УДК 512.542+512.547.2

©2013. **В. В. Штепин, В. А. Фрасинич**

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ C_8

В работе построены геометрический граф группы C_8, соответствующее геометрическое представление (разложено в сумму неприводимых) и группа движений геометрического графа группы C_8.

Ключевые слова: *циклическая группа, геометрический граф конечной группы, геометрическое представление.*

Введение. Ранее [1] отмечалось, что уже существующее в теории групп понятие графа группы [2] неудобно ввиду некоторых причин (одной из которых является неоднозначность построения). Поэтому было предложено новое понятие "геометрического графа группы ", которое лишено недостатков графа группы. Кроме того, геометрический граф группы порождает геометрическое представление группы, которое является линейным представлением группы G. Следует отметить, что геометрическое представление также является новым объектом в теории групп и очень перспективным с точки зрения теории представлений [1].

Определение. Геометрический граф группы G (геометрическая реализация) – граф группы G на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наименьшей размерности (обозначим его V), в котором евклидовы расстояния ρ (назовем их действительными) между элементами группы удовлетворяют соотношению

$$\rho(g_i, g_j) = \rho(g_k, g_l) \Leftrightarrow \rho'(g_i, g_j) = \rho'(g_k, g_l) \quad \forall i, j, k, l, \tag{1}$$

где ρ' – расстояния (назовем их мнимыми) между элементами группы G, вычисленные по формуле

$$\rho'(g_i, g_j) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in G} \sigma_x(g_i, g_j), & \text{при } i \neq j, \\ 0, & \text{при } i = j, \end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma_x(g_i, g_j)$ – наименьший неотрицательный показатель степени k, для которого справедливо равенство: $x^k g_i = g_j$ или, если такое k не существует, то $\sigma_x(g_i, g_j) \overset{def}{=} 0$.

Геометрический граф группы G такой, что $|G| = n$, мы будем рассматривать как набор различных векторов $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ единичной длины в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. В дальнейшем мы будем отождествлять элементы группы G и соответствующие им векторы геометрического графа.

Определение. Назовем два геометрических графа группы G эквивалентными, если их геометрические представления изоморфны.

Определение. Две реализации G_1 и G_2 геометрического графа группы G в $\mathbb{R}^m$ назовем эквивалентными, если существует ортогональное преобразование ϑ такое, что $\vartheta G_1 = G_2$.

1. Геометрический граф группы C_8. К сожалению, вычисление геометрического графа группы C_{p^3} наталкивается на непреодолимые (пока) технические трудности. Поэтому в данной работе мы ограничимся вычислением геометрического графа простейшей из таких групп – циклической группы C_8, и исследуем спектр соответствующего геометрического представления. Пользуясь формулой (2) для вычисления мнимых расстояний, можем составить таблицу мнимых расстояний. Поскольку $\rho(a;b) = \rho(x;y) \Leftrightarrow \rho'(a;b) = \rho'(x;y)$ для любых $a, b, x, y \in G$, то по таблице мнимых расстояний можно составить таблицу действительных расстояний. Понятно, что $\rho(a;b) = \rho(x;y) \Leftrightarrow s(a;b) = s(x;y)$ для любых $a, b, x, y \in G$, где $s(a;b)$ – расстояние между концами векторов a и b, вычисленное по поверхности единичной сферы в сферической геометрии. А $s(a;b)$ не что иное, как косинус угла между векторами a и b. Поэтому составление таблицы мнимых расстояний равносильно составлению таблицы косинусов (с параметрами). Эти косинусы приведены ниже. С последними значительно удобнее работать (находить геометрические реализации геометрических графов), так как для косинусов имеет место предложение 1.5 [1]..

Косинусы группы C_8 задаются следующим образом:

$$\cos\angle(g_i, g_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ \cos\alpha, & \text{при } \|g_i g_j^{-1}\| = 8, \\ \cos\beta, & \text{при } \|g_i g_j^{-1}\| = 4, \\ \cos\gamma, & \text{при } \|g_i g_j^{-1}\| = 2, \end{cases}$$

где $\|a\|$ – порядок элемента a.

