УДК 517.927

©2013. **Ю. А. Евтушенко**

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе описана новая параметризация семейства периодических краевых задач второго порядка, согласованная с подмногообразием тех краевых задач, у которых собственное значение выделенного номера является двукратным.

Ключевые слова: *периодическая краевая задача, двукратное собственное значение.*

1. Введение. Постановка задачи восходит к статье В.И. Арнольда «Моды и квазимоды» [1]. В ней была сформулирована «гипотеза трансверсальности» о том, что в семействе периодических самосопряженных краевых задач второго порядка подмножество тех задач, у которых выделенное собственное значение имеет кратность два, является гладким банаховым подмногообразием коразмерности два (а не один, как это кажется на первый взгляд). Гипотеза была доказана Я.М. Дымарским (см. [2], п. 1.3). Доказательство осуществляется в два этапа. Сначала описано многообразие всех собственных функций, отвечающих собственным значениям выделенного номера. Затем по многообразию собственных функций восстанавливается многообразие краевых задач. В настоящей работе предлагается новая прямая параметризация, не использующая многообразие собственных функций. В нашей конструкции мы используем (вслед за [3], глава 8, § 3) плоскость значений пары собственных функций, порожденных одной краевой задачей и имеющих одинаковую осцилляцию. В работе описана только биекция между семейством параметров и семейством краевых задач. Топологическим проблемам (гладкая структура семейства и его гомотопические свойства) будет посвящена отдельная работа.

Во втором пункте приведены известные свойства спектра и собственных функций периодических самосопряженных краевых задач. В третьем пункте введены вспомогательные функции, в терминах которых ниже описаны семейства краевых задач. Четвертый пункт посвящен случаю невырожденного спектра, пятый – вырожденного.

2. Семейство периодических краевых задач. Рассмотрим семейство периодических самосопряженных краевых задач

$$-y'' + p(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi) = 0 \tag{2}$$

на собственные значения λ и собственные функции y. Параметром семейства является «потенциал» p, принадлежащий банахову пространству $C^0(2\pi)$ вещественных

Автор признателен Я.М. Дымарскому за постановку проблемы и постоянную поддержку.

непрерывных 2π-периодических функций. Поскольку изменение потенциала на константу не влияет на собственные функции, а лишь сдвигает все собственные значения на ту же константу, целесообразно использовать подпространство

$$P := \left\{ p \in C^0(2\pi) \mid \int_0^{2\pi} p(x)dx = 0 \right\}$$

потенциалов с нулевым следом. В дальнейшем, говоря о семействе краевых задач, мы будем иметь в виду пространство P.

Для фиксированного потенциала $p \in P$ спектр краевой задачи (1), (2) состоит из вещественных собственных значений, которые не более, чем двукратны (см. [4]):

$$\lambda_0(p) < \lambda_1^-(p) \le \lambda_1^+(p) < \ldots < \lambda_n^-(p) \le \lambda_n^+(p) < \ldots$$

Соответствующие собственные функции принадлежат пространству $C^2(2\pi)$ дважды непрерывно-дифференцируемых функций 2π-периодических вплоть до производных второго порядка. Собственные функции, отвечающие собственным значениям с нижним индексом n, имеют на полуинтервале $[0, 2\pi)$ в точности $2n$ невырожденных нулей. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ функций, интегрируемых с квадратом. В случае совпадения собственных значений $\lambda_n^-(p) = \lambda_n^+(p)$ возникает плоскость Π собственных функций. Нули линейно независимых собственных функций, отвечающих общему собственному значению, перемежаются. В плоскости собственных функций можно выбрать (не единственным образом!) две ортонормированные функции. Ниже, если не оговорено, подразумевается, что собственные функции имеют единичную норму в $L_2(0, 2\pi)$.

Зафиксируем произвольный нижний индекс n. Нас интересует подмножество «вырожденных» потенциалов

$$P_n := \left\{ p \in P | \ \lambda_n^-(p) = \lambda_n^+(p) \right\}$$

и его дополнение $P \setminus P_n$, состоящее из потенциалов p, для которых $\lambda_n^-(p) < \lambda_n^+(p)$.

