УДК 517.5

©2014. **Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов**

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ МЕТРИКАМИ

Развивая технику p-модулей применительно к семействам кривых в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d, авторы устанавливают конечную липшицевость и гельдеровость Q-гомеоморфизмов, действующих из $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Ключевые слова: *евклидовы пространства с мерами, Q-гомеоморфизмы, p-модули.*

1. Введение. В последнее время активно развивается теория так называемых Q-гомеоморфизмов. В препринте [1], а затем в статье [2], для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q-гомеоморфизмов, введенных О. Мартио. Основной целью теории Q-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств функции $Q(x)$ в модульном неравенстве. Развитие этой теории началось в работах [13–14]. Высокий уровень абстракции теории Q-отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удается установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [9] и [12].

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [12], [19]. Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство X с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ. Борелеву функцию $\rho : X \to [0, \infty]$, называем *допустимой* для семейства кривых Γ в X, пишем $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1 \qquad \forall\ \gamma \in \Gamma. \tag{1}$$

Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ, $p \in (0, \infty)$, в пространстве (X, d, μ) называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{D} \rho^p(x)\, d\mu(x), \tag{2}$$

где D – область в X.

Пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geqslant 1$ такая, что

$$C^{-1} r^{\alpha} \leqslant \mu(B_r) \leqslant C r^{\alpha} \tag{3}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α, см., напр., [7], с. 61. Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leqslant C r^{\alpha} \tag{4}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (4) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Предположим, что при $p \in (n-1, n)$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{5}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При предположении, что f в (5) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным*, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant K^{\frac{1}{n-p}}, \tag{6}$$

см., напр., теорему 2 в [3].

Пусть всюду далее D – область в $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$, где $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ – евклидово пространство с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d, $n \geqslant 2$, D' – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Аналогично [12] говорим, что $f : D \to D'$ – *Q-гомеоморфизм относительно p-модуля* $(n - 1 < p < n)$, если

$$M_p(f\Gamma) \ \leqslant \ \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^p(x)\ d\mu(x) \tag{7}$$

выполнено для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой функции ρ для Γ.

При $p = n$ проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в случае $Q \in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [12]. В работе [17] было показано, что Q-гомеоморфизмы в случае $Q \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{D})$ принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{loc}$ и дифференцируемы почти всюду. Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля при $p \neq n$ впервые встречается в работе [6]. В работе [5] неравенство вида (7) уставлено для отображений квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

2. Определения и предварительные результаты. Следуя работе [15], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A\setminus C$ – кольцо, т.е., если B – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to D'$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в D'. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{8}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap}_p\, \mathcal{E} = \mathrm{cap}_p\, (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p\, dm(x) \tag{9}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\mathrm{cap}_p\, \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{10}$$

см. [4], [8] и [18].

Известно, что при $1 \leqslant p < n$

$$\mathrm{cap}_p\, \mathcal{E} \geqslant n\nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{11}$$

где ν_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., напр., неравенство (8.9) в [16].

При $n - 1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$\left(\mathrm{cap}_p\, \mathcal{E}\right)^{n-1} \geqslant \gamma\, \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}\,, \tag{12}$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C, γ – положительная константа, зависящая только от размерности n и p, см. предложение 6 в [10].

3. Гельдеровость и конечная липшицевость. Пусть $x, y \in D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *конечно липшицевым*, если

$$\limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} < \infty \tag{13}$$

для всех $x \in D$. Ниже приведена теорема о достаточном условии гельдеровости в точке для Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

Теорема 1. *Пусть мера μ является α-регулярной сверху и $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфизм относительно p-модуля. Если*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu\left(B(x_0, \varepsilon)\right)} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) < \infty \,. \tag{14}$$

Тогда при $n-1 < p < \alpha \leqslant n$

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{[d(x, x_0)]^{\gamma}} \leqslant C_{n,p} Q_0^{1/(n-p)}, \tag{15}$$

где $\gamma = \frac{\alpha - p}{n-p} \in (0,1)$ и $C_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $A = A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < d(x, x_0) < \varepsilon_2\}$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $\left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ – кольцевой конденсатор в D' и, согласно (10), имеем равенство

$$\mathrm{cap}_p \, \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) = M_p\left(\triangle(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA\right), \tag{16}$$

а ввиду гомеоморфности f, равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \partial fB\left(x_0, \varepsilon_1\right); fA\right) = f\left(\triangle\left(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A\right)\right). \tag{17}$$

Очевидно, что функция

$$\rho(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & x \in A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \tag{18}$$

является допустимой для семейства $(\triangle\left(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A\right))$.

