УДК 517.55

©2013. **Ю. С. Коломойцев**

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ В ТЕРМИНАХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Получены достаточные условия представления функций в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье в терминах совместного поведения «норм», функций в весовых пространствах Бесова.

Ключевые слова: *интеграл Фурье, весовые пространства L_p, весовые пространства Бесова.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1,\dots,x_n)$ со скалярным произведением $(x,\xi) = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ и нормой $|x| = (x,x)^{\frac12}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac1p} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс непрерывных функций f таких, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Если

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{i(x,\xi)}dx, \qquad g \in L_1(\mathbb{R}^n),$$

то пишут $f \in A(\mathbb{R}^n)$. Задача о представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье имеет важное значение в разных вопросах анализа. Данная задача изучалась многими математиками (см., напр., обзор [1] и монографию [2, гл. 6], в которых содержится ряд достаточных и необходимых условий принадлежности функции f пространству $A(\mathbb{R}^n)$).

В недавних работах [3–5] (см. также обзор [1, раздел 10]) были получены новые достаточные условия представления функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье в $\mathbb{R}^n$ в терминах совместного поведения функции и ее производных. Приведем здесь основной результат статьи [4].

Теорема A. *Пусть $0 < q \le \infty$, $1 < r < \infty$, $s > n/r$ и функция $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $q = r = 2$ или*

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right)\frac1q + \left(\frac{n}{2s}\right)\frac1r > \frac12. \tag{1}$$

Если, дополнительно, $f \in L_q$, а $(-\Delta)^{s/2}f \in L_r$, то $f \in A(\mathbb{R}^n)$.

Точность условия (1) можно проверить, используя известную функцию мультипликатор

$$m_{\alpha,\,\beta}(x) = \rho(x)\frac{e^{i|x|^{\alpha}}}{|x|^{\beta}},$$

где ρ является C^{∞}-функцией на $\mathbb{R}^n$, равной 0 при $|x| \le 1$ и 1 при $|x| \ge 2$, а $\alpha, \beta > 0$. Отметим, что функция $m_{\alpha,\,\beta}$ была предметом специального изучения в работах [6], [7] и [8, гл. 4, 7.4].

Используя теорему А при $s \in \mathbb{N}$ и $\beta > ([n/2]+1)(\alpha-1)$ можно доказать следующий хорошо известный факт: если $\beta > \frac{n\alpha}{2}$, то $m_{\alpha,\beta} \in A(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что ограничение $\beta > ([n/2]+1)(\alpha-1)$ появляется в следствии того, что производные функции $m_{\alpha,\beta}$ могут быть неограниченными. Для исследования функций с такими свойствами оказываются полезными весовые пространства $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, в которых вес w выбирают так, чтобы рост производных гасился за счет убывания весовой функции.

Цель настоящей работы – получить аналоги теоремы А в случае весовых пространств.

2. Определения и обозначения. Пусть $w : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ – некоторая измеримая весовая функция. Пространство $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{L_p(w)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n,w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(w)} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n,w)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x) < \infty.$$

Через $C(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех ограниченных равномерно-непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. При $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ положим

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \{f \,:\, D^{\nu}f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ для всех } |\nu|_1 \le k\}.$$

При этом

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\nu|_1\le k} \|D^{\nu}f\|_{\infty}.$$

Здесь и далее ν – n-мерный вектор с неотрицательными целыми координатами, $|\nu|_1 = \nu_1 + \dots + \nu_n$, а

$$D^{\nu}f = \frac{\partial^{|\nu|_1}f}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_n^{\nu_n}} \quad (D^0 f = f).$$

Мы будем использовать стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим стандартным образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F} f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi,x)} dx,$$

положим также $\mathscr{F}^{-1} f(\xi) = \mathscr{F} f(-\xi)$. Далее, операторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}^{-1}$ будем понимать в обобщенном смысле.