В работе [2] доказано, что P_n является гладким подмногообразием P коразмерности два, причем P_n гомотопически тривиально и тривиально вложено в P. Здесь мы опишем две аналитически согласованные параметризации – отдельно для $P \setminus P_n$ и для P_n. Топологические свойства этих параметризаций предполагается исследовать в отдельной работе.

3. Вспомогательные функции. Пусть $p \in P$ – произвольный фиксированный потенциал, а y_n^- и y_n^+ – ортонормированные собственные функции, отвечающие собственным значениям $\lambda_n^-(p)$ и $\lambda_n^+(p)$, соответственно. Понятно, что выбор собственных функций неоднозначный. При совпадении собственных значений верхние индексы $\mp$ в обозначении собственных функций имеют условный смысл: они только позволяют различать собственные функции.

Введем в рассмотрение функции, порожденные выбранными собственными функциями. Во-первых, определим вронскиан

$$W_n(x) := \begin{vmatrix} y_n^-(x) & y_n^+(x) \\ (y_n^-(x))' & (y_n^+(x))' \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Обозначим через Ω плоскость с координатами (y_n^-, y_n^+). Рассмотрим функцию $\overline{y}_n(x) := (y_n^-(x), y_n^+(x))$, значения которой принадлежат плоскости Ω и образом которой является некоторая замкнутая кривая Υ. Введем на плоскости Ω полярные координаты (ρ, θ). Тогда

$$y_n^-(x) = \rho(x)\cos\theta(x), \quad y_n^+(x) = \rho(x)\sin\theta(x), \tag{4}$$

где

$$\rho^2(x) = (y_n^-(x)^2 + (y_n^+(x))^2, \quad \operatorname{tg}\theta(x) = y_n^+(x)/y_n^-(x), \tag{5}$$

а начальное значение угловой функции θ выбирается с точностью до значения кратного 2π. Наконец, нам понадобится производная $\eta(x) := \theta'(x)$.

Свойства вронскиана описывает

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполнено равенство:*

$$W'(x) = -\Delta\lambda \cdot y_n^-(x) \cdot y_n^+(x), \tag{6}$$

   где $\Delta\lambda := \lambda_n^+(p) - \lambda_n^-(p) \geq 0$.

2. *Вронскиан принадлежит классу гладкости* $W \in C^3(2\pi)$.

3. *Вронскиан нигде не обращается в нуль:* $\forall x$ *справедливо* $W(x) \neq 0$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно продифференцировать вронскиан и вместо вторых производных подставить их выражения из уравнения (1). Из полученного тождества следует, что производная вронскиана имеет класс гладкости два. Следовательно, сам вронскиан трижды непрерывно дифференцируемый.

Докажем последнее утверждение. Если $p \in P_n$, то $W \equiv const \neq 0$. Пусть $p \notin P_n$. Предположим от противного, что в некоторой точке x_1 векторы $(y_n^-(x_1), (y_n^-(x_1))')$ и $(y_n^+(x_1), (y_n^+(x_1))')$ коллинеарны. Умножив на ненулевой коэффициент одну из собственных функций, можно добиться равенства векторов:

$$(y_n^-(x_1), (y_n^-(x_1))') = (y_n^+(x_1), (y_n^+(x_1))') \tag{7}$$

(мы оставляем прежние обозначения). При этом справедливость утверждения не меняется. Обозначим через x_2 и x_3 ближайший слева и справа нули функции $y_n^-(x)$. Мы утверждаем, что внутри интервала (x_2, x_1) функция $y_n^+(x)$ обращается в нуль. Предположим противное и, как при доказательстве теоремы Штурма о перемежаемости нулей (см. [4]), умножим тождество

$$-(y_n^-(x))'' + p(x)y_n^-(x) = \lambda_n^- y_n^-(x)$$

на $y_n^+(x)$, а тождество

$$-(y_n^+(x))'' + p(x)y_n^+(x) = \lambda_n^- y_n^+(x)$$

на $y_n^-(x)$. Вычтем полученные тождества и проинтегрируем разность на интервале (x_2, x_1):

$$\int_{x_2}^{x_1}(-(y_n^-(x))''y_n^+(x) + (y_n^+(x))''y_n^-(x))dx = -\Delta\lambda\int_{x_2}^{x_1} y_n^-(x)y_n^+(x)dx.$$

