

УДК 531.38

©2013. Е. А. Севостьянов

**ОБ ОДНОМ МОДУЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ КРИВЫХ,  
ВРАЩАЮЩИХСЯ ОТОБРАЖЕНИЕМ ВОКРУГ СЕБЯ**

Работа посвящена изучению пространственных отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением. Для открытых дискретных дифференцируемых почти всюду отображений, обладающих  $N$ ,  $N^{-1}$  и  $ACP^{-1}$ -свойствами, получен аналог неравенства типа Вайсяля относительно модуля произвольного порядка  $p \geq 1$ . Указанное неравенство доказано для кривых, которые вращаются отображением  $f$  вокруг себя  $m$  раз, где  $m$  – некоторое положительное целое число.

**Ключевые слова:** открытые дискретные отображения, модуль семейств кривых, абсолютная непрерывность на кривых.

Основные определения, встречающиеся в статье, могут быть найдены в более ранней работе автора [1]. Основная цель настоящей заметки заключается в доказательстве так называемого модульного неравенства типа Вайсяля, которое для отображений с ограниченным искажением было получено Ю. Вайсяля в 1972 г. в работе [2]. Для случая отображений  $f$  с конечным искажением длины, конформного модуля семейств кривых и семейств путей  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , состоящих, соответственно, из кривых  $\alpha$  и  $\beta$ , связанных соотношением  $f \circ \alpha \subset \beta$ , подобное неравенство было доказано автором данной работы (см. [1, теорема 1]). (Здесь и далее запись  $f \circ \alpha \subset \beta$  означает, что кривая  $f \circ \alpha$  является подкривой кривой  $\beta$ ). Настоящая публикация касается семейств кривых с несколько другими свойствами, нежели в работе [1], для которых будет установлено аналогичное неравенство. Отметим, что его доказательство приведено здесь не только для порядка модуля  $p = n$  (где  $n$  – размерность пространства), но и для случая модуля семейств кривых произвольного порядка  $p \geq 1$ . Отметим также, что общая методология, предложенная при доказательстве в настоящей статье, несколько отличается от подхода, использованного Ю. Вайсяля в [2] в классическом случае ограниченности искажения заданного отображения  $f$ .

Всюду далее  $D$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Следуя [3, раздел 8.4], будем говорить, что отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – слабо нульмерное, если прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in \mathbb{R}^n$  не содержит никакой кривую, отличную от точки. Заметим, что, по определению, все дискретные отображения слабо нульмерны. Однако, несложно указать простые примеры слабо нульмерных отображений (более того, так называемых *отображений с конечным искажением длины*), не являющихся дискретными, см. [3, пример, разд. 8.10, с. 172], см. также замечание 8.3 и предложение 8.5 там же.

Как обычно, *кривой*  $\gamma$  мы называем непрерывное отображение отрезка  $[a, b]$  (открытого, либо полуоткрытого интервала одного из видов:  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ) в  $\mathbb{R}^n$ , пишем  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (см. [4, определение 1.1]). Под семейством кривых  $\Gamma$  подразумевается некоторый фиксированный набор кривых  $\gamma$ , а  $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$ .

Везде далее запись  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагает, что отображение  $f$  непрерывно и сохраняет ориентацию (т.е., топологический индекс  $\mu(y, f, G)$  отображения  $f$  в точке  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$  относительно компактной области  $G \subset D$ ,  $\bar{G} \subset D$ , больше нуля, см. [5, разд. 4, гл. I]).

Следующие определения могут быть найдены, напр., в [4, разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  называется *допустимой* для семейства  $\Gamma$  кривых  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , если  $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$  для всех кривых  $\gamma \in \Gamma$ . В этом случае мы пишем:  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ .

(Здесь и далее символом  $\int_{\gamma} \rho(x) |dx|$  определяется криволинейный интеграл первого рода от функции  $\rho$  по кривой  $\gamma$ , см. [4, разд. 4, гл. I]).

Пусть  $p \geq 1$ ,  $\nu$  – мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $p$ -модулем семейства кривых  $\Gamma$  называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^p(x) d\nu(x).$$

Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \text{Int } A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Напомним, что отображение  $f$  называется *дифференцируемым в точке  $x_0$* , если для любых  $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ , таких, что  $(x_0 + \Delta x) \in A$ , и некоторого линейного преобразования  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , выполнено равенство

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x|,$$

где  $\alpha(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . В этом случае, оператор  $L$  называют *матрицей Якоби* отображения  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается символом  $f'(x_0)$ .