В силу определения Q-гомеоморфизма относительно p-модуля замечаем, что

$$\mathrm{cap}_p \, \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int\limits_{A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q(x) \; d\mu(x) \;. \tag{19}$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_p \, \left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int\limits_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) \, d\mu(x). \tag{20}$$

С другой стороны, в силу неравенства (11) вытекает оценка

$$\mathrm{cap}_p \, \left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \geqslant C_1 \left[m(fB(x_0, 2\varepsilon))\right]^{\frac{n-p}{n}} \,, \tag{21}$$

где C_1 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (20) с (21) и используя α-регулярность меры μ, получаем, что

$$m(fB(x_0,2\varepsilon))\leqslant C_2\,\varepsilon^{\frac{n(\alpha-p)}{n-p}}\left[\frac{1}{\mu\left(B(x_0,4\varepsilon)\right)}\int\limits_{B(x_0,4\varepsilon)}Q(x)\,d\mu(x)\right]^{\frac{n}{n-p}}, \qquad (22)$$

где C_2 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Далее, выбирая в (19) $\varepsilon_1=\varepsilon$ и $\varepsilon_2=2\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_p\,\left(fB(x_0,2\varepsilon),f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{\mu(B(x_0,2\varepsilon))}{\varepsilon^p}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)}Q(x)\,d\mu(x), \qquad (23)$$

и учитывая α-регулярность меры,

$$\mathrm{cap}_p\,\left(fB(x_0,2\varepsilon),f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{C_3\varepsilon^{\alpha-p}}{\mu\left(B(x_0,2\varepsilon)\right)}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)}Q(x)\,d\mu(x), \qquad (24)$$

где C_3 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.

С другой стороны, в силу неравенства (12), получаем

$$\mathrm{cap}_p\,\left(fB(x_0,2\varepsilon),f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\geqslant\left(C_4\frac{d^p(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (25)$$

где C_4 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (24) и (25), получаем, что

$$\frac{d^p(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0,2\varepsilon))}\leqslant C_5\varepsilon^{(\alpha-p)(n-1)}\left(\frac{1}{\mu\left(B(x_0,2\varepsilon)\right)}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)}Q(x)\,d\mu(x)\right)^{n-1}, \qquad (26)$$

где C_5 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Эта оценка вместе с (22) дает неравенство

$$d(fB(x_0,\varepsilon))\leqslant C_6\left(\frac{1}{\mu\left(B(x_0,4\varepsilon)\right)}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)}Q(x)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{n-p}}\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha-p}{n-p}}, \qquad (27)$$

где C_6 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p. Переходя к верхнему пределу при $x\to x_0$, немедленно вытекает заключение теоремы.

Следствие 1. *Пусть мера μ является n-регулярной и $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p \in (n-1, n)$. Если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mu\left(B(x_0,\varepsilon)\right)} \int_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)d\mu(x) < \infty \qquad \forall\ x_0 \in D. \tag{28}$$

Тогда f является конечно липшицевым в D.

Замечание. В соответствии с леммой 10.6 в [12] конечно липшицевые отображения обладают N-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Следствие 2. *Пусть мера μ является n-регулярной сверху, $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p \in (n-1, n)$, $Q(x) \le K$ п.в. Тогда f является липшицевым в D.*

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. — 2000. – no. 256. – 22 p.
2. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397–1420.
3. *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – Vol. 66. – P. 175–193.
4. *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
5. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2010. – Vol. 7, no. 2. – P. 53–64
6. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218–228.
7. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001.
8. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – Vol. 13. – P. 131–144.
9. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
10. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – Vol. 130, no. 2. – С. 185–206.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematies: – New York: Springer, 2009. – 367 p.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 pp.
13. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – Vol. 30, № 1. – P. 49–69.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193–203.
15. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – Vol. 448. – P. 1–40.
16. *V. Maz'ya* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – Vol. 338. – P. 307–340.
17. *Салимов Р.Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – Vol. 72, no. 5. – P. 141–148.
18. *Shlyk V.A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – Vol. 34, no. 6. – P. 216–221.
19. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971. – 144 p.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

On mappings of Euclidean spaces with alternative metrics.

Developing a p-modules technique applied to a family of curves in Euclidean space $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ with a locally finite Borel measure μ and metric d, the authors establish a finite Lipschiti'z and Hölder's properties of Q-homeomorphisms acting from $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ the space into Euclidean space $\mathbb{R}^n$ of the standard metric and Lebesgue measure.

Keywords: *Euclidean spaces with measures, Q-homeomorphisms, p-modules.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`es.afanasjeva@yandex.ru`
`ruslan623@yandex.ru`

Получено 01.04.14