Интегрируя слева по частям и принимая во внимание определения концов интервала и равенство (7), получим

$$y_n^+(x_2)(y_n^-(x_2))' = -\Delta\lambda\int_{x_2}^{x_1} y_n^-(x)y_n^+(x)dx.$$

Поскольку внутри интервала интегрирования функция $y_n^-(x)$ знакопостоянная, положим, что она положительная. Тогда, по допущению, функция $y_n^+(x)$ также положительная внутри интервала, и производная $(y_n^-(x_2))' > 0$. Получили, что левая часть равенства неотрицательная, а правая отрицательная. Следовательно, внутри интервала (x_2, x_1) функция $y_n^+(x)$ обращается в нуль. Аналогично устанавливаем, что внутри интервала (x_1, x_3) функция $y_n^+(x)$ также обращается в нуль. Таким образом, функция y_n^- обнуляется только на краях интервала $[x_2, x_3]$, а функция y_n^+ дважды обратилась в ноль внутри этого же интервала. Вследствие теоремы Штурма на остальных интервалах знакопостоянства функции y_n^- функция y_n^+ обнуляется, по крайней мере, по одному разу. Следовательно, на периоде количество нулей функции y_n^+ будет, по крайней мере, на один больше, чем количество нулей функции y_n^-. Мы пришли к противоречию. □

Из определений (3)–(5) введенных функций сразу вытекает

Лемма 2. *Там, где $\rho(x) > 0$, справедливо равенство*

$$\eta(x) := \theta'(x) = \frac{W(x)}{\rho^2(x)}. \tag{8}$$

Теперь мы сформулируем утверждения о свойствах функций ρ, θ, η.

Лемма 3. *Функция $\rho \in C^2(2\pi)$ и всюду положительна: $\forall x$ верно $\rho(x) > 0$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе является следствием п. 3 леммы 1. □

Замечание 1. Умножением выбранных собственных функций на ± 1 можно добиться того, чтобы вронскиан был положительным $W(x) > 0$, а начальное значение угловой функции принадлежало полуинтервалу $\theta(0) \in [0, \pi)$. В невырожденном случае $\Delta\lambda > 0$ эти требования однозначно задают ортонормированные собственные функции. Ниже мы предполагаем, что оба требования выполнены.

Опишем свойства угловой функции.

Лемма 4. *Справедливы утверждения.*

1. *Угловая функция имеет класс гладкости три: $\theta \in C^3$.*
2. *Функция $\theta(x)$ строго возрастающая.*
3. *При изменении аргумента на 2π функция θ изменяется на $2\pi n$: $\theta(x + 2\pi) = \theta(x) + 2\pi n$.*

Доказательство. Первое и второе утверждения следуют из лемм 1–3. Из доказанных утверждений следует, что вектор $\overline{y}_n(x)$ вращается с положительной скоростью и поворачивается за период на угол кратный 2π. Поскольку собственные функции имеют на периоде в точности $2n$ нулей, угол поворота равен $2\pi n$. □

Из предыдущей леммы сразу следует

Лемма 5. *Справедливы утверждения.*

1. *Функция* $\eta \in C^2(2\pi)$.

2. *Функция* $\eta(x)$ *всюду положительная.*

3. $$\int_0^{2\pi} \eta(x) dx = 2\pi n.$$

Обозначим через H множество функций η, удовлетворяющих свойствам 1–3 леммы 5.

Замечание 2. Утверждения лемм 3–5 можно трактовать следующим образом: замкнутая кривая Υ не содержит начало координат, с ростом переменной x точка $(y_n^-(x), y_n^+(x))$ кривой вращается вокруг начала координат с положительной скоростью и на периоде совершает в точности n поворотов.