Полагаем  $l(f'(x)) := \inf_{h \in \mathbb{R}^n: |h|=1} |f'(x)h|$ . *Внутренней дилатацией порядка  $p$*  отображения  $f$  в точке  $x$  называется величина

$$K_{I,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определения спрямляемой и локально спрямляемой кривой, натурального параметра кривой, а также длины кривой, используемые ниже, могут быть найдены, например, в книге Ю. Вайсяля [4] (см. здесь главу I). Здесь и далее кривая  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  будет называться *замкнутой* (т.е., кривая – замкнута, если её областью определения является некоторый отрезок  $[a, b]$ ). Пусть  $\Delta \subset \mathbb{R}$  – открытый интервал числовой прямой,  $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  – локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины  $l_{\gamma} : \Delta \rightarrow \Delta_{\gamma} \subset \mathbb{R}$  с условием  $l_{\gamma}(t_0) = 0$ ,  $t_0 \in \Delta$ , такая что значение  $l_{\gamma}(t)$  равно длине подкривой  $\gamma|_{[t_0, t]}$  кривой  $\gamma$ , если  $t > t_0$ , и длине подкривой  $\gamma|_{[t, t_0]}$  со знаком “-”, если  $t < t_0$ ,  $t \in \Delta$  (по этому поводу см., напр., [3, разд. 8.1, гл. 8]). Пусть  $g : |\gamma| \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывное отображение, где  $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ . Предположим, что кривая  $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$  также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция  $L_{\gamma, g} : \Delta_{\gamma} \rightarrow \Delta_{\tilde{\gamma}}$  такая, что  $L_{\gamma, g}(l_{\gamma}(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t)$  при всех  $t \in \Delta$ .

Весьма полезным для дальнейшего исследования является следующее замечание.

**Замечание 1.** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  спрямляемая кривая. Заметим, что свойства функции  $L_{\gamma, f}$  между натуральными параметрами  $l_\gamma(t)$  и  $l_{\tilde{\gamma}}(t)$  (локально спрямляемых) кривых  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  таких, что  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , существенно не зависят от выбора  $t_0 \in (a, b)$ . В случае замкнутой кривой  $\gamma$  мы будем считать, что  $t_0 = a$ , поскольку при заданном  $t_0 \in (a, b)$  выполнено равенство  $S(\gamma, [a, t]) = S(\gamma, [a, t_0]) + l_\gamma(t)$ , где  $S(\gamma, [a, t])$  обозначает длину кривой  $\gamma|_{[a, t]}$ . Пусть  $I = [a, b]$ . Для спрямляемой кривой  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  определим функцию длины  $l_\gamma(t)$  по следующему правилу:  $l_\gamma(t) = S(\gamma, [a, t])$ .

Кривая  $\gamma$  называется (полным) поднятием кривой  $\tilde{\gamma}$  при отображении  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ . Будем говорить, что свойство  $P$  имеет место для  $p$ -почти всех кривых, если  $p$ -модуль семейства всех кривых  $\Gamma$ , для которых свойство  $P$  нарушается, равен нулю.

Предположим, что  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – слабо нульмерное отображение, тогда для локально спрямляемых кривых  $\tilde{\gamma}$  и  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , (корректно) может быть определена функция  $L_{\gamma, f}^{-1}$ . В таком случае, согласно [3, разд. 8.4, гл. 8], будем говорить, что  $f$  обладает свойством  $ACP_p^{-1}$  в области  $D$ , пишем  $f \in ACP_p^{-1}$ , если для  $p$ -почти всех кривых  $\tilde{\gamma} \in f(D)$  каждое поднятие  $\gamma$  кривой  $\tilde{\gamma}$  при отображении  $f$ ,  $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ , является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция  $L_{\gamma, f}^{-1}$  абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в  $\Delta_{\tilde{\gamma}}$  для  $p$ -почти всех кривых  $\tilde{\gamma}$  в  $f(D)$  и каждого поднятия  $\gamma$  кривой  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ .

Пусть  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – спрямляемая замкнутая кривая в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $l(\alpha)$  – её длина. *Нормальным представлением кривой  $\alpha$*  называется кривая  $\alpha^0 : [0, l(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что  $\alpha(t) = \alpha^0(S(\alpha, [a, t])) = \alpha^0 \circ l_\alpha(t)$ . Отметим, что такая кривая  $\alpha^0$  существует и единственна, при этом,  $S(\alpha^0, [0, t]) = t$  при  $t \in [0, l(\alpha)]$ , см. [4, теорема 2.4].