Теорема 1.1. *Для циклической группы C_8 размерность пространства V равна 5. Семейство геометрических графов группы C_8 в $\mathbb{R}^5$ задается равенствами $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\cos\gamma = -2\cos\alpha - 1$, где $-1 < \cos\alpha < 0$, причем это семейство единственно с точностью до ортогонального преобразования пространства $\mathbb{R}^5$.*

Доказательство. Докажем от противного, что геометрический граф группы C_8 реализуется в пространстве не менее 5. Если граф реализуется в $\mathbb{R}^4$ (или размерности меньше), то любые 5 векторов линейно зависимы, следовательно, их определитель Грама равен нулю [3]. Находим $G(e, a, a^2, a^4, a^6)$:

$$G(e, a, a^2, a^4, a^6) = (\cos\gamma - 1)^2(\cos\gamma + 1 - 2\cos\beta)(\cos\gamma - 4\cos^2\alpha + 1 + 2\cos\beta) = 0.$$

Кроме того, по предложению 1.5 [1] имеем

$$4\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma + 1 = 0. \tag{3}$$

Таким образом, имеем две возможности: $\begin{cases} \cos\gamma - 2\cos\beta = -1, \\ 4\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma = -1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos\gamma - 4\cos^2\alpha + 2\cos\beta = -1, \\ 4\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma = -1. \end{cases}$

В первом случае $\cos\gamma = 2\cos\beta - 1$, $\cos\alpha = -\cos\beta$. С учетом этих соотношений $G(e, a, a^2, a^3, a^4) = 4\cos\beta(\cos\beta - 1)^4 = 0$, откуда $\cos\beta = 0$. Но тогда $\cos\beta = 0 = \cos\alpha$ – противоречие.

Во втором случае $\cos\gamma = -4\cos\alpha - 2\cos\beta - 1$, $4\cos\alpha(\cos\alpha + 1) = 0$, откуда $\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha = -1$. Если $\cos\alpha = -1$, то $\cos\gamma = 3 - 2\cos\beta = 1 + 2(1 - \cos\beta) \geq 1$ – противоречие, т.к. $\cos\gamma < 1$. Если $\cos\alpha = 0$, то $\cos\gamma = -2\cos\beta - 1$ и, с учетом этих соотношений, $G(e, a, a^2, a^4, a^5) = 16\cos^2\beta(\cos\beta + 1)^3 = 0$. Таким образом, $\cos\beta = 0 = \cos\alpha$ или $\cos\beta = -1$, $\cos\gamma = 1$. В обоих случаях получаем противоречие. Значит, геометрический граф группы C_8 реализуется в пространстве размерности не менее 5.

Покажем, что реализация геометрического графа в пространстве $\mathbb{R}^5$ существует. В $\mathbb{R}^5$ определитель Грама любых шести векторов равен нулю. В частности, учитывая соотношение (3), $G(e, a, a^2, a^4, a^5, a^6) = -256\cos\alpha(\cos\beta + \cos\alpha)^2(\cos\beta + 2\cos\alpha + 1)^3 = 0$.

Если $\cos\beta = -2\cos\alpha - 1$, то $\cos\gamma = 1$ – противоречие.

Если $\cos\alpha = 0$, то $\cos\gamma = -2\cos\beta - 1$ и, с учетом этих соотношений, имеем следующее: $G(e, a, a^2, a^3, a^4, a^5) = 16\cos^2\beta(\cos\beta + 1)^4 = 0$, откуда $\cos\beta = 0 = \cos\alpha$ или $\cos\beta = -1$, $\cos\gamma = 1$. В обоих случаях получаем противоречие.

Если $\cos\beta = -\cos\alpha$, то $\cos\gamma = -2\cos\alpha - 1$. Чтобы в этом случае существовала реализация геометрического графа, необходимо, чтобы $\cos\alpha \neq 0$ и $-1 \leq -2\cos\alpha - 1 < 1$, откуда $-1 < \cos\alpha < 0$. Докажем, что равенства $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\cos\gamma = -2\cos\alpha - 1$, где $-1 < \cos\alpha < 0$, задают целое семейство геометрических графов циклической группы C_8 в $\mathbb{R}^5$. Докажем, что векторы e, a, a^2, a^3, a^4 линейно независимы. Для этого необходимо и достаточно доказать, что их определитель Грама отличен от нуля. Действительно,

$$G(e, a, a^2, a^3, a^4) = -4\cos\alpha(\cos\alpha + 1)^4 > 0, \quad \text{т.к.} \quad -1 < \cos\alpha < 0.$$

