УДК 512.579

©2013. **О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна**

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕРЛІНАЦІЙНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ДВОМА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

У статті пропонуються і досліджуються схеми методу скінченних елементів для розв'язання початково-крайових задач, побудовані на основі формул інтерполяції за двома просторовими змінними, з використанням інтерлінації функцій. Розглянуто приклад, точний розв'язок якого побудований з використанням R-функцій.

Ключові слова: *нестаціонарна задача теплопровідності, метод скінченних елементів.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність. Одним з ефективних чисельних методів для визначення розподілу температури в тілі є метод скінченних елементів. Якщо просторових змінних дві або три, виникає велика кількість рівнянь (диференціальних або в стаціонарному випадку алгебраїчних), які треба розв'язувати при заданих граничних і початкових умовах. Тому доцільно для розв'язання таких задач використовувати нові методи.

Враховуючи, що методи інтерлінації функцій двох змінних дозволяють будувати схеми методу скінченних елементів, які для досягнення заданої точності вимагають розв'язання значно меншого числа диференціальних рівнянь, актуальним є застосування і дослідження їх обчислювальних можливостей для розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності.

Тому в даній роботі будується та досліджується інтерлінаційний метод скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач, основа якого викладена в статтях [1–2].

2. Дослідження авторів. В роботах [1–5] досліджувався метод скінченних елементів розв'язання початково-крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(p_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(p_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}) + q(x,y)u = f(x,y,t)$$

з двома просторовими змінними з використанням формул сплайн-інтерполяції за просторовими змінними x, y, побудованими на основі сплайн-інтерлінації функції трьох змінних $u(x,y,t)$. В методі наближений розв'язок представляється у вигляді формул сплайн-інтерполяції за просторовими змінними з коефіцієнтами, що є функціями змінної t. Тому цей метод будемо називати інтерлінаційним методом скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач. Він ґрунтується на заміні сплайнами слідів наближеного розв'язку у формулах інтерлінації, які використовуються для його представлення, і є скінченно-елементною реалізацією методу ЛІДР розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними (методу зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь).

Зокрема, в працях [4–6] розглянуто застосування цього методу для розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для випадку областей, що є об'єднанням прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат.

3. Нерозв'язані проблеми і мета роботи. Не дивлячись на теоретичну обгрунтованність методу, нерозв'язаною є задача його чисельної реалізації. Труднощі, які можуть виникнути при чисельній реалізації, пов'язані, перш за все, з нерегулярністю вузлів розбиття, у яких треба знайти невідомі функції змінної t у структурі наближеного розв'язку.

У даній роботі вказаний метод узагальнюється на випадок областей, обмежених дугами відомих кривих. Розглянуто приклад. Інші приклади див. у роботах [4–6].

4. Теоретичні твердження щодо загального методу побудови функцій $u(x, y, t)$, які точно задовольняють умовам Діріхле на границі довільної області $G \subset R^2$. Для побудови структур розв'язків початково-крайових задач узагальнюємо метод [3] побудови функцій двох змінних x, y, які точно задовольняють граничним умовам на границі двовимірних областей складної форми (при узагальненні вважаємо t параметром).

З практичної точки зору важливою є побудова операторів інтерлінації на лініях ректангуляції та тріангуляції в областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих. Вважаємо, що $G \subset R^2$ – обмежена область на площині, границя якої ∂G є об'єднанням дуг відомих кривих.

Припустимо, що область G повністю розміщена в прямокутнику $[a, b] \times [c, d]$. Розіб'ємо G на підобласті прямими $x = x_k$, $k = \overline{0, M_1}$ та $y = y_l$, $l = \overline{0, M_2}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{M_1} = b$, $c = y_0 < y_1 < ... < y_{M_2} = d$. Ці підобласті можуть бути прямокутниками $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$ або чотирикутниками:

$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G$, $R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$,

$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$, $R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G$,

в яких три сторони паралельні вісям координат, а одна – криволінійна (взагалі кажучи) сторона – є частиною границі області ∂G. Крім того, підобласті, на які розбивається область G, можуть бути трикутниками:

$T_{i,j}^{(1)} = \left\{(x, y) \,|x_i \le x \le x_{i+1}, \;\; y_j \le y \le \eta_{j+1}(x), \;\; \eta'_{j+1}(x) < 0\right\}$,