Далее  $I$  означает открытый, замкнутый или полуоткрытый конечный интервал числовой оси. Следующее определение может быть найдено в [5, п. 5, гл. II].

Пусть  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – слабо нульмерное отображение,  $\beta : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  замкнутая спрямляемая кривая и  $\alpha : I \rightarrow D$  кривая такая, что  $f \circ \alpha \subset \beta$ . Если функция длины  $l_\beta : I_0 \rightarrow [0, l(\beta)]$  постоянна на некотором интервале  $J \subset I_0$ , то  $\beta$  постоянна на  $J$  и, в силу слабой нульмерности  $f$ , кривая  $\alpha$  также постоянна на  $J$ . Следовательно, существует единственная кривая  $\alpha^* : l_\beta(I) \rightarrow D$  такая, что  $\alpha = \alpha^* \circ (l_\beta|_I)$ . Будем говорить, что  $\alpha^*$  является  $f$ -представлением кривой  $\alpha$  относительно  $\beta$ .

Пусть  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$  – замкнутая кривая. Будем говорить, что  $f$  вращает кривую  $\alpha$   $m$  раз вокруг себя, если кривая  $f \circ \alpha = \beta$  спрямляема и выполнено следующее условие. Пусть  $\beta^0 : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – нормальное представление кривой  $\beta$ , кривая  $\alpha^* : [0, c] \rightarrow D$ ,  $c = l(\beta)$ , является  $f$ -представлением  $\alpha$  по отношению к  $\beta$  и  $h = c/m$ . Тогда  $\beta^0(t + jh) = \beta^0(t)$  и  $\alpha^*(t + jh) \neq \alpha^*(t)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  таких, что  $0 \leq t < t + jh < c$  и  $j \in \{1, \dots, m - 1\}$ .

Напомним, что отображение  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  обладает  $N$ -свойством (Лузина), если из условия  $\nu(E) = 0$  следует, что  $\nu(f(E)) = 0$ . Отображение  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  обладает  $N^{-1}$ -свойством (Лузина), если из условия  $\nu(E) = 0$  следует, что  $\nu(f^{-1}(E)) = 0$ .

Следующий результат при  $p = n$  для отображений  $f$  с ограниченным искажением

ем, что соответствует ограниченной функции  $K_{I,n}(x, f)$ , доказан в работе [2, теорема 3.9]. В настоящей работе аналогичное заключение приводится для более широкого класса отображений, когда функция  $K_{I,p}(x, f)$  просто измерима (не обязательно интегрируема), а  $p \in \mathbb{N}$  – некоторое число, которое может не совпадать с размерностью пространства  $n$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $p \geq 1$ , отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференцируемо почти всюду и имеет  $N, N^{-1}$  и  $ACP_p^{-1}$ -свойства. Предположим, что  $\Gamma$  – семейство кривых в  $D$  и  $m \in \mathbb{N}$  – фиксированное число такое, что  $f$  вращает каждую кривую семейства  $\Gamma$  вокруг себя  $m$  раз. Тогда

$$M_p(f(\Gamma)) \leq \frac{1}{m} \cdot \int_D K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) \, d\nu(x)$$

для каждой функции  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ .

Следующее утверждение содержит в себе критерий выполнения свойства  $ACP_p^{-1}$  для произвольного отображения в терминах абсолютной непрерывности соответствующих кривых (результат доказан автором работы).

**Лемма 1.** Слабо нульмерное отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  обладает  $ACP_p^{-1}$ -свойством при некотором  $p \geq 1$  тогда и только тогда, когда кривая  $\gamma^*$  является спрямляемой и абсолютно непрерывной для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ .

Тут и далее  $\gamma^*$  означает  $f$ -представление кривой  $\gamma$  по отношению к  $\tilde{\gamma}$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $f$  обладает  $ACP_p^{-1}$ -свойством. Тогда, во-первых,  $L_{\gamma,f}^{-1}$  определена корректно для  $p$ -почти всех кривых  $\tilde{\gamma}$  таких, что  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ . Во-вторых, кривая  $\gamma^*$  является спрямляемой для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma}$  как только  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , поскольку  $(\gamma^*)^0 = \gamma^0$  (см. [4, теорема 2.6]). Кроме того, для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma}$  и всех  $\gamma$  таких, что  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , мы получаем

$$\gamma(t) = \gamma^* \circ l_{\tilde{\gamma}}(t) = \gamma^0 \circ l_{\tilde{\gamma}}(t) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(l_{\tilde{\gamma}}(t)).$$

Полагая  $l_{\tilde{\gamma}}(t) := s$ , имеем

$$\gamma^*(s) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(s).$$

Таким образом, кривая  $\gamma^*$  абсолютно непрерывна, поскольку  $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$  абсолютно непрерывна и

$$|\gamma^0(t_1) - \gamma^0(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$$

для всех  $t_1, t_2 \in [0, l(\gamma)]$ .