Следовательно, e, a, a^2, a^3, a^4 линейно независимы. Нетрудно проверить, что $G(e, a, a^2, a^3, a^4, a^5) = 0$. Следовательно, векторы e, a, a^2, a^3, a^4, a^5 линейно зависимы. Значит, вектор a^5 является линейной комбинацией векторов e, a, a^2, a^3, a^4. Аналогично, векторы a^6 и a^7 являются линейными комбинациями векторов e, a, a^2, a^3, a^4. Значит, геометрический граф циклической группы C_8 реализуется в пространстве $\mathbb{R}^5$. Все эти графы задаются равенствами $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\cos\gamma = -2\cos\alpha - 1$, где $-1 < \cos\alpha < 0$. Теорема доказана. □

Геометрические графы группы C_8, описанные в теореме 1.1, мы называем геометрическими реализациями.

2. Геометрическое представление группы C_8.

Теорема 2.1. *Геометрические представления циклической группы C_8 попарно изоморфны.*

Доказательство. Для любой из реализаций геометрического графа векторы e, a, a^2, a^3, a^4 линейно независимы. Следовательно, они образуют базис. Найдем матрицу оператора $T_G(a)$ в базисе e, a, a^2, a^3, a^4. Для этого нужно найти координаты вектора a^5 в базисе e, a, a^2, a^3, a^4. Пусть $a^5 = x_1e + x_2a + x_3a^2 + x_4a^3 + x_5a^4$. Умножим это равенство скалярно последовательно на векторы e, a, a^2, a^3, a^4. Получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (e,a^5) = x_1(e,e) + x_2(e,a) + x_3(e,a^2) + x_4(e,a^3) + x_5(e,a^4), \\ (a,a^5) = x_1(a,e) + x_2(a,a) + x_3(a,a^2) + x_4(a,a^3) + x_5(a,a^4), \\ (a^2,a^5) = x_1(a^2,e) + x_2(a^2,a) + x_3(a^2,a^2) + x_4(a^2,a^3) + x_5(a^2,a^4), \\ (a^3,a^5) = x_1(a^3,e) + x_2(a^3,a) + x_3(a^3,a^2) + x_4(a^3,a^3) + x_5(a^3,a^4), \\ (a^4,a^5) = x_1(a^4,e) + x_2(a^4,a) + x_3(a^4,a^2) + x_4(a^4,a^3) + x_5(a^4,a^4). \end{cases} \tag{4}$$

Систему (4) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + \cos\alpha \cdot x_4 + (-2\cos\alpha - 1) \cdot x_5 = \cos\alpha, \\ \cos\alpha \cdot x_1 + x_2 + \cos\alpha \cdot x_3 - \cos\alpha \cdot x_4 + \cos\alpha \cdot x_5 = -2\cos\alpha - 1, \\ -\cos\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + x_3 + \cos\alpha \cdot x_4 - \cos\alpha \cdot x_5 = \cos\alpha, \\ \cos\alpha \cdot x_1 - \cos\alpha \cdot x_2 + \cos\alpha \cdot x_3 + x_4 + \cos\alpha \cdot x_5 = -\cos\alpha, \\ (-2\cos\alpha - 1) \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 - \cos\alpha \cdot x_3 + \cos\alpha \cdot x_4 + x_5 = \cos\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему (5) методом Крамера, получим, что $x_1 = x_2 = x_5 = -1$, $x_3 = x_4 = 0$.

Таким образом,

$$T_G(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Степени матрицы $T_G(a)$ легко вычисляются:

$$T_G(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, T_G(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_G(a^4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, T_G(a^5) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_G(a^6) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_G(a^7) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь характер χ_G геометрического представления T_G легко вычисляется [4, 5]:

$\chi_G(e) = 5$, $\chi_G(a) = -1$, $\chi_G(a^2) = 1$, $\chi_G(a^3) = -1$, $\chi_G(a^4) = -3$, $\chi_G(a^5) = -1$, $\chi_G(a^6) = 1$, $\chi_G(a^7) = -1$.

