальнейшем будем обозначать

$$\mu_1 := \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}, \quad \mu_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}. \quad (6)$$

2. Формулировка результатов.

Теорема 4. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой обобщенного порядка $\rho_q \in (0; +\infty)$ ($q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha \quad (7)$$

был конечным и положительным. При этом $\alpha = \rho_q$.

Теорема 5. Пусть существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}} = \mu$. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho_q \in (0; +\infty)$ и типа $\sigma_q \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_q = \begin{cases} \frac{1}{e\rho_q} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 2; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Следствие 1. Условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{1}{n}} \ln^{(q-2)} n = 0 \quad (9)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f была целой некоторого обобщенного порядка ρ_q с $\rho_q \in (0; 1)$.

Чтобы сформулировать следующее следствие, нам понадобится ввести некоторые обозначения. Пусть Ω – ограниченный континуум со связным дополнением в комплексной плоскости, $0 \in \Omega$ – его внутренняя точка, r и R – радиусы кругов D_r и D_R с центром в точке $z = 0$ и таких, что $D_r \subset \Omega \subset D_R$; для целой функции f положим $f_r(z) := f(rz)$ и

$$\|f\|_{\Omega} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x + iy)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

($\|f\|_{\Omega}$ – норма функции f в пространстве $E'_p(\Omega)$, которое в случае, когда Ω есть замыкание области, представляет собой хорошо известное пространство В.И. Смирнова), $E_n(f)_{\Omega}$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами комплексной переменной степени не выше $(n - 1)$ в пространстве $E'_p(\Omega)$.

Следствие 2. Пусть функция $f \in E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$. Для того, чтобы f была целой обобщенного порядка $\rho_q \in (0; \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln E_n(f)_{\Omega}} = \rho_q. \quad (10)$$

Отметим, что полученные результаты в частных случаях пространств $BMOA$, \mathcal{B}_α , $\mathcal{A}_{p,q}^s(\mathbb{D})$, $\mathcal{D}_p(\alpha)$ являются новыми. Утверждение следствия 2 при существенных ограничениях на Ω было получено ранее в [14].

3. Доказательства. Докажем теорему 4:

Доказательство.

Достаточность. Из условия (7) теоремы 4 следует равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{1}{n}} = 0$, т.е. выполнение условия теоремы 1. Следовательно, f – целая функция с $\rho = \infty$. Обозначим ее q -порядок ρ_q и положим $\alpha_q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}}$. Тогда ввиду леммы 1 имеем неравенство:

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha_q. \quad (11)$$

Покажем, что в условиях теоремы $\rho_q > 0$.

Предположим противное, т.е. что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|} = 0$. Тогда для произвольного положительного $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ найдется N_ε такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $n \ln^{(q-1)} n < -\varepsilon \ln |c_n|$. Последнее неравенство равносильно следующему: $|c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon}}$. Пользуясь им, оценим $E_n(f)$ при $n > N_\varepsilon$. Будем считать N_ε столь большим, чтобы выполнялись неравенства: $\|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$, $\|z^n\| \geq (\mu_1 - \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ при $n > N_\varepsilon$, где μ_1 и μ_2 определяются соотношениями (6). Тогда

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot \|z^k\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot (\mu_2 + \varepsilon)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^k \leq \frac{1}{1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}}} \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\|z^n\|}{E_n(f)} &\geq (\mu_1 - \varepsilon)^n \cdot \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^{-n}, \\ \ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)^{\frac{1}{n}} &\geq \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon} \ln^{(q-1)} n, \\ \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} &\geq \frac{1}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n \ln^{(q-1)} n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} \geq \frac{1}{\varepsilon} \text{ и, следовательно, } \alpha_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \leq \varepsilon,$$

что противоречит условию теоремы, значит $\rho_q > 0$.

Выберем $\varepsilon \in (0, \mu_1) \cap (0, \rho_q)$. Из того, что

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|},$$

следует, что существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon + \rho_q}}$. Будем считать N_ε столь большим, чтобы выполнялись неравенства: $\|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$, $\|z^n\| \geq (\mu_1 - \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}$ при $n > N_\varepsilon$. Тогда при $n > N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot \|z^k\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot (\mu_2 + \varepsilon)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^k = \frac{1}{1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}}} \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\|z^n\|}{E_n(f)} &\geq (\mu_1 - \varepsilon)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right) \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^{-n}, \\ \ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)^{\frac{1}{n}} &\geq \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon + \rho_q} \ln^{(q-1)} n, \\ \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} &\geq \frac{1}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n \ln^{(q-1)} n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon + \rho_q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$\rho_q + \varepsilon \geq \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon + \rho_q}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon + \rho_q}{n \ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] \right). \quad (15)$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получим, что $\rho_q + \varepsilon \geq \alpha_q$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем $\rho_q \geq \alpha_q$. Учитывая это и неравенство (3), имеем, что $\rho_q = \alpha_q$. Таким образом, достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f \in X$ целая функция конечного порядка ρ_q , т.е.

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|}.$$

Положим

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}}.$$

Из леммы 1 следует, что $\alpha \geq \rho_q$. Рассуждая, как и при доказательстве достаточности, можем утверждать, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ найдется $N_\varepsilon : |c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon+\rho_q}}$, $(\mu_1 - \varepsilon)^n \leq \|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon+\rho_q}}$ при $n > N_\varepsilon$.

Рассуждая, как при доказательстве (13) и (4), получим

$$\rho_q + \varepsilon \geq \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \times \\ \times \left(1 + \frac{\varepsilon + \rho_q}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon + \rho_q}{n \ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon+\rho_q}}} \right] \right).$$

После предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем $\rho_q \geq \alpha$. Учитывая обратное неравенство $\rho_q \leq \alpha$, имеем $\rho_q = \alpha$. Таким образом, необходимость доказана. \square

Докажем теорему 5:

Доказательство. В случае $q = 2$ наша теорема совпадает с теоремой 3, доказанной в [9].