$T_{i,j}^{(2)} = \left\{(x, y) \,|x_{i-1} \le x \le x_i, \;\; y_j \le y \le \eta_{j+1}(x), \;\; \eta'_{j+1}(x) > 0\right\}$,

$T_{i,j}^{(3)} = \left\{(x, y) \,|x_{i-1} \le x \le x_i, \;\; \eta_{j-1}(x) \le y \le y_j, \;\; \eta'_{j-1}(x) < 0\right\}$,

$T_{i,j}^{(4)} = \left\{(x, y) \,|\, x_i \le x \le x_{i+1}, \;\; \eta_{j-1}(x) \le y \le y_j, \;\; \eta'_{j-1}(x) > 0\right\}$, в яких одна із сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі ∂G області G.

Введемо позначення:

$$O_{i,j}^{(1)} F(x, y, t) = (P_1 + P_2 - P_1 P_2) F(x, y, t),$$

$$P_1 F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} F(x, y_{j+1}(x), t),$$

$$P_2 F(x, y, t) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} F(x_i, y, t) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} F(x_{i+1}, y, t),$$

$$P_1P_2F(x,y,t)=\frac{y-y_{j+1}(x)}{y_j-y_{j+1}(x)}P_2F(x,y_j,t)+\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}P_2F(x,y_{j+1}(x),t).$$

Теорема 1. *Оператор $O_{i,j}^{(1)}F(x,y,t)$ інтерлінує функцію $F(x,y,t)\in C\left(R_{i,j}^{(1)}\right)$ на границі чотирикутника $R_{i,j}^{(1)}$ з однією криволінійною стороною:*

$$O_{i,j}^{(1)}F(x,y,t)=F(x,y,t),\quad (x,y)\in\partial R_{i,j}^{(1)},$$

тобто $O_{i,j}^{(1)}F(x_q,y,t)=F(x_q,y,t),\ q=i,i+1,\ O_{i,j}^{(1)}F(x,y_j,t)=F(x,y_j,t)$, $O_{i,j}^{(1)}F(x,y_{j+1}(x),t)=F(x,y_{j+1}(x),t)\ \forall t\in[0,\infty)$.

Аналогічно будуються інтерлінанти, що інтерлінують функцію $F(x,y,t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(2)}$, $R_{i,j}^{(3)}$, $R_{i,j}^{(4)}$.

Розглянемо прямокутний трикутник T з вершинами O(0,0), A(1,0), B(0,1) і гіпотенузою AB, яка визначається рівнянням $f(x)+g(y)=1$, де функції $f(x),g(y)$ неперервні і монотонні на $[0,1]$ і задовольняють умови $f(0)=0$, $f(1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$.

Теорема 2. *Нехай $F(x,y,t)\in C(T)$,*

$$P_1F(x,y,t)=f(x)F\left(f^{-1}(1-g(y)),y,t\right)+g(y)F\left(x,g^{-1}(1-f(x)),t\right),$$

$$P_2F(x,y,t)=F(x,0,t)+F(0,y,t)-F(0,0,t).$$

Тоді оператор

$$\begin{aligned}&P_{12}F(x,y,t)=(P_1\oplus P_2)F(x,y,t):=(P_1+P_2-P_1P_2)F(x,y,t)=\\&=f(x)F\left(f^{-1}(1-g(y)),y,t\right)+g(y)F\left(x,g^{-1}(1-f(x)),t\right)+\\&+F(x,0,t)+F(0,y,t)-F(0,0,t)-\\&-f(x)\left[F(0,y,t)+F\left(f^{-1}(1-g(y)),0,t\right)-F(0,0,t)\right]-\\&-g(y)\left[F\left(0,g^{-1}(1-f(x)),t\right)+F(x,0,t)-F(0,0,t)\right]\end{aligned}\tag{1}$$

інтерлінує функцію $F(x,y,t)$ на трьох сторонах трикутника T, тобто $P_{12}F(x,0,t)=F(x,0,t)$, $P_{12}F(0,y,t)=F(0,y,t)$, $P_{12}F(x,y,t)=F(x,y,t)$, *якщо* $f(x)+g(y)=1\ \forall t\in[0,\infty)$.