4. Параметризация множества $P \setminus P_n$. В этом пункте мы предполагаем, что $\Delta\lambda > 0$. Воспользовавшись равенствами (4), (6) и (8), исключим вронскиан и собственные функции. Получим равенство

$$(\theta'(x) \cdot \rho^2(x))' = -\frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \sin 2\theta(x) \cdot \rho^2(x),$$

которое рассмотрим как линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции ρ^2 с положительным коэффициентом при производной. Решив уравнение, получаем выражение полярного радиуса через полярный угол:

$$\rho^2(x) = \frac{\rho^2(0) \cdot \theta'(0)}{\theta'(x)}\ exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{2} \int_0^x \frac{\sin 2\theta(t)}{\theta'(t)}\ dt\right). \tag{9}$$

Из периодичности полярного радиуса вытекает равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta(x)}{\theta'(x)}\ dx = 0. \tag{10}$$

Подставив выражение (9) в условие ортогональности собственных функций и условие равенства их норм, получаем еще два равенства:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta(x)}{\theta'(x)}\ exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{2} \int_0^x \frac{\sin 2\theta(t)}{\theta'(t)} dt\right) dx = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta(x)}{\theta'(x)}\ exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{2} \int_0^x \frac{\sin 2\theta(t)}{\theta'(t)} dt\right) dx = 0. \tag{12}$$

Лемма 6. *Равенства (10) и (11) равносильны.*

Доказательство. Достаточно заметить, что равенство (11) равносильно равенству

$$-\frac{2}{\Delta\lambda}\int_0^{2\pi}\left(exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{2}\int_0^x \frac{\sin 2\theta(t)}{\theta'(t)}dt\right)\right)' dx = 0,$$

и взять интеграл. □

Теперь заметим, что условия (10) и (12) инвариантны относительно изменения начального угла $\theta_0 := \theta(0)$ на величину кратную π. Поэтому начальный угол принадлежит фактор-пространству окружности по отношению эквивалентности диаметрально противоположных точек. Учитывая замечание 1, мы получаем, что по потенциалу p начальный угол θ_0 однозначно определяется как точка вещественной проективной прямой: $\theta_0 \in \mathbb{R}P^1$.

Итак, нами доказано следующее

Утверждение 1. *Существует отображение F, которое потенциалу $p \in P \setminus P_n$ ставит в соответствие:*

1. *положительное число – разность собственных значений*

$$\Delta\lambda = \lambda_n^+(p) - \lambda_n^-(p) > 0,$$

2. *точку на проективной прямой – начальное значение угловой функции*

$$\theta_0 \in \mathbb{R}P^1,$$

3. *функцию $\eta \in H$ – скорость угловой функции θ;*

причем тройка $q := (\Delta\lambda, \theta_0, \eta) = F(p)$ удовлетворяет условиям (10) и (12), где

$$\theta'(x) = \eta(x), \quad \theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \eta(t)dt. \tag{13}$$

Покажем, что определенное нами отображение имеет обратное. Обозначим $\mathbb{R}^+ := \{\Delta\lambda > 0\}$.

Утверждение 2. *Существует обратное отображение F^{-1}, которое произвольной тройке $q := (\Delta\lambda, \theta_0, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}P^1 \times H$, удовлетворяющей условиям (10) и (12) (где функция θ определяется по формуле (13)), ставит в соответствие потенциал $p \in P \setminus P_n$.*

Доказательство. По формуле (13) восстанавливаем угловую функцию. Затем по формуле (9) получаем полярный радиус, а по формулам (4) – собственные функции. В полученных выражениях неизвестным остается начальное значение $\rho(0)$. При желании его можно найти, приравняв L_2-норму любой из полученных собственных функций к единице. Но в этом нет необходимости. Поскольку выполнено условие (12), нормы собственных функций равны при любом начальном значении $\rho(0)$. Этого, как мы увидим ниже, достаточно для однозначного восстановления потенциала.