Достаточность. Рассмотрим случай $q = 3, 4, \dots$. Пусть $f \in X$ удовлетворяет условию (2) теоремы 5, где ρ_q и σ_q некоторые положительные числа. Тогда из (2) следует справедливость условия (7) теоремы 4, следовательно, f – целая функция порядка ρ_q . Пусть тип f равен α . Докажем, что $\alpha = \sigma_q$. Из формулы для определения типа целой функции через тейлоровские коэффициенты

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, \quad q = 3, 4, \dots \quad (16)$$

С учетом леммы 1 имеем $\alpha \leq \sigma_q$. Докажем обратное неравенство.

Из (5) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, для которого выполняются неравенства $|c_n| < \left(\frac{\varepsilon+\alpha}{\ln^{(q-2)} n}\right)^{\frac{n}{\rho_q}}$ и $\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{\ln^{(q-2)} n}\right)^{\frac{1}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon) < 1$ при всех $n > N_\varepsilon$.

Оценим наилучшее приближение функции f сверху:

$$E_n(f) \leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} k} \right)^{\frac{k}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon)^k \leq \\ \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{1}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon) \right)^k \leq \\ \leq \left(1 - \frac{C}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\rho_q}}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{n}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon)^n, \quad (17)$$

где $C = (\mu + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)^{\frac{1}{\rho_q}}$. Из (17) находим

$$\varepsilon + \alpha \geq \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot \ln^{(q-2)} n \cdot \left(1 - \frac{C}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\rho_q}}} \right)^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot \|z^n\|^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot (\mu + \varepsilon)^{-\rho_q}.$$

Последовательно устремив $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\varepsilon + \alpha \geq \sigma_q \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon} \right)^{\rho_q}, \quad \alpha \geq \sigma_q,$$

что завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Пусть $f \in X$ – целая функция обобщенного порядка $\rho_q, \rho_q \in (0; \infty)$. Обозначим ее обобщенный тип α . Аналогично доказательству достаточности, используя лемму 1 и теорему 2, можно показать справедливость неравенства $\alpha \geq \sigma_q$. Чтобы доказать обратное неравенство $\alpha \leq \sigma_q$ нужно повторить соответствующие рассуждения из доказательства достаточности. \square

Доказательство следствия 1 может быть получено применением соответствующих рассуждений на стр. 1132 работы [15].

Справедливость следствия 2 вытекает из того, что при любом $r > 0$ $\rho_q(f) = \rho_q(f_r)$, $r^{\frac{2}{p}} \|f_r\| \leq \|f\|_{\Omega} \leq R^{\frac{2}{p}} \|f_R\|$, и теоремы 5.

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals II. – Math. Z., 1931. – **34**, № 3. – P. 403–439.
2. Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L. Linear functionals in H_p spaces with $0 < p < 1$ // J. reine und angew. Math. – 1969. – 238. – P. 4–60.
3. Гварадзе М. И. Об одном классе пространств аналитических функций. Мат. заметки // 1977. – **21**, № 2. – С. 141–150.
4. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ, Москва, ВИНТИ. – 1985. – 23. – С. 3–124.
5. K. Zhu Bloch type spaces of analytic functions // Rocky mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 3. – P. 1143–1177.
6. Дынькин Е. М. Конструктивная характеристика классов С.Л. Соболева и О.В. Бесова // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1981. – 155. – С. 41–76.
7. Sato D. On the rate of growth of entire functions of fast growth // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1963. – **69**, № 3. – P. 411–414.
8. Reddy A.R. A Contribution to best approximation in the L^2 norm // J. Approxim. Theory. – 1974. – **11**, № 11. – P. 110–117.
9. Двейрин М.З. О скорости полиномиальной аппроксимации целых функций и их свойствах // ArXiv:1402.3218 [math.CV] 13 Feb 2014.
10. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических функций // ДАН УССР, сер. физ.-мат. и техн. науки. – 1990. – № 1. – С. 9–11.
11. Ибрагимов И.И., Шихалиев Н.И. О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // ДАН СССР. – 1976. – **227**, № 2 – С. 280–283.
12. Ибрагимов И.И., Шихалиев Н.И. О наилучшем приближении в среднем аналитических функций в пространстве $A_p(|z| < 1)$ // Спец. вопросы теории функций. – Баку: ЭЛМ, 1977. – № 1. – С. 84–96.

13. *Мамадов Р.* Некоторые вопросы приближения целыми функциями. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, спец. 01.01.01 – математический анализ. – Душанбе, 2009. – 14 с.
14. *Вакарчук С.Б., Жир С.И.* Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого порядку зростання в банахових просторах $\mathcal{E}'_p(G)$ та $\mathcal{E}_p(G)$, $p \geq 1$ // Укр. матем. вестник. – 2011. – 8, № 2. – С. 255–291.
15. *Вакарчук С.Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 9. – С. 1123–1133.

M. Z. Dveyrin, A. S. Levadnaya

The generalized order and the generalized type of an entire function in terms of the best approximation.

The paper explores connection between the generalized order and the generalized type of an entire function and the speed of the best polynomial approximation in the unit disk. The relations which define the generalized order and the generalized type of an entire function through the sequence of its best approximations, have been found. The results were obtained by generalization previous results of A.R. Reddy, D. Sato, I.I. Ibragimov and N.I. Shyhaliev, S.B. Vakarchyk, R. Mamadov.

Keywords: *entire function, best approximation, generalized order of entire function, generalized type of entire function.*

Донецкий национальный ун-т
matem47@mail.ru
last.dris@mail.ru

Получено 17.06.14