Теорема 3. *Нехай оператори $OR_{i,j}^{(q)}F(x,y,t)$, $q=0,1,...,4$ інтерлінують функцію $F(x,y,t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(q)}, q=0,1,...,4$, а оператори $OT_{i,j}^{(q)}F(x,y,t), q=1,...,4$ інтерлінують функцію $F(x,y,t)$ на сторонах трикутників $T_{i,j}^{(q)}\subset G$ з криволінійною (взагалі кажучи) гіпотенузою (означених вище).*

Тоді оператор

$$O_GF(x,y,t)=\begin{cases}OR_{i,j}^{(q)}F(x,y,t), & (x,y)\in R_{i,j}^{(q)},\quad q=0\vee 1\vee ...\vee 4,\\ OT_{i,j}^{(q)}F(x,y,t), & (x,y)\in T_{i,j}^{(q)},\quad q=1\vee ...\vee 4\end{cases}$$

інтерлінує функцію $F(x,y,t)$ *на прямих* $x = x_k \in [a,b]$, $y = y_i \in [c,d]$, *а також на границі* ∂G *довільної області* G, *тобто* $O_G F(x_k,y,t) = F(x_k,y,t)$, $O_G F(x,y_i,t) = F(x,y_i,t)$, $O_G F(x,y,t) = F(x,y,t)$, $(x,y) \in \partial G$. *При цьому* $O_G F(x,y,t) \in C(G)$ $\forall F(x,y,t) \in C(G)$ $\forall t \geq 0$, $O_G F(x,y,t) \in W_2^1(G)$ $\forall t \geq 0$.

Теорема 4. *Нехай* G *– трикутник з криволінійною границею* ∂G, $G = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ f(x) + g(y) \leq 1\}$ *і* $F(x,y,0) = \varphi(x,y)$. *Тоді функція* $H(x,y,t) = \varphi(x,y) + U(x,y,t) - U(x,y,0)$, *де* $U(x,y,t) = P_{12}F(x,y,t)$, *задовольняє початкову умову* $H(x,y,0) = \varphi(x,y)$ *та граничну умову* $H(x,y,t) = U(x,y,t)$, $(x,y) \in \partial G$ *(*$F(x,y,t)$ *– довільна неперервна в* G *функція), тобто* $P_{12}F(x,y,0)|_{\partial G} = \varphi(x,y)|_{\partial G}$, $P_{12}F(x,y,t) = F(x,y,t)$ $\forall (x,y) \in \partial G$ *і* $\forall t \geq 0$ *(*P_{12} *визначається рівністю (1)).*

Наслідок. *Якщо є неперервні, двічі диференційовані функції* $\varphi(x,y)$, $u(x,y,t)$ *за змінними* x, y, *а* $u(x,y,t)$ *є, крім того, диференційованою функцією за змінною* t $\forall x, y$, *то функція* $u(x,y,t) = \varphi(x,y) + U(x,y,t) - U(x,y,0)$ *є точним розв'язком початково-крайової задачі*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x,y,t), t > 0, (x,y) \in G, \qquad (2)$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), (x,y) \in G,$$

$$u(x,y,t) = U(x,y,t), (x,y) \in \partial G$$

за умови, що

$$f(x,y,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (3)$$

$$U(x,y,t) = P_{12}F(x,y,t), \quad F(x,y,t) \in C^{(2,2,1)}(G).$$

5. Результати обчислювального експерименту. Розглянемо приклад. Знайти наближений розв'язок крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x,y,t) + f(x,y,t), (x,y) \in G, t > 0, \qquad (4)$$

$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \qquad (5)$$

$$u(x,y,t)|_{\partial G} = 0, \qquad (6)$$

де G – Т-подібна область – вертикальний переріз балки (рис. 1).

Область $G = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi_1 = [-a,a] \times [0,b]$, $\Pi_2 = [-c,c] \times [0,d]$.