Также отметим, благодаря условию (10), полученные собственные функции являются периодическими, а из условий 2, 3 леммы 5 – имеют на периоде в точности $2n$ нулей.

Имея в виду уравнение (1), найдем выражение

$$r(x) := \frac{(y_n^-(x))''}{y_n^-(x)} = -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 + \\ + \frac{\Delta\lambda\eta'\sin(2\theta)}{2\eta^2} + \frac{\Delta\lambda^2\sin^2(2\theta)}{16\eta^2} - \frac{\Delta\lambda}{2}\cos(2\theta) + \Delta\lambda\sin^2\theta, \quad (14)$$

где функция $\theta(x)$ выражена через начальное значение θ_0, и функцию $\eta(x)$ по формуле (13). Поскольку мы ищем потенциал с нулевым следом, найдем собственное значение по формуле

$$\lambda_n^- = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(x)dx \ , \quad (15)$$

а потенциал по формуле

$$p(x) = r(x) + \lambda_n^-. \quad (16)$$

Наконец, большее собственное значение вычисляем по формуле

$$\lambda_n^+ = \lambda_n^- + \Delta\lambda. \quad (17)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что восстановление потенциала с помощью функции y_n^+ приводит к такому же результату. Следовательно полученный потенциал принадлежит именно подмножеству $P \setminus P_n$ и если по нему восстанавливать тройку $q := (\Delta\lambda, \theta_0, \eta)$ с помощью отображения F, то получим исходные значения. Таким образом, построенное отображение $q \to p$ является обратным к F. $\square$

Обозначим

$$Q := \{q = (\Delta\lambda, \theta_0, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}P^1 \times H |\ (13), (10), (12)\}.$$

Резюмируя утверждения 1 и 2, мы получаем параметризацию множества невырожденных потенциалов.

Теорема 1. *Между множеством невырожденных потенциалов $P \setminus P_n$ и множеством Q существует биекция F, которая определяется следующим образом. По потенциалу $p \in P \setminus P_n$ единственным образом определяются разность собственных значений $\Delta\lambda > 0$ и (с точностью до одновременной перемены знаков) ортонормированные собственные функции y_n^- и y_n^+, вронскиан которых положителен; полярные координаты (ρ, θ) в плоскости Ω значений собственных функций единственным образом определяют начальное значение угла $\theta_0 \in \mathbb{R}P^1$ и функцию $\eta := \theta' \in H$ угловой скорости; при этом полученная тройка $q = (\Delta\lambda, \theta_0, \eta)$ удовлетворяет равенствам (10), (12).*

Обратное отображение F^{-1} (т.е. восстановление потенциала и заодно собственных значений и собственных функций) осуществляется по формулам (13), (9), (4), (14), (15), (16), (17).

5. Параметризация множества P_n. Если $p \in P_n$, то $\Delta\lambda = 0$, а вронскиан ортонормированных собственных функций является константой (это классическое утверждение, которое вытекает из (6)). Заменой знака у одной из собственных функций можно добиться положительности вронскиана. После чего пара ортонормированных собственных функций определяется с точностью до поворота в плоскости Π.

Лемма 7. *Справедливы утверждения.*

1. *Вронскиан $W = const > 0$, функция радиуса $\rho(x)$ и функция угловой скорости $\eta(x)$ инвариантны относительно поворота пары ортонормированных собственных функций в плоскости* Π.

2. *Значения угловой функции при повороте пары ортонормированных собственных функций в плоскости Π на угол α изменяются на угол $(-\alpha)$: $\theta_\alpha(x) = \theta(x) - \alpha$.*

Доказательство. После поворота на угол α мы получаем пару ортонормированных собственных функций

$$y^-_{n,\alpha} = \cos\alpha\ y^-_n + \sin\alpha\ y^+_n, \quad y^+_{n,\alpha} = -\sin\alpha\ y^-_n + \cos\alpha\ y^+_n. \tag{18}$$

Подставляя полученные выражения в формулы (3), (5) и (8), получаем первое утверждение.