Формулировки основных теорем настоящей работы даны в терминах функций из весовых пространств Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, w)$. Чтобы дать определение этих пространств, введем в рассмотрение функцию $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \le |\xi| \le 2\}$, $\varphi(\xi) > 0$ при $1/2 < |\xi| < 2$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0.$$

Введем также функции φ_k и ψ соотношениями

$$\mathscr{F}\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$$

и

$$\mathscr{F}\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi).$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \le \infty$. Будем говорить, что $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит (неоднородному) весовому пространству Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, w) = B^s_{p,q}(w)$, если

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(w)} = \|\psi * f\|_{L_p(w)} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|^q_{L_p(w)} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(с обычной модификацией при $q = \infty$, т.е. $\|f\|_{B^s_{p,\infty}(w)} = \|\psi * f\|_{L_p(w)} + \sup_{k \ge 1} 2^{sk} \|\varphi_k * f\|_{L_p(w)}$).

Если $w(x) \equiv 1$, то $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, w) = B^s_{p,q}$ – обычные пространства Бесова.

Для того, чтобы привести определение однородных пространств Бесова, напомним, что

$$\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,:\, (D^\nu \widehat{\varphi})(0) = 0 \ \text{для всех} \ \nu \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}\},$$

а $\dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что $f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит однородному пространству Бесова $\dot{B}^s_{p,q}$, если

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|^q_p \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(с обычной модификацией при $q = \infty$).

Мы будем рассматривать также весовые пространства бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n, w) = H_p^s(w)$. Пусть $1 < p < \infty$ и $s \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $H_p^s(w)$, если

$$\|f\|_{H_p^s(w)} = \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_p(w)} < \infty,$$

где I – единичный оператор, а Δ – оператор Лапласа.

Напомним хорошо известную связь между пространствами H_p^s и обычными пространствами Соболева W_p^k (см., напр., [9, с. 116]). Пусть $1 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$H_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,:\, \|f\|^*_{W_p^k} < \infty\},$$

где

$$\|f\|^*_{W_p^k} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_j^k} \right\|_p$$

– эквивалентная норма в H_p^k и W_p^k. Здесь и далее $W_p^0 = L_p$.

Далее мы будем рассматривать так называемые допустимые веса. Однако основные результаты настоящей работы будут справедливыми и для более общих весовых функций.

Будем говорить, что измеримая функция $w : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ является *допустимым весом* (будем писать $w \in W^n$), если:

1) $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) для каждого мультииндекса γ найдется положительная константа c_γ такая, что

$$|D^\gamma w(x)| \le c_\gamma w(x) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

3) найдутся константы $c > 0$ и $\alpha \ge 0$ такие, что

$$0 < w(x) \le c w(y)(1 + |x - y|^2)^{\alpha/2} \quad \text{для любого} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что если $w \in W^n$ и $w' \in W^n$, то $w^{-1} \in W^n$ и $ww' \in W$.

Типичным примером допустимого веса является функция

$$w_\alpha(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha/2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Далее всюду буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров, а буквой A – некоторые конечные константы. Полагаем также $\frac{\infty}{\infty} = 1$ и $\frac{0}{0} = 0$.

3. Формулировка основных результатов. Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. *Пусть $0 < q \le 2 < r \le \infty$, $0 \le \sigma < n/2 < s$, и функция $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Пусть w_0, w_1 – измеримые на $\mathbb{R}^n$ функции такие, что*

$$w_0(x) \ge 1, \quad w_0(x) w_1(x) \ge 1 \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Если
$$\frac{1-\theta}{q}+\frac{\theta}{r}>\frac{1}{2}, \quad \theta=\frac{n/2-\sigma}{s-\sigma}$$
и
$$f\in B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{\frac{1}{1-\gamma}})\cap B^{s}_{r,\infty}(w_1^{\frac{1}{\gamma}}), \quad \gamma=\frac{2-q}{r-q},$$
то $f\in A(\mathbb{R}^n)$.

4. Вспомогательные утверждения. Приведем сначала некоторые хорошо известные факты о пространствах Бесова.