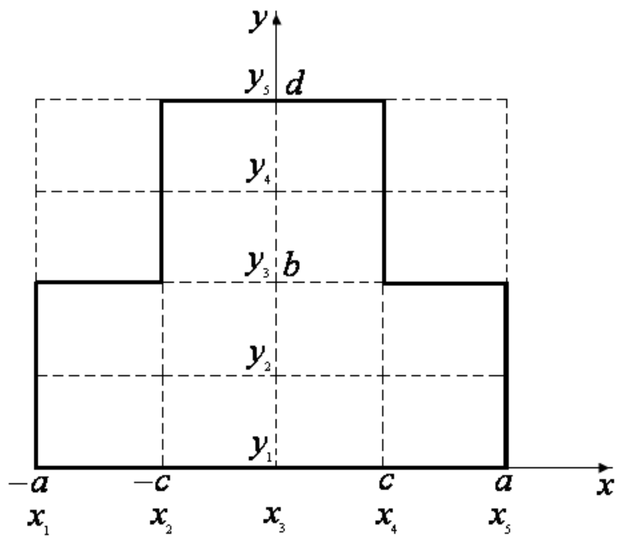

Рис. 1. Область інтегрування: Т-подібна область – вертикальний переріз балки

Розбиваємо область G на прямокутники (рис. 2).

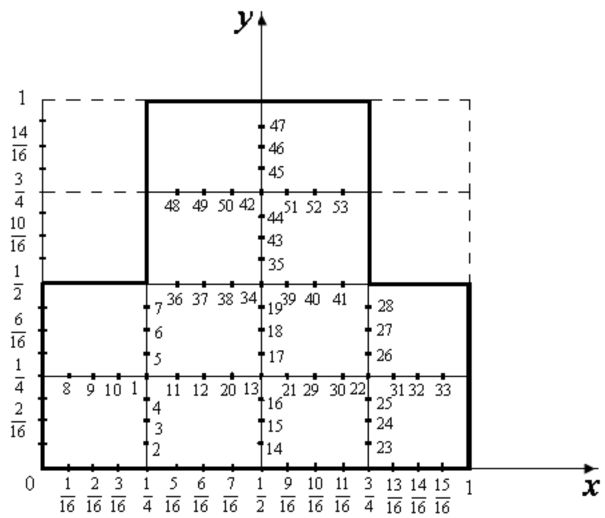

Рис. 2. Схема розбиття області G на прямокутники

Функція $f(x, y, t)$ має вигляд:

$$f(x, y, t) = e^{-\beta t}\left(-\beta w(x, y) - \Delta w(x, y)\right),$$

де

$$w(x, y) = \omega_1(x, y) \vee_{\alpha(x,y)} \omega_2(x, y), \tag{7}$$

$$\omega_1(x,y) = \left(a^2 - x^2\right) y (b - y), \omega_2(x,y) = \left(c^2 - x^2\right) y (d - y),$$
$$\alpha(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2},$$
$$u \vee_\alpha v = u + v + \sqrt{u^2+v^2-2\alpha(u,v)\,uv},$$
$$u \wedge_\alpha v = u + v - \sqrt{u^2+v^2-2\alpha(u,v)\,uv}.$$

Згідно з методом R-функцій [7–8], функції $u \vee_\alpha v$ і $u \wedge_\alpha v$ є R-диз'юнкцією і R-кон'юнкцією відповідно, тобто функція $w(x,y)$ буде мати властивості: $w(x,y) > 0$, якщо $(x,y) \in G$; $w(x,y) = 0$, якщо $(x,y) \in \partial G$.

Враховуємо наступні властивості R-операцій:

$u \wedge_\alpha v > 0$, якщо $u > 0$ або $v > 0$;

$u \wedge_\alpha v < 0$, якщо $u < 0$ і $v < 0$;

$u \vee_\alpha v = 0$, якщо $u = 0, v \le 0$ або $v = 0, u \le 0$.

Враховуючи, що в формулі (7) $\omega_1(x,y) > 0$ і $\omega_2(x,y) > 0$ не тільки в прямокутниках Π_1 і Π_2, то $\omega(x,y) > 0$ не тільки в області G. Але на границі області G вона дорівнює нулю, тобто $w(x,y) = 0, (x,y) \in \partial G$.

Це дозволяє стверджувати, що $\omega(x,y) > 0$, якщо $(x,y) \in G$, і $w(x,y) = 0$, якщо $(x,y) \in \partial G$, тобто функція $\omega(x,y)$ може розглядатися, як точний розв'язок поставленої задачі.