Из тех же формул (18) вытекает, что точка $(y^-_n(x), y^+_n(x)) \in \Upsilon \subset \Omega$ преобразуется с помощью обратной матрицы, т.е. поворачивается вокруг начала координат на угол $(-\alpha)$. $\square$

Итак, по потенциалу $p \in P_n$ мы однозначно определяем функцию угловой скорости η. Исследуем множество всех получаемых функций.

Утверждение 3. *Существует отображение F_n, которое потенциалу $p \in P_n$ ставит в соответствие функцию $\eta \in H$, удовлетворяющую двум условиям:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\int_0^x \eta(t)dt}{\eta(x)}\ dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\int_0^x \eta(t)dt}{\eta(x)}\ dx = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Существование отображения доказано в лемме 7. Поскольку мы выбирали пару ортонормированных собственных функций, для них выполняются условия (11) и (12), где $\Delta\lambda = 0$, а начальный угол θ_0 может быть выбран произвольно. Взяв его равным нулю, получаем условия (19). $\square$

Утверждение 4. *Существует обратное отображение F_n^{-1}, которое произвольной функции $\eta \in H$, удовлетворяющей двум условиям (19), ставит в соответствие потенциал $p \in P_n$.*

Доказательство. Из формулы (9), взяв $\Delta\lambda = 0$, получаем полярный радиус: $\rho^2(x) = 1/\eta(x)$ (выбор начального значения радиуса роли не играет). По формулам (4) определяем пару ортогональных собственных функций. Затем по формулам (14), (15) (напоминаем, что $\Delta\lambda = 0$) и (16) находим функцию r собственное значение $\lambda^-_n = \lambda^+_n$ и, наконец, искомый потенциал p. Непосредственной проверкой убеждаемся, что восстановление потенциала по второй собственной функции приводит к такому же результату. □

Обозначим
$$H_n := \{\eta \in H|\ (19)\}.$$
Из утверждений 3 и 4 вытекает

Теорема 2. *Между множеством вырожденных потенциалов P_n и множеством H_n существует биекция F_n, которая определяется следующим образом. По потенциалу $p \in P_n$ определяется (с точностью до поворота в плоскости Π) пара ортонормированных собственных функций y_n^- и y_n^+, вронскиан которых положителен; полярные координаты (ρ, θ) в плоскости Ω значений собственных функций единственным образом определяют функцию $\eta := \theta' \in H$ угловой скорости, которая удовлетворяет равенствам (19).*

Обратное отображение F_n^{-1} (т.е. восстановление потенциала и заодно собственного значения и собственных функций) осуществляется так: находим полярный радиус по формуле $\rho^2(x) = 1/\eta(x)$ и пару ортогональных собственных функций одинаковой нормы по формуле (4). Затем находим вспомогательную функцию

$$r_n(x) := \frac{(y_n^-(x))''}{y_n^-(x)} = -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2$$

и, наконец, по формулам (15) и (16) (подставив в них вместо r функцию r_n) искомое собственное значение и потенциал.

1. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. – 1972. – **6**, № 2. – С. 94–101.
2. *Дымарский Я.М.* Метод многообразий в теории собственных факторов нелинейных операторов // Современная матем. Фундаментальные направления. – 2007. – **24**. – С. 3–159.
3. *Якубович В.А., Стражинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
4. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. – М.: Наука, 1976. – 671 с.

Yu. A. Evtushenko

Parametrization for the family of periodic eigenvalue problems.

The work introduces a new parametrization of the family of periodic eigenvalue problems. The important feature of this parametrization that it respects the submanifold of eigenvalue problems with double degeneracy of a specific eigenvalue.

Keywords: *periodic eigenvalue problem, double eigenvalue.*

Ю. О. Євтушенко

Параметризація сім'ї періодичних крайових задач другого порядку.

У роботі описано нову параметризацію сім'ї періодичних крайових задач другого порядку, що узгоджена із підмноговидом таких крайових задач, які мають двократні власні значення виділеного номера.

Ключові слова: *періодична крайова задача, двократне власне значення.*

Институт химических технологий, Рубежное
`julia.evtushenko@rambler.ru`

Получено 28.07.13