УДК 517.5

©2013. **Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов**

О МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ В КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе устанавливаются критерии существования многозначных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами первого рода в областях, ограниченных конечным числом взаимно непересекающихся жордановых кривых, с ограниченными граничными функциями, допускающими не более счетного числа точек разрыва. В частности, установлено существование многозначных решений для произвольных граничных функций ограниченной вариации.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, задача Дирихле, многозначные решения, конечносвязные жордановы области, функции ограниченной вариации.*

1. Введение. Данная статья является естественным продолжением наших статей [15]–[18], где можно найти историю вопроса и решение задачи Дирихле для случая непрерывных граничных функций, см. также [5], [11] и [12].

Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \,, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

– *дилатационным отношением* уравнения (1). Уравнение (1) называется *вырожденным*, если дилатация K_μ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Краевые задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv 0$, и работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши–Римана для действительной и мнимой части аналитических функций $f = u + iv$, а также работе Пуанкаре (1910) по приливам. Задача Дирихле хорошо изучена для равномерно эллиптических систем уравнений, см., например, [1] и [7].

Недавние результаты о существовании сильных кольцевых решений для вырожденных уравнений Бельтрами в [22], [24] и [25], а также развитие теории граничного поведения кольцевых гомеоморфизмов, см., например, [11], [17] и [19], позволяют получить дальнейшие продвижения.

Напомним, что любая аналитическая функция f в области D удовлетворяет простейшему уравнению Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = 0\,,$$

когда $\mu(z) \equiv 0$. Если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца, см., например, § 8, глава III, часть 3 в [10], стр. 346,

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

и, таким образом, аналитическая функция f в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется с точностью до чисто мнимого числа ic, $c = \mathrm{Im}\, f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ на границе единичного круга.

Классическая *задача Дирихле* для уравнений Бельтрами (1) в ограниченной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состояла в нахождении непрерывной функции $f : D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п.в. и удовлетворяющей уравнению (1) п.в., а также граничному условию

$$\lim_{z \to \zeta} \mathrm{Re}\, f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{2}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$. Однако, в случае наличия точек разрыва у функции φ, естественно требовать, чтобы условие выполнялось только в точках непрерывности φ. Очевидно, что, если f – решение задачи Дирихле, то и функция $F(z) = f(z) + ic$ для любой постоянной $c \in \mathbb{R}$ также является ее решением.

При $\varphi\,(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (2) и п.в. (1). Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}\,(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$. В случае $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, под *регулярным решением* задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) понимается любая постоянная функция $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Как впервые заметил Боярский, см., например, § 6 главы 4 в [7], в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в $\mathbb{C}$ функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области D. Точнее, при $\varphi\,(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, *псевдорегулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ вне полюсов с якобианом

$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее уравнению (1) п.в. и граничному условию (2).

В многосвязных областях D в $\mathbb{C}$ помимо псевдорегулярных решений задача Дирихле (2) для уравнений Бельтрами (1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что непрерывное, дискретное и открытое (или постоянное) отображение $f : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$, является *локальным регулярным решением* уравнения (1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f \neq 0$ и f удовлетворяет (2) п.в. Два локальных регулярных решения $f_0 : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_* : B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (1) будем называть *продолжением друг друга*, если существует конечная цепь таких решений $f_i : B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, m-1$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j : B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения* (1) в D, если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (1) будем называть *многозначным решением задачи Дирихле* (2), если $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в D, которая удовлетворяет условию (2).

Здесь мы приводим соответствующие теоремы о существовании многозначных решений задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) в произвольных конечносвязных жордановых областях, когда граничная функция ограничена и допускает не более счетного числа точек разрыва. Необходимо заметить, что существование таких решений соответствующей задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами с двумя характеристиками

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z + \nu(z) \overline{f_z}$$

остаётся открытой, хотя соответствующие теоремы существования регулярных гомеоморфных решений (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ были установлены в ряде недавних статей [2]–[4]. Это – важная проблема, поскольку уравнения Бельтрами второго рода

$$f_{\bar{z}} = \nu(z) \overline{f_z}$$

играют важную роль во многих задачах математической физики, см., например, [14]. Однако, решение этой проблемы потребует существенной модификации нашего подхода, сравни [5] и [6].