Для наближеного розв'язання сформульованої задачі область інтегрування розбивалася на прямокутні елементи прямими $x = x_k, k = \overline{0, M_1}$ та $y = y_l, l = \overline{0, M_2}$, $M = (M_1, M_2)$, $-a = x_0 < x_1 < ... < x_{M_1} = a$, $0 = y_0 < y_1 < ... < y_{M_2} = d$. При цьому $\exists\, k : x_k = -x_{2k} = c$ та $\exists\, \ell : y_\ell = b$.

Згідно з методом, викладеним у статтях [1–5], наближений розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$u_M(x,y,t) = \sum_{k=1}^{M_1}\sum_{s=0}^{1} \psi_{k\,s}(y,t)\, h_{k\,s}(x) + \sum_{\ell=1}^{M_2}\sum_{p=0}^{1} \varphi_{\ell\,p}(x,t)\, H_{\ell\,p}(y) -$$
$$- \sum_{k=1}^{M_1}\sum_{s=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{M_2}\sum_{p=0}^{1} C_{k\,s\,\ell\,p}(t)\, h_{k\,s}(x)\, H_{\ell\,p}(y),$$

де невідомі функції $\psi_k(y,t)$, $\varphi_\ell(x,t)$, знаходяться у вигляді:

$$\varphi_\ell\,(x,t) = \sum_{q=1}^{M_1} C_{q\,\ell}\,(t)\, h_q\,(x), h_q\,(x) = h\,(M_1 x - q)\,,$$

$$\psi_k\,(y,t) = \sum_{m=1}^{M_2} C_{k\;m}\,(t)\, H_m\,(y)\,, H_m\,(y) = h\,(M_2 y - m),$$

де $h(z) = \begin{cases} 0, z \le -1, \\ 1 + z, -1 < z \le 0, \\ 1 - z, 0 < z < 1, \\ 0, z \ge 1. \end{cases}$

Зокрема, якщо $M_1 = M_2 = 5$, то

$$\varphi_1(x,t) = 0, \quad \varphi_2(x,t) = \sum_{q=2}^{4} C_{q2}(t)\, h_q(x),$$

$$\varphi_4(x,t) = C_{34}(t)\, h_3(x), \quad x_2 \le x \le x_4, \quad \varphi_5(x,t) = 0,$$

$$\psi_1(y,t) = 0, \quad \psi_3(y,t) = \sum_{r=2}^{4} C_{r3}(t)\, H_r(y), \quad y_1 \le y < y_5,$$

$$\psi_4(y,t) = C_{4\,3}(t)\, H_2(y), \quad y_1 \le y < y_3,$$

$$\psi_5(y,t) = 0, \quad \varphi_3(x,t) = \begin{cases} 0, & x_1 \le x < x_2 \\ C_{33}(t)\, h_3(x), & x_2 \le x \le x_4, \end{cases}$$

$$\psi_2(y,t) = \begin{cases} C_{22}(t)\, H_2(y), & y_1 \le y < y_3 \\ 0, & y_3 \le y \le y_5. \end{cases}$$

Таким чином, наближений розв'язок в явній формі можна записати у вигляді:

$$u_M(x,y,t) = \sum_{k=2}^{4} \psi_k\,(y,t)\, h_k(x) + \sum_{\ell=2}^{4} \varphi_\ell\,(x,t)\, H_\ell\,(y) - \sum_{k=1}^{M_1}\sum_{\ell=1}^{M_2} C_{k\,\ell}(t)\, h_k(x)\, H_\ell(y).$$

При проведенні обчислювального експерименту вважаємо, що $f(x,y,t) = 0$ у точках, які не належать області інтегрування.

При чисельній реалізації інтерлінаційного методу для нестаціонарної задачі теплопровідності, що досліджується в даній роботі, важливу роль відіграє нумерація вузлів. Автори пропонують проводити нумерацію вузлів так, як це було запропоновано в працях [4, 9].

Знайдений наближений розв'язок порівнювався з точним розв'язком $w(x,y)$ та наближеним, знайденим класичним методом скінченних елементів у вигляді:

$$\tilde{u}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{M_1}\sum_{s=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{M_2}\sum_{p=0}^{1} C_{k\,s\,\ell\,p}(t)\, \tilde{h}_{k\,s}(x)\, \tilde{H}_{\ell\,p}(y).$$

Для практичної реалізації зручно базисні функції $h_{ij}(x)$ визначати на кожному з підінтервалів окремо з умов, щоб $h_{k\,s}^{s'}(x_{k'}) = \delta_{k,k'}\delta_{s,s'}, 0 \le s, s' \le 1, k, k' = \overline{1, M}$.