*Достаточность.* Поскольку отображение  $f$  слабо нульмерно, функция  $L_{\gamma,f}^{-1}$  корректно определена для  $p$ -почти всех  $\tilde{\gamma}$  и всех  $\gamma$  таких, что  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ . Согласно предположению, кривая  $\gamma^*$  спрямляема для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ ; в частности,  $\gamma^{*0} = \gamma^0$ . Более того, для таких кривых  $l_{\gamma^*}(s) = L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ . Следовательно, для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma}$  и всех  $\gamma$  таких, что  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , кривая  $\gamma$  спрямляема и функция  $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$  абсолютно непрерывна (см. [4, теорема 1.3]). Пусть

$\Gamma_1$  – семейство всех замкнутых кривых  $\tilde{\alpha} = f \circ \alpha$  в области  $f(D)$  таких, что кривая  $\alpha^*$  либо не спрямляема, либо функция  $L_{\alpha, f}^{-1}(s)$  не абсолютно непрерывна. Пусть  $\Gamma$  – семейство всех кривых  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$  в области  $f(D)$  таких, что  $\gamma$  либо не локально спрямляема, либо функция  $L_{\gamma, f}^{-1}(s)$  не локально абсолютно непрерывна. Тогда  $\Gamma > \Gamma_1$  и, следовательно,  $M_p(\Gamma) \leq M_p(\Gamma_1) = 0$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Пусть  $E$  – множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  – некоторая кривая. Обозначим через  $\gamma \cap E = \gamma(\Delta) \cap E$ . Имеет место следующее утверждение, связывающее свойства функции длины локально спрямляемой кривой со свойствами произвольного измеримого множества в  $\mathbb{R}^n$ , вытекающее из [3, теорема 9.1].

**Предложение 1.** Пусть  $p \geq 1$ ,  $E$  – множество в области  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Тогда множество  $E$  измеримо тогда и только тогда, когда множество  $\gamma \cap E$  измеримо для  $p$ -почти всех кривых  $\gamma$  в  $D$ . Более того,  $\nu(E) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{mes}_1 \{s \in (0, l(\gamma)) : \gamma^0(s) \in E\} = 0$  для  $p$ -почти всех кривых  $\gamma$  в  $D$ , где  $\text{mes}_1$  обозначает линейную меру Лебега на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство теоремы 1.* Поскольку отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  почти всюду дифференцируемо и обладает  $N$  и  $N^{-1}$ -свойствами Лузина, найдётся не более чем счётная последовательность компактных множеств  $C_k^* \subset D$  такая, что  $\nu(B) = 0$ , где  $B = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^*$  и  $f|_{C_k^*}$  взаимно однозначно и билипшицево для каждого  $k = 1, 2, \dots$  (см. [3, гл. 8, леммы 8.2 и 8.3]). Более того,  $f$  дифференцируемо при всех  $x \in C_k^*$  и выполнено условие  $J(x, f) \neq 0$ . Полагаем  $B_0 = B$ ,  $B_1 = C_1^*$ ,  $B_2 = C_2^* \setminus B_1 \dots$ ,

$$B_k = C_k^* \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l.$$

Таким образом, мы получим не более, чем счётное покрытие области  $D$  борелевскими множествами  $B_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , причём  $B_l \cap B_j = \emptyset$  при  $l \neq j$  и  $\nu(B_0) = 0$ , где  $B_0 = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ . Поскольку отображение  $f$  обладает  $N$ -свойством, получаем  $\nu(f(B_0)) = 0$ . По предложению 1 получаем, что  $\tilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$  для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma}$  в области  $f(D)$  и почти всех  $s \in [0, l(\tilde{\gamma})]$ ; здесь  $\tilde{\gamma}^0(s)$  обозначает нормальное представление кривой  $\tilde{\gamma}(s)$ . Кроме того, по лемме 1 кривая  $\gamma^*$ , являющаяся  $f$ -представлением кривой  $\gamma$ , абсолютно непрерывна для  $p$ -почти всех замкнутых кривых  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ . Здесь  $f$ -представление  $\gamma^*$  кривой  $\gamma$  корректно определено для  $p$ -почти всех кривых  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , поскольку по предположению  $f$  – слабо нульмерное отображение.