2. Определения и предварительные замечания. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ, пишут $\varrho \in \mathrm{adm}\, \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \varrho(z)\, |dz| \geqslant 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma\,.$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \mathrm{adm}\, \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \varrho^2(z)\, dm(z)\,,$$

где $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$.

Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, и пусть $Q : D \to [0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a,b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$, и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [8], и тесно связано с изучением вырожденных уравнений Бельтрами (1) на плоскости. Следуя работе [21], см. также монографию [20], говорим, что гомеоморфизм f из области D в $\mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для любой измеримой (по Лебегу) функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{4}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в D, если условие (3) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

В работе [22] впервые рассматривались кольцевые Q-гомеоморфизмы в граничных точках областей D, см. также работы [19], [24], [25] и монографию [11]. Гомеоморфизм f из области D в $\mathbb{C}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в граничной точке* $z_0 \in \partial D$, если

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{5}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов C_1 и C_2 в D, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца A в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим z_0 и ∞, соответственно, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (4). Говорим, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в $\overline{D}$, если условие (5) выполнено для всех точек $z_0 \in \overline{D}$.

Напомним также следующие топологические понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *локально связной в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0, существует окрестность $V \subseteq U$ точки z_0 такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область D в $\mathbb{C}$ является локально связной в любой точке ∂D, см., например, [27], стр. 66.

Говорим, что ∂D – *слабо плоская в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $P > 0$, найдется окрестность $V \subset U$ точки z_0, такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Границу ∂D будем называть *слабо плоской*, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Замечание 1. Известно, что многие регулярные области, такие как выпуклые, гладкие, липшицевы, равномерные, области квазиэкстремальной длины по Герингу–Мартио, имеют слабо плоские границы, см., например, [20].

Напомним также, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\rm loc}(D)$, называется функцией *ограниченного среднего колебания* по Джону-Ниренбергу, сокр. $\psi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\psi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\psi(z) - \psi_B|\, dm(z) < \infty\,,$$

где точная верхняя грань берётся по всем кругам $B \subset D$, а ψ_B – среднее значение функции ψ в круге B. Пишем $\psi \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{BMO}(G)$, где G – область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Следуя работе [13], говорим, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$, пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \; -\!\!\!\!\!\!\int_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \widetilde{\psi}_\varepsilon|\, dm(z) < \infty\,, \tag{6}$$

где $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ – среднее значение ψ в круге $B(z_0, \varepsilon)$. Пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (6) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если ψ задана в некоторой области G в $\mathbb{C}$, содержащей $\overline{D}$, и $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$ для всех $z_0 \in \overline{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\rm loc}(D)$ для всех $p \in [1, \infty)$. Однако, $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\rm loc}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\rm loc}(D)$, см., например, [20], с. 211. Таким образом, класс FMO существенно шире класса $\mathrm{BMO}_{\rm loc}$.

Как очевидно из неравенства треугольника, если для некоторого набора чисел $\psi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, выполнено условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \; -\!\!\!\!\!\!\int_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \psi_\varepsilon|\, dm(z) < \infty,$$

то ψ имеет конечное среднее колебание в точке z_0.

В частности, если для точки $z_0 \in D$ выполнено условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \; -\!\!\!\!\!\!\int_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z)|\, dm(z) < \infty,$$

то ψ имеет конечное среднее колебание в точке z_0.

Напомним, что точка $z_0 \in D$ называется *точкой Лебега* функции $\psi : D \to \mathbb{R}$, если ψ интегрируема в окрестности z_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \psi(z_0)|\, dm(z) = 0.$$

Известно, что для функции $\psi \in L^1_{\rm loc}(D)$ почти все точки D являются ее точками Лебега. Таким образом, функции $\psi \in L^1_{\rm loc}(D)$ имеют конечное среднее колебание в почти всех точках области D, т.е. условие FMO является весьма естественным.