Явні вирази для цих функцій на кожному з підінтервалів $[x_m, x_{m+1}], M = \overline{1, M_1 - 1}$:

$$h_{m\,0}(x) = (x - x_{m+1})^2 \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} - \frac{2(x - x_m)}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\},$$

$$h'_{m\,0}(x) = 2(x - x_{m+1}) \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} - \frac{2(x - x_m)}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\} + \\ + (x - x_{m+1})^2 \left\{ -\frac{2}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\},$$

$$h_{m0}(x_m) = 1, h_{m0}(x_{m+1}) = 0, h'_{m0}(x_m) = 0, h'_{m0}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m\,1}(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1})^2 \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} \right\},$$

$$h'_{m\,1}(x) = \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} \Big((x - x_{m+1})^2 + 2(x - x_m)(x - x_{m+1}) \Big),$$

$$h_{m1}(x_m) = 0, h_{m1}(x_{m+1}) = 0, h'_{m1}(x_m) = 1, h'_{m1}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m+1,0}(x) = (x - x_m)^2 \left\{ \frac{1}{(x_{m+1} - x_m)^2} - \frac{2(x - x_{m+1})}{(x_{m+1} - x_m)^3} \right\},$$

$$h'_{m+1,0}(x) = -\frac{6}{(x_{m+1} - x_m)^3}(x - x_m)(x - x_{m+1}),$$

$$h_{m+1,0}(x_m) = 0, h_{m+1,0}(x_{m+1}) = 1, h'_{m+1,0}(x_m) = 0, h'_{m+1,0}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m+1,1}(x) = (x - x_{m+1})^2 \frac{(x - x_m)^2}{(x_{m+1} - x_m)^2},$$

$$h_{m+1,1}(x_m) = 0, h_{m+1,1}(x_{m+1}) = 0, h'_{m+1,1}(x_m) = 0, h'_{m+1,1}(x_{m+1}) = 1.$$

На рис. 3 зображено точний розв'язок задачі, побудований за допомогою R-функцій, та наближений розв'язок задачі при $t = 0,01$.

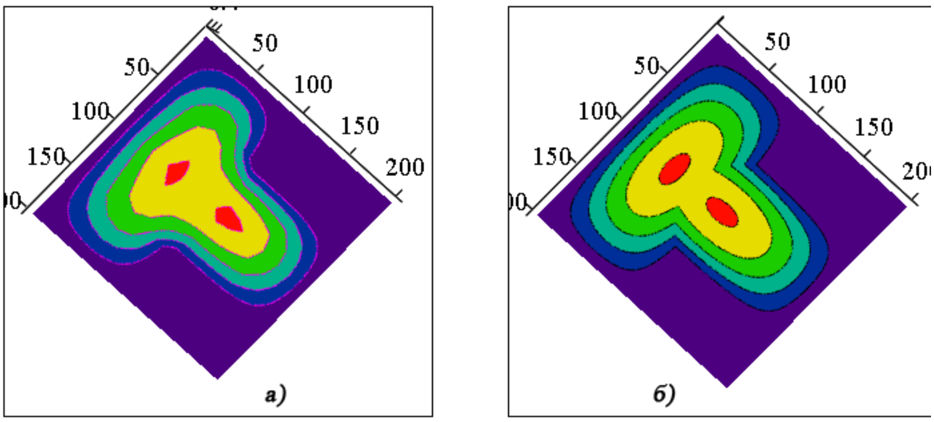

Рис. 3. Точний та наближений розв'язки задачі при $t = 0,01$: а) точний розв'язок, побудований за допомогою R-функцій; б) наближений розв'язок

Зауважимо, що максимальна похибка між розв'язками, наведеними на рис. 3, не перевищує 0,04.

На рис. 4 зображено графіки точного і наближеного (знайденого інтерлінаційним методом) розв'язків (при M = 5) на лініях $y = y_2 = 0,25, x_1 \le x \le x_5$ (рис. 4а), $y = y_3 = 0,5, x_1 \le x \le x_5$ (рис. 4б), $y = y_4 = 0,75, x_1 \le x \le x_5$ (рис. 4в) при $t = 0,01$.