В случае допустимого веса важное значение имеет следующая лемма, связывающая невесовые и весовые пространства Бесова (см. [10, с. 156]).

Лемма 1. *Пусть* $0<p,q\le\infty$, $s\in\mathbb{R}$ *и* $w\in W^n$. *Тогда оператор* $f\mapsto w^{1/p^*}f$ *(*$p^*=p$, *если* $p<\infty$ *и* $p^*=1$, *если* $p=\infty$*) является изоморфизмом* $B^s_{p,q}(w^{1/p})$ *на* $B^s_{p,q}$. *В частности,* $\|fw^{1/p^*}\|_{B^s_{p,q}}$ *эквивалентная квазинорма на* $B^s_{p,q}(w)$.

Аналогичная лемма верна для пространств $H^s_p(\mathbb{R}^n,w)$, $w\in W^n$.

Мы будем использовать следующие хорошо известные вложения.

Лемма 2. (i) *Пусть* $0<p\le\infty$, $0<q_0\le q_1\le\infty$ *и* $s\in\mathbb{R}$. *Тогда*
$$B^s_{p,\,q_0}\subset B^s_{p,\,q_1};$$
(ii) *Пусть* $0<p_0\le p_1\le\infty$, $0<q\le\infty$, $s_0,s_1\in\mathbb{R}$, $s_1\le s_0$ *и* $s_0-n/p_0=s_1-n/p_1$. *Тогда*
$$B^{s_0}_{p_0,\,q}\subset B^{s_1}_{p_1,\,q}.$$
Здесь и далее символ $\subset$ обозначает непрерывное вложение.

Напомним связь между пространствами $B^k_{p,q}$, W^k_p и C^k, а также между их однородными аналогами.

Лемма 3. *Пусть* $s>0$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *и* $1\le p<\infty$. *Тогда*
$$B^s_{p,1}\subset H^s_p\subset B^s_{p,\infty},$$
а если $1\le p<\infty$, *то*
$$B^k_{p,1}\subset W^k_p\subset B^k_{p,\infty}$$
и
$$B^k_{\infty,1}\subset C^k\subset B^k_{\infty,\infty}.$$

Доказательство леммы 2 и 3 см., напр., в [9, гл. 2 и гл. 5] и [11, гл. 3 и гл. 11].

Из леммы 1 сразу следует, что указанные выше вложения выполняются и для весовых пространств Бесова $B^s_{p,q}(w)$, если, конечно, $w\in W^n$.

Приведенная ниже лемма является простым следствием из неравенства Гельдера.

Лемма 4. *Пусть* $0 < q < 2 < r \le \infty$, $\gamma = \frac{2-q}{r-q}$ *и* w_0, w_1 *– измеримые на* $\mathbb{R}^n$ *функции такие, что*

$$w_0(x) > 0, \quad w_0(x)w_1(x) \ge 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\|f\|_2 \le \|f\|^{q(1-\gamma)/2}_{L_q(w_0^{1/(1-\gamma)})} \|f\|^{r\gamma/2}_{L_r(w_1^{1/\gamma})}.$$

5. Доказательство теоремы 1. Хорошо известно (см., напр., [11, с. 119]), что если $f \in C_0 \cap \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}$, то $f \in A(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_A \le C\|f\|_{\dot{B}^{n/2}_{2,1}}, \tag{2}$$

где C – константа, не зависящая от f.

Таким образом, для того, чтобы доказать принадлежность функции f классу $A(\mathbb{R}^n)$, достаточно проверить, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}k}\|\varphi_k * f\|_2 = \sum_{k=0}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{-1} = S_1 + S_2 < \infty.$$

Рассмотрим сначала ряд S_2. Сходимость данного ряда очевидна, поскольку при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\sigma_1 = \sigma - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$

$$\|\varphi_{-k} * f\|_2 \le \|\psi * f\|_2 \le \|f\|_{B^{\sigma_1}_{2,\infty}}.$$