Пусть  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ . Полагаем

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)), & x \in D \setminus B_0, \\ 0, & x \in B_0, \end{cases}$$

где, как обычно,  $l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$ . Рассмотрим следующую функцию:

$$\tilde{\rho}(y) = \frac{1}{m} \cdot \chi_{f(D \setminus B_0)}(y) \sup_C \sum_{x \in C} \rho^*(x),$$

где  $C$  пробегает все подмножества  $f^{-1}(y)$  в  $D \setminus B_0$ , количество элементов которых не больше  $m$ . Заметим, что

$$\tilde{\rho}(y) = \frac{1}{m} \cdot \sup \sum_{i=1}^s \rho_{k_i}(y), \quad (1)$$

где  $\sup$  в (1) берётся по всем возможным наборам  $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}\}$  таким, что  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \neq k_j$  при  $i \neq j$ , всех  $s \leq m$  и

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \rho^*(f_k^{-1}(y)), & y \in f(B_k), \\ 0, & y \notin f(B_k), \end{cases}$$

а каждое из отображений  $f_k = f|_{B_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , инъективно. Из (1) следует, что функция  $\tilde{\rho}(y)$  является борелевской, поскольку множества  $f(B_k)$  борелевские, см. [6, разд. 2.3.2].

Для заданной спрямляемой кривой  $\beta$  обозначим числом  $c$  её длину,  $c := l(\beta)$ , а через  $\beta^0$ , как обычно, её нормальное представление. Используя определения семейств кривых  $\Gamma$  и  $f(\Gamma)$ , для каждой кривой  $\beta \in f(\Gamma)$  мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \tilde{\rho}(y) |dy| &= \int_0^c \tilde{\rho}(\beta^0(t)) dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\frac{c(j-1)}{m}}^{\frac{cj}{m}} \tilde{\rho}(\beta^0(t)) dt = \sum_{j=1}^m \int_0^{\frac{c}{m}} \tilde{\rho} \left( \beta^0 \left( t + \frac{c(j-1)}{m} \right) \right) dt = \\ &= m \int_0^h \tilde{\rho}(\beta^0(t)) dt, \quad h = c/m. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $0 < t < h$ , тогда точки  $\alpha^*(t)$ ,  $\alpha^*(t+h)$ ,  $\dots$ ,  $\alpha^*(t+(m-1)h)$  являются различными точками множества  $f^{-1}(\beta^0(t))$ . Следовательно,

$$\tilde{\rho}(\beta^0(t)) \geq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \rho^*(\alpha^*(t+jh)) \quad (3)$$

для всех  $t \in (0, h)$ . В силу предложения 1 можно считать, что  $\beta^0(t) \notin f(B_0)$  при почти всех  $t \in [0, c]$ . Поскольку кривая  $\beta(t)$  спрямляема,  $\beta(t)$  дифференцируема почти всюду на  $[0, c]$  (см. [4, теорема 1.3]). Кроме того, кривая  $\alpha^*$  спрямляема и абсолютно непрерывна для  $p$ -почти всех кривых  $\beta$ , более того,  $\alpha^*(t) \notin B_0$  при почти всех  $t \in [0, c]$ . Следовательно, производные  $f'(\alpha^*(t))$  и  $\alpha^{*'}(t)$  существуют при почти всех  $t \in [0, c]$ . Учитывая формулу вычисления производной сложной функции, а также то, что модуль производной кривой по натуральному параметру равен 1 (см., напр., [4, п. (5) теоремы 1.3 и п. (2) теоремы 2.4]), получаем

$$1 = |(f \circ \alpha^*)'(t)| = |f'(\alpha^*(t)) \alpha^{*'}(t)| =$$

Об одном модульном неравенстве для кривых, вращающихся отображением вокруг себя

$$= \left| f'(\alpha^*(t)) \cdot \frac{\alpha^{*'}(t)}{|\alpha^{*'}(t)|} \right| \cdot |\alpha^{*'}(t)| \geq l(f'(\alpha^*(t))) \cdot |\alpha^{*'}(t)| \quad (4)$$

для  $p$ -почти всех кривых  $\beta \in f(\Gamma)$ ,  $\beta = f \circ \alpha$ . Из (4) следует, что

$$\rho^*(\alpha^*(t)) = \frac{\rho(\alpha^*(t))}{l(f'(\alpha^*(t)))} \geq \rho(\alpha^*(t)) \cdot |\alpha^{*'}(t)|. \quad (5)$$