Отметим, что операторы представления T_G, а, следовательно, и его характер не зависят от выбора геометрической реализации геометрического графа, следовательно, все геометрические представления циклической группы C_8 попарно изоморфны. Теорема доказана. □

Хотя матрицы операторов T_G являются действительными, в дальнейшем мы рассматриваем T_G как комплексное представление, так как в этом случае его проще разложить в сумму неприводимых [4, 5].

Теорема 2.2. *Для циклической группы C_8 верно $T_G = T_1 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_7$, где T_l - представление, соответствующее характеру $\chi_l(a^k) = e^{ikl\pi/4}$.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2.1. □

3. Группа движений геометрического графа группы C_8.

Определение. Группа движений геометрического графа группы G – группа ортогональных преобразований пространства, переводящих геометрический граф группы G в себя.

Пусть $\widetilde{G}$ – группа симметрий геометрического графа группы C_8.

Как отмечалось ранее, векторы e, a, a^2, a^3, a^4 образуют базис в $\mathbb{R}^5$. Рассмотрим линейные операторы A и B, которые в базисе e, a, a^2, a^3, a^4 имеют вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, соответственно.

Теорема 3.1. $\widetilde{G} = \langle A, B, T_G(a) \rangle$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что $\|T_G(a)\| = 8$, $\|A\| = 4$, $\|B\| = 4$. Легко проверить, что $A \in \widetilde{G}$ и $B \in \widetilde{G}$, $T_G(A) \in \widetilde{G}$. Можно проверить, что

$$\langle A, B \rangle = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E\}.$$

Т.о., $\langle A,B\rangle \cap \langle T_G(a)\rangle = \{E\}$, $|\langle A,B\rangle| = 16$, $|\langle T_G(a)\rangle| = 8$. Следовательно, $\langle A,B\rangle \times \langle T_G(a)\rangle \subseteq \widetilde{G}$ и, значит, $|\widetilde{G}| \geq 16\cdot 8 = 128$. Тогда для доказательства теоремы достаточно доказать, что $|\widetilde{G}| \leq 128$.

Пусть θ – ортогональное преобразование пространства, переводящее геометрический граф группы C_8 в себя. Тогда $\theta e = a_1$, $\theta a = a_2$, $\theta a^2 = a_3$, $\theta a^3 = a_4$, $\theta a^4 = a_5$, $\theta a^5 = a_6$, $\theta a^6 = a_7$, $\theta a^7 = a_8$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 = e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$. Тогда в силу линейности θ имеем:

$$a_6 = \theta a^5 = \theta(-e - a - a^4) = -\theta e - \theta a - \theta a^4 = -a_1 - a_2 - a_5, \tag{6}$$

$$a_7 = \theta a^6 = \theta(e - a^2 + a^4) = \theta e - \theta a^2 + \theta a^4 = a_1 - a_3 + a_5, \tag{7}$$

$$a_8 = \theta a^7 = \theta(-e - a^3 - a^4) = -\theta e - \theta a^3 - \theta a^4 = -a_1 - a_4 - a_5. \tag{8}$$

Сложив правые и левые части равенств (6) и (7), после несложных преобразований получим

$$a_2 + a_3 + a_6 + a_7 = \overline{0}. \tag{9}$$

Из (6) и (8) следует, что

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_6 = \overline{0}, \tag{10}$$

$$a_1 + a_4 + a_5 + a_8 = \overline{0}, \tag{11}$$

т.е., каждая из систем векторов $K = \{a_2, a_3, a_6, a_7\}$, $L = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$, $M = \{a_1, a_4, a_5, a_8\}$ линейно зависима. Система векторов $\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$ содержит шесть линейно зависимых подсистем, состоящих из четырех векторов: $\{e, a, a^4, a^5\}$, $\{e, a^2, a^4, a^6\}$, $\{e, a^3, a^4, a^7\}$, $\{a, a^2, a^5, a^6\}$, $\{a, a^3, a^5, a^7\}$, $\{a^2, a^3, a^6, a^7\}$, причем только четыре из них удовлетворяют соотношениям (9)–(11), а именно: $\{e, a, a^4, a^5\}$, $\{e, a^3, a^4, a^7\}$, $\{a, a^2, a^5, a^6\}$, $\{a^2, a^3, a^6, a^7\}$.