Замечание 2. Если неотрицательная функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $z_0 \in D$, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ выполнено условие

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} \frac{\psi(z)\, dm(z)}{\left(|z-z_0| \log \frac{1}{|z-z_0|}\right)^2} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,,$$

см. следствие 2.3 в [13].

3. О критериях существования многозначных решений.

Лемма 1. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\, dm(z) = o\left(I^2_{z_0}(\varepsilon)\right) \quad \text{\it при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall\ z_0 \in \overline{D} \tag{7}$$

для некоторого $\varepsilon_0 < \sup\limits_{z\in D} |z-z_0|$, где $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ – двупараметрическое семейство измеримых на $(0,\infty)$ функций с условием

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,.$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ с не более чем счетным числом точек разрыва.

Здесь и далее подразумевается, что K_μ продолжено нулем вне области D.

Доказательство. Пусть F – регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и которое существует по лемме 4.1 из [24] в силу условия (7). Рассмотрим $D^* = F(D)$. Заметим, что ∂D^* имеет n компонент связности Γ_i, $i = 1, \ldots, n$, которые находятся в естественном взаимнооднозначном соответствии с компонентами связности ∂D, жордановыми кривыми γ_i, $i = 1, \ldots, n$, см., например, лемму 5.3 в [13] или лемму 6.5 в [20].

Область D^* допускает конформное отображение R на круговую область $\mathbb{D}^*$, граница которой состоит из n окружностей с возможным вырождением в точку, см., например, теорему V.6.2 в [9]. Заметим, что $\mathbb{D}^*$ имеет слабо плоскую границу, а D является локально связной на границе. Отображение $g = R \circ F : D \to \mathbb{D}^*$ также является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$, и по леммам 6.6 и 6.7 в [11] или по лемме 1 и теореме 3 в [19] g допускает гомеоморфное продолжение $g_* : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}^*}$. Таким образом, компоненты границы $\mathbb{D}^*$ не могут вырождаться в точку, так как компоненты границы области D являются жордановыми кривыми.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (2) в виде $f = h \circ g$, где h – аналитическая (вообще говоря, многозначная) функция в $\mathbb{D}^*$ с граничным условием

$$\lim_{w \to \zeta} \operatorname{Re} h(w) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta))$$

для всех точек $\zeta \in \partial\mathbb{D}^*$ за исключением быть может (счетного) множества точек разрыва функции $\varphi(g_*^{-1}(\zeta))$. Известно, что в области $\mathbb{D}^*$ найдется решение задачи Дирихле для гармонических функций u, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{w \to \zeta} u(w) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta))$$

для всех точек $\zeta \in \partial\mathbb{D}^*$, за исключением быть может (счетного) множества точек разрыва функции $\varphi(g_*^{-1}(\zeta))$, см., например, § 3 главы VI в [9].

Пусть $z_0 \in D$, $B_0 = B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, и пусть $w_0 = g(z_0)$. Тогда область $G_0 := g(B_0)$ односвязна, и поэтому найдется гармоническая функция $v(w)$ такая, что $h(w) = u(w) + iv(w)$ – голоморфная функция. Заметим, что $f_0 = h \circ g|_{B_0}$ – локально регулярное решение уравнения Бельтрами (1). Функция h может быть продолжена до, вообще говоря, многозначной аналитической функции H в области $\mathbb{D}^*$ и, таким образом, $H \circ g$ дает искомое многозначное решение задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1).

Теорема 1. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из $n \geqslant 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \quad \text{п.в.} \tag{8}$$

для некоторой функции $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ класса $\mathrm{FMO}(\overline{D})$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ с не более чем счетным числом точек разрыва.

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если условие (8) выполнено для некоторой функции $Q \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

Следствие 2. *Заключение теоремы 1 остается в силе, если в условии (8) все точки $z \in \overline{D}$ являются точками Лебега локально интегрируемой функции $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$.*

Следствие 3. *Заключение теоремы 1 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

Рассуждая аналогично случаю регулярных решений в односвязных областях, получаем из этой леммы также следующие результаты, см., например, [16].