Откуда, используя вложение $B^{\sigma}_{q,\infty} \subset B^{\sigma_1}_{2,\infty}$ (см. лемму 2), получаем, что

$$S_2 \le C\|f\|_{B^{\sigma}_{q,\infty}} \le C\|f\|_{B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{1/(1-\gamma)})}. \tag{3}$$

Оценим сумму S_1. Обозначим $\lambda = \frac{r(2-q)}{2(r-q)}$. Применяя лемму 4, находим

$$\begin{aligned} S_1 &\le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}k}\|\varphi_k * f\|^{1-l}_{L_q(w_0^{1/(1-\gamma)})}\|\varphi_k * f\|^{l}_{L_r(w_1^{1/\gamma})} \le \\ &\le \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{\sigma j}\|\varphi_j * f\|_{L_q(w_0^{1/(1-\gamma)})}\right)^{1-\lambda} \times \\ &\quad \times \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{sj}\|\varphi_j * f\|_{L_r(w_1^{1/\gamma})}\right)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{2}-(1-\lambda)\sigma-\lambda s)k} = \\ &= \|f\|^{1-\lambda}_{B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{1/(1-\gamma)})}\|f\|^{\lambda}_{B^{s}_{r,\infty}(w_1^{1/\gamma})} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{qr(s-\sigma)}{r-q}(\frac{1}{2}-(1-\theta)\frac{1}{q}-\theta\frac{1}{r})k} \le \\ &\le C\|f\|^{1-\lambda}_{B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{1/(1-\gamma)})}\|f\|^{\lambda}_{B^{s}_{r,\infty}(w_1^{1/\gamma})}. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, из (2), объединяя (3) и (4), имеем

$$\|f\|_A \le C\{\|f\|_{B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{1/(1-\gamma)})} + \|f\|^{1-\lambda}_{B^{\sigma}_{q,\infty}(w_0^{1/(1-\gamma)})}\|f\|^{\lambda}_{B^{s}_{r,\infty}(w_1^{1/\gamma})}\}.$$

Теорема 1 доказана.

6. Некоторые следствия. Из теоремы 1, лемм 2 и 3 получаем:

Следствие 1. *Пусть* $1 \le q \le 2 < r < \infty$, $s > n/2$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *и функции* $w_0, w_1 \in W^n$ *таковы, что*

$$w_0(x) \ge 1, \quad w_0(x)w_1(x) \ge 1, \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Если

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right)\frac{1}{q} + \left(\frac{n}{2s}\right)\frac{1}{r} > \frac{1}{2}$$

и

$$f \in L_q(w_0^{\frac{1}{1-\gamma}}) \cap H_r^s(w_1^{\frac{1}{\gamma}}), \quad \gamma = \frac{2-q}{r-q},$$

то $f \in A(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что следствие 1 выполняется для более широкого класса весов. В частности, для класса W_e^n (см. [12]), который отличается от W^n тем, что вместо условия 3) в определении класса W^n достаточно потребовать более слабое условие вида:

$$0 < w(x) \le Cw(x-y)e^{d|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

где $C > 0$ и $d > 0$ – некоторые фиксированные константы.

Заметим, что классу W_e^n принадлежат, например, функции вида:

$$w(x) = e^{\pm |x|^{\beta}}, \quad 0 < \beta \le 1.$$

В более простом случае имеем следующее утверждение:

Следствие 2. *Пусть* $1 \le q \le 2 < r < \infty$, $\varepsilon > 0$ *и функция* $f \in C_0(\mathbb{R})$. *Если*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

$f \in L_q\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{\frac{\varepsilon(r-q)}{2(r-2)}}\right)$ *и* $f' \in L_r\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-\frac{\varepsilon(r-q)}{2(2-q)}}\right)$, *то* $f \in A(\mathbb{R})$.

Следствие 2 является точным.

Предложение 1. *Пусть* $1 \le q \le 2 < r < \infty$. *Если*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $f \in C_0(\mathbb{R})$ *такая, что*

$$f \in L_q\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{\frac{\varepsilon(r-q)}{2(r-2)}}\right) \quad \textit{и} \quad f' \in L_r\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-\frac{\varepsilon(r-q)}{2(2-q)}}\right),$$

но $f \notin A(\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $m_{\alpha,\beta}$.