Поскольку $K\bigcap M=\varnothing$, то $K\bigcup M=\{e,a,a^4,a^5\}\bigcup\{a^2,a^3,a^6,a^7\}$ или $K\bigcup M=\{e,a^3,a^4,a^7\}\bigcup\{a,a^2,a^5,a^6\}$. Таким образом, имеем восемь возможностей:

$$K=\{e,a,a^4,a^5\},L=\{e,a^3,a^4,a^7\},M=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},$$

$$K=\{e,a,a^4,a^5\},L=\{a,a^2,a^5,a^6\},M=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},$$

$$K=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},L=\{e,a^3,a^4,a^7\},M=\{e,a,a^4,a^5\},$$

$$K=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},L=\{a,a^2,a^5,a^6\},M=\{e,a,a^4,a^5\},$$

$$K=\{e,a^3,a^4,a^7\},L=\{e,a,a^4,a^5\},M=\{a,a^2,a^5,a^6\},$$

$$K=\{e,a^3,a^4,a^7\},L=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},M=\{a,a^2,a^5,a^6\},$$

$$K=\{a,a^2,a^5,a^6\},L=\{e,a,a^4,a^5\},M=\{e,a^3,a^4,a^7\},$$

$$K=\{a,a^2,a^5,a^6\},L=\{a^2,a^3,a^6,a^7\},M=\{e,a^3,a^4,a^7\}.$$

Подсистемы векторов $\{a_1,a_5\}$, $\{a_2,a_6\}$, $\{a_3,a_7\}$, $\{a_4,a_8\}$ находим из соотношений:

$$\{a_1,a_5\}=L\setminus(K\cap L),\{a_2,a_6\}=K\cap L,\{a_3,a_7\}=K\setminus(K\cap L),\{a_4,a_8\}=M\setminus L.$$

Таким образом, каждая из восьми найденных возможностей дает не более 16 искомых операторов. Следовательно, $|\widetilde{G}|\leq 8\cdot 16=128$. Теорема доказана. $\square$

Заключение. Основной целью работы являлось построение геометрического графа группы C_8. Для рассмотренной в работе циклической группы найдено разложение геометрических представлений в сумму неприводимых. Для геометрического графа группы C_8 построена группа движений. Для всех рассмотренных ранее [1] циклических групп геометрический граф группы определен с точностью до ортогонального вращения евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, геометрическое представление - с точностью до изоморфизма,причем для этих групп размерность геометрического представления оказалась равной $dim(V)=\varphi(|G|)$, где φ – функция Эйлера. Однако для циклической группы C_8 это не так: существует целое семейство геометрических графов группы (неизоморфных в смысле ортогонального вращения евклидова пространства $\mathbb{R}^5$), а размерность геометрического представления группы C_8 оказалась равной 5, в то время как $\varphi(|C_8|)=4$. Однако удивительным является тот факт, что геометрические представления, порожденные попарно неизоморфными геометрическими графами, попарно изоморфны.

1. *Штепин В.В.* О геометрических представлениях циклических групп / В.В. Штепин, В.А. Беликова // Труды ИПММ НАН Украины. – Т. 20. – С. 196–205.
2. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. – М.: Мир, 1971.
3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов. – М.: Физико-математическая литература, 2000.
4. *Винберг Э.Б.* Линейные представления групп. – М.: Мир, 1970.
5. *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп. – М.: Наука, 1985.

V. V. Shtepin, V. A. Frasinich

On geometric representation of the cyclic group C_8.

In this article we construct the geometric graph of the group C_8 and geometric representation corresponding to them (it is decomposed into a sum of irreducible) and group of motion of geometric graph of the group C_8.

Keywords: *cyclic group, geometric graph of the finite group, geometric representation.*

В. В. Штепін, В. О. Фрасініч

Про геометричне зображення циклічної групи C_8.

У роботі побудовано геометричний граф групи C_8, відповідне геометричне зображення (розкладено в суму незвідних) та групу рухів геометричного графа групи C_8.

Ключові слова: *циклічна група, геометричний граф скінченної групи, геометричне зображення.*

Донецкий национальный ун-т
`v.frasinich@gmail.com`

Получено 04.06.13