В силу абсолютной непрерывности кривой  $\alpha^*$ , формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода (см. [4, теорема 4.1]), (2), (3) и (5) мы получаем, что

$$\int_{\beta} \tilde{\rho}(y) |dy| \geq \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^h \rho(\alpha^*(t+jh)) \cdot |\alpha^{*'}(t+jh)| dt = \int_{\alpha} \rho(x) |dx| \geq 1.$$

Следовательно,  $\tilde{\rho} \in \text{adm } f(\Gamma) \setminus \Gamma_0$ , где  $M_p(\Gamma_0) = 0$ . Отсюда

$$M_p(f(\Gamma)) \leq \int_{f(D)} \tilde{\rho}^p(y) d\nu(y). \quad (6)$$

По [6, теорема 3.2.5] при  $m = n$  мы получаем, что

$$\int_{B_k} K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) d\nu(x) = \int_{f(D)} \rho_{k_i}^p(y) d\nu(y). \quad (7)$$

По неравенству Гёльдера для сумм

$$\left( \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^s \rho_{k_i}(y) \right)^p \leq \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^s \rho_{k_i}^p(y) \quad (8)$$

для каждого  $1 \leq s \leq m$  и  $\{k_1, \dots, k_s\}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \neq k_j$ , как только  $i \neq j$ .

По теореме Лебега о сходимости (см. [7, теорема 12.3, § 12, гл. I]), из соотношений (6)–(8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \cdot \int_D K_{I,p}(x, f) \cdot \rho^p(x) d\nu(x) &= \frac{1}{m} \cdot \int_{f(D)} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^p(y) d\nu(y) \geq \\ &\geq \frac{1}{m} \cdot \int_{f(D)} \sup_{\substack{\{k_1, \dots, k_s\}, k_i \in \mathbb{N}, \\ k_i \neq k_j \text{ if } i \neq j}} \sum_{i=1}^s \rho_{k_i}^p(y) d\nu(y) \geq \int_{f(D)} \tilde{\rho}^p(y) d\nu(y) \geq M_p(f(\Gamma)). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.  $\square$

**Замечание 2.** В частности, теорема 1 имеет место для так называемых отображений с конечным искажением длины (в этом случае  $p = n$ , см. [3, гл. 8]). Результаты работы могут быть применены к различным классам отображений, скажем, к проблеме устранения особенностей (см., например, работу [2]). По этому поводу см. также [8], [9], [10] и [11].

1. *Sevost'yanov E.A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – Vol. 55, No. 1–3. – P. 91–101.
2. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1972. – Vol. 509. – P. 1–14.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Väisälä J.* Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., **229**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
5. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
6. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – Москва: Наука, 1987.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. – Москва: ИЛ, 1949.
8. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397–1420.
9. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения. – Москва: Наука, 1983.
10. *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded  $p$ -moduli // Ann. Univ. Bucharest (math. series). – 2012. – Vol. 3, No. 1. – P. 49–66.
11. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, **26**. – New York: Springer, 2012.

#### Е. А. Sevost'yanov

##### On one modulus inequality for curves turning around itself by a mapping.

The paper is devoted to study of space mappings which are more general than mappings with bounded distortion. For open discrete differentiable a.a. mappings having  $N$ ,  $N^{-1}$  and  $ACP^{-1}$ -properties, it is obtained an analog of Väisälä inequality with respect to modulus of the order  $p \geq 1$ . The inequality mentioned above is proved for curves turning around itself  $m$  times by a mapping  $f$ , where  $m$  is some positive number.

**Keywords:** open discrete mappings, modulus of families of curves, absolute continuity on curves.

#### Є. О. Севостьянов

##### Про одну модульну нерівність для кривих, що обертаються відображенням навколо себе.

Работу присвячено вивченню просторових відображень, більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням. Для відкритих дискретних диференційовних майже скрізь відображень, що мають  $N$ ,  $N^{-1}$  і  $ACP^{-1}$ -властивості, отримано аналог нерівності типу Вяйсяля відносно модуля довільного порядку  $p \geq 1$ . Вказану нерівність доведено для кривих, котрі обертаються відображенням  $f$  навколо себе  $m$  разів, де  $m$  – деяке додатне ціле число.

**Ключові слова:** відкриті дискретні відображення, модуль сімей кривих, абсолютна неперервність на кривих.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
esevostyanov2009@mail.ru

Получено 25.11.13