Пусть

$$\beta - \frac{\varepsilon(r-q)}{q(r-2)} > \frac{1}{q} \quad \text{и} \quad \beta - \alpha + 1 + \frac{\varepsilon(r-q)}{r(2-q)} > \frac{1}{r}.$$

Тогда $m_{\alpha,\beta} \in L_q\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{\frac{\varepsilon(r-q)}{2(r-2)}}\right)$, $m'_{\alpha,\beta} \in L_r\left(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-\frac{\varepsilon(r-q)}{2(2-q)}}\right)$ и

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right)\left(1 + \frac{2\varepsilon(r-q)}{(2-q)(r-2)}\right) < 2\beta - \alpha. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что α и β можно выбрать так, что $2\beta - \alpha < 0$ и $\alpha \neq 1$, но тогда $m_{\alpha,\beta} \notin A(\mathbb{R})$. □

Следствие 3. *Если* $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{2}$, *то* $m_{\alpha,\beta} \in A(\mathbb{R})$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только случай $\beta > 1$. Прежде всего заметим, что мы всегда можем подобрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\beta > 1 + \varepsilon \quad \text{и} \quad \beta - \alpha + 1 > -\varepsilon.$$

Тогда мы можем выбрать q, достаточно близкое к 1, и достаточно большое r, что

$$\beta - \frac{\varepsilon(r-q)}{q(r-2)} > \frac{1}{q} \quad \text{и} \quad \beta - \alpha + 1 + \frac{\varepsilon(r-q)}{r(2-q)} > \frac{1}{r},$$

а поскольку $2\beta - \alpha > 0$ и

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right)\left(1 + \frac{2\varepsilon(r-q)}{(2-q)(r-2)}\right) < 2\beta - \alpha,$$

то q и r можно выбрать так, что

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Последнее означает, что $m_{\alpha,\beta} \in A(\mathbb{R})$. □

1. *Liflyand E., Samko S. and Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Anal. Math. Phys. – 2012. – **2**, №1. – P. 1–68.
2. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer-Springer, 2004.
3. *Liflyand E.* On absolute convergence of Fourier integrals // Real Anal. Exchange. – 2010. – **36**, №2. – P. 353–360.
4. *Коломойцев Ю.С.* О классе функций представимых в виде интеграла Фурье // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 125–132.
5. *Kolomoitsev Yu., Liflyand, E.* Absolute convergence of multiple Fourier integrals // Studia Math. - 2013. - Vol. 214, №1. - P. 17–35.
6. *Wainger S.* Special trigonometric series in k-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – **59**. – 1965.

7. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. – 1981. – **28**. – P. 267–315.
8. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973.
9. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986.
10. *Edmunds D.E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators // Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
11. *Peetre J.* New Thoughts on Besov Spaces. – Durham, NC: Duke University Press, 1976.
12. *Schott Th.* Function spaces with exponential weights II. Math. Nachr. – 1998. – **196**. – P. 231–250.

Yu. S. Kolomoitsev

Sufficient conditions for the absolute convergence of Fourier integral in terms of weighted spaces.

Sufficient conditions for the representation of functions as an absolutely convergent Fourier integral in terms of simultaneous behavior of «norms», of functions in weighted Besov spaces are obtained.

Keywords: *Fourier integral, weighted spaces L_p, weighted Besov spaces.*

Ю. С. Коломойцев

Достатні умови абсолютної збіжності інтеграла Фур'є в термінах вагових просторів.

Отримано достатні умови зображення функцій у вигляді інтеграла Фур'є, що абсолютно збігається, в термінах спільної поведінки «норм», функцій у вагових просторах Бєсова.

Ключові слова: *інтеграл Фур'є, вагові простори L_p, вагові простори Бєсова.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomus1@mail.ru

Получено 21.11.13