Теорема 2. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что $K_\mu \in L^1(D)$, и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu(z_0, r)\|_1(r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}\,,$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ – нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z\in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ с не более чем счетным числом точек разрыва.

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon \to 0 \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D},$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0, \varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty,$$

где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ с не более чем счетным числом точек разрыва.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_D e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

Замечание 3. Можно показать, что имеет место аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций, состоящий в том, что любое многозначное решение уравнения Бельтрами (1) в односвязной области D является его регулярным однозначным решением.

Замечание 4. В частности, все результаты работы имеют место для граничных функций φ ограниченной вариации.

1. *Боярский Б.В.* Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1957. – Т. 43 (85). – С. 451–503.
2. *Боярский Б.В., Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* General Beltrami equations and BMO // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 3. – С. 305–326.
3. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Var. Elliptic Equ. – 2009. – Vol. 54, No. 10. – P. 935–950.
4. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On integral conditions for the general Beltrami equations // Complex Anal. Oper. Theory. – 2011. – Vol. 5, No. 3. – P. 835–845.
5. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* Dirichlet problem for general degenerate Beltrami equation in Jordan domains // Укр. матем. вiсник. – 2012. – Т. 9, № 4. – С. 460–476.
6. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2013. – http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2013.795955.
7. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.
8. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 103. – P. 353–393.
9. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
10. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968.
11. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – Developments in Mathematics. – Vol. 26. – New York etc.: Springer, 2012.
12. *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – Vol. 55, No. 12. – P. 1099–1116.
13. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395-417.
14. *Крушкаль С.Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984.
15. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* К задаче Дирихле для уравнений Бельтрами // Доповiдi НАНУ. – 2012. – № 6. – С. 30–33.
16. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* О задаче Дирихле для уравнений Бельтрами в конечносвязных областях // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, № 7. – С. 932–944.
17. *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations// Complex Var. Elliptic Equ. – 2013. – Vol. 58, No. 5. – P. 647-–663.
18. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, № 4. – С. 102–125.
19. *Ломако Т.В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 10. – С. 1329–1337.
20. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.
21. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – Vol. 96. – P. 117–150.
22. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – № 1. – P. 127–137.
23. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 524–535.
24. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – Vol. 55, No. 1–3. – P. 219–236.

25. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2012. – Vol. 57, No. 12. – P. 1247–1270.
26. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964.
27. *Wilder R.L.* Topology of Manifolds. – AMS, New York, 1949.

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov

On multi-valued solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations in finitely connected domains.

In the work, it is established criteria of existence of multi-valued solutions for the Dirichlet problem to the degenerate Beltrami equations of the first kind in the domains bounded by a finite collection of mutually disjoint Jordan curves with bounded boundary functions admitting not more than a countable number of points of discontinuity. In particular, it is established the existence of multi-valued solutions for boundary functions of bounded variation.

Keywords: *the Beltrami equation, the Dirichlet problem, multi-valued solutions, finitely connected Jordan domains, functions of bounded variation.*

Д. О. Ковтонюк, І. В. Пєтков, В. І. Рязанов

Про багатозначні розв'язки задачі Діріхле для рівнянь Бельтрамі в скінченнозв'язних областях.

У роботі встановлено критерії існування багатозначних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі першого роду в областях, які обмежені скінченним числом взаємно неперетинних жорданових кривих, з обмеженими межовими функціями, що допускають не більш ніж злічену кількість точок розриву. Зокрема, встановлено існування багатозначних розв'язків для довільних межових функцій обмеженої варіації.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, задача Діріхле, багатозначні розв'язки, скінченнозв'язні жорданові області, функції обмеженої варіації.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 31.10.13
denis_ kovtonyuk@bk.ru
igorpetkov@i.ua
vlryazanov1@rambler.ru
vl.ryazanov1@gmail.com