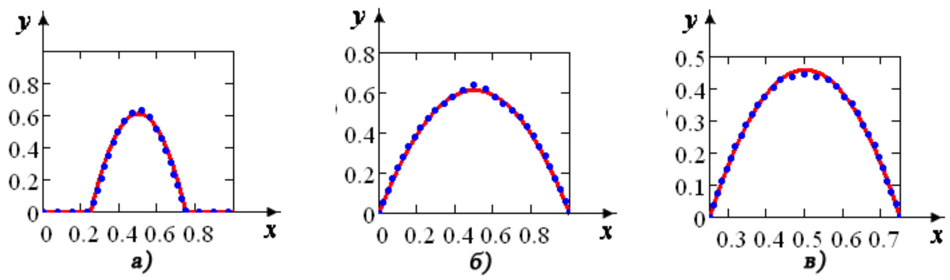

Рис. 4. Графіки точного і наближеного розв'язків задачі при $t = 0,01$ *на лініях: а)* $y = y_2 = 0,25, x_1 \le x \le x_5$*, б)* $y = y_3 = 0,5, x_1 \le x \le x_5$*, в)* $y = y_4 = 0,75, x_1 \le x \le x_5$

Зауважимо, що максимальна похибка між точним та наближеним розв'язками по всій області не перевищує $\varepsilon = O\left(h^2\right)$ (при умові, що розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь проводиться з такою ж похибкою), що збігається з теоретичними твердженнями стосовно похибки наближення диференційовних функцій операторами сплайн-інтерлінації [1].

6. Висновки за результатами обчислювального експерименту. Аналіз результатів обчислювального експерименту показує, що досліджуваний в роботі інтерлінаційний метод скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач дозволяє значно зменшити порядок системи диференціальних рівнянь, до яких зводиться початково-крайова задача, при досягненні такої ж самої точності. Це означає також, що для його обчислювальної реалізації потрібно використовувати меншу кількість часу, і при цьому можна отримувати меншу загальну похибку заокруглення.

1. *Сергієнко І.В., Литвин О.М.* Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестаціонарної теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1990. – № 10. – С. 69–73.
2. *Дробот Є.І., Литвин О.М., Сергієнко І.В.* Метод розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАНУ. – 2000. – № 2. – С. 67–73.
3. *О.М. Литвин.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. Посіб. – К.: Наук. думка. – 2005. – 303 с.
4. *Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В.* Розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінченних елементів. Праці Міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXV)». – К.: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – 2009. – С. 14–19.
5. *Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В.* Чисельна реалізація методу ЛІДР розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними. XLIII науково-практична конференція. – Харків, УІПА. – 2009. – С. 47.
6. *Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В.* Математичне моделювання поширення тепла за допомогою інтерлінації. Матеріали XV Всеукраїнської конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львівський національний ун-т ім. Франка. – 2008. – С. 77.
7. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка. – 1982. – 552 с.
8. *Максименко–Шейко К.В.* R-функції в математичному моделюванні геометричних об'єктів і фізичних полів. Монографія. – Харків, ІПМаш НАН України. – 2009. – 306 с.

9. *Камишан В.В., Литвин О.М., Максимович О.Р.* Про чисельну реалізацію інтерлінаційного методу скінченних елементів (IMCE) для рівняння Пуассона в областях, складених з прямокутників // Доп. АН України. Сер. А. – 1995. – № 11. – С. 34–38.

O. M. Lytvyn, L. S. Lobanova, G. V. Zalyzhna

Approach of discontinuous function by an discontinuous spline when spline knots do not coincide with function ruptures.

Are constructed and investigated discontinuous approximational splines for approach of discontinuous functions. The algorithm of search of ruptures of function of one variable by means of its approach by constructed approximational spline is developed. Also the algorithm of optimum definition of knots of an approaching discontinuous spline is developed. Examples are resulted.

Keywords: *unsteady heat conduction problem, finite element method.*

О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная

Численная реализация интерлинационного метода конечных элементов решения начально-краевых задач.

В работе исследуются некоторые аспекты численной реализации интерлинационного метода конечных элементов. Для тестирования метода используется предложенный ранее авторами метод построения точных решений.

Ключевые слова: *нестационарная задача теплопроводности, метод конечных элементов.*

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
`zal_artem@mail.ru`

Получено 20.05.13