

УДК 533.6.013.42

©2013. Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ И УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Рассмотрены задачи о поступательных и вращательных колебаниях цилиндрического резервуара с упругими основаниями, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью. На основании модального анализа, исходные задачи динамики твердого тела и гидроупругости сведены к счетным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Выведены выражения для присоединенной массы и присоединенного момента инерции жидкости. Необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия механической системы исследованы на основе анализа частотного уравнения и положительной определенности потенциальной энергии. Показана возможность стабилизации неустойчивого положения равновесия.

Ключевые слова: твердое тело, идеальная жидкость, гидроупругость, модальный анализ, устойчивость движения, частотное уравнение.

1. Введение. Одним из основных вопросов, возникающих при исследовании движения упругого твердого тела с полостями, содержащими жидкость, является вопрос устойчивости движения твердого тела, так как относительное движение жидкости оказывает на него дестабилизирующее воздействие. В этой связи возникает задача о поиске возможностей стабилизации движения твердого тела с жидкостью. Современное состояние исследований по данной тематике отражено в работах Л.В. Докучаева [1], Н.Д. Копачевского [2], Н.Н. Моисеева и Н.Н. Румянцева [3], В.А. Троценко, Ю.Н. Кононова и многих других.

2. Постановка задач. Рассмотрим механическую систему, состоящую из цилиндрического резервуара произвольного поперечного сечения, полностью заполненного идеальной несжимаемой жидкостью. Будем предполагать, что боковая стенка резервуара является абсолютно жесткой, а основания представляют собой тонкие упругие пластины, обладающие изгибной жесткостью D_i и подверженные растягивающим усилиям T_i в срединной поверхности ($i = \overline{1,2}$). Предположим также, что колебания жидкости и пластин являются совместными.

Для описания движения введем две системы координат: неподвижную – $OXYZ$, и связанную с твердым телом – $Oxyz$. Расположим связанную систему координат таким образом, чтобы ось Oz была параллельна образующей цилиндра, проходила через центр масс поперечного сечения резервуара и была направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести \mathbf{g} . Поступательные колебания резервуара под действием упругой силы происходят вдоль оси Ox , а вращательные колебания физического маятника совершаются относительно оси OY . Таким образом, поступательные колебания твердого тела определяются смещением X вдоль оси Ox , а вращательные – углом поворота θ относительно OY (рис.1). Движение жидкости будем считать потенциальным. Для обозначения потенциалов соответственно абсо-

лютой (в системе $OXYZ$) и относительной (в системе $Oxyz$) скоростей жидкости введем функции φ^* и φ [4]:

$$\varphi^* = \varphi + \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{r} + \omega \cdot \Psi.$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор в координатах $OXYZ$, \mathbf{V}_0 – скорость движения начала координатной системы $Oxyz$, $\omega = (0, \dot{\theta}, 0)$ – угловая скорость вращения резервуара, Ψ – потенциал Стокса–Жуковского [5], определяемый из граничной задачи

$$\Delta \Psi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}.$$

Для рассматриваемого случая вращения физического маятника относительно оси OY потенциал Стокса–Жуковского вычисляется по формуле

$$\Psi = 2 \sum_n \beta_n \frac{\cosh(k_n(z-h)) - \cosh(k_n z)}{k_n \sinh \alpha_n} \psi_n - yz, \quad \beta_n = \int_{\Omega} y \psi_n d\Omega,$$

в которой ψ_n и k_n – собственные функции и соответствующие им собственные числа граничной задачи [5]

$$\Delta_2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\gamma} = 0, \quad (1)$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

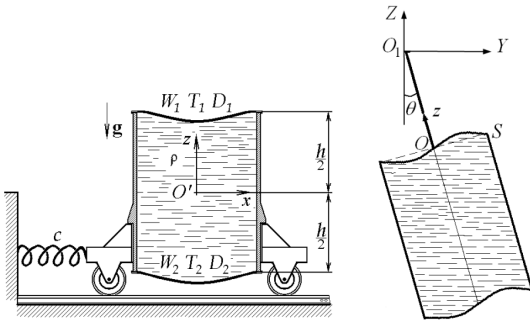


Рис. 1. Рассматриваемые механические системы

Функции ψ_n вместе с константой образуют полную ортогональную систему в пространстве функций, интегрируемых с квадратом модуля на Ω и удовлетворяющих указанному в (1) граничному условию [4–6].

Исходная граничная задача, описывающая движение твердого тела, упругих пластин и жидкости имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \omega \times \mathbf{Q} = \mathbf{K}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \omega \times \mathbf{G} + \mathbf{V}_0 \times \mathbf{Q} = \mathbf{L}, \quad (3)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

$$\chi_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 = -p_0 + p|_{z=h/2}, \quad (5)$$

$$\chi_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 = p_0 - p|_{z=-h/2}, \quad (6)$$

$$\mathfrak{B}_{1i}W_i = 0, \quad \mathfrak{B}_{2i}W_i = 0 \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} W_1 d\Omega = \int_{\Omega} W_2 d\Omega, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (9)$$

Здесь \mathfrak{B}_{ij} – операторы граничных условий закрепления пластин, \mathbf{Q} и \mathbf{G} – количество движения и момент количества движения механической системы, \mathbf{K} и \mathbf{L} – главный вектор и главный момент.

Решение задачи (4) может быть записано в виде

$$\varphi = a_0 + a_1 z + \sum_n \left(A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z} \right) \psi_n, \quad (10)$$

где a_0 , a_1 , A_n и B_n – некоторые функции времени.

Следуя Л.В. Докучаеву [1], сведем систему дифференциальных уравнений (4)–(6) для функций φ и W_i , к системе интегро-дифференциальных уравнений только для функций прогиба пластин W_i . Для этого воспользуемся представлением (10), условиями совместности колебаний (9) и выражением для гидродинамического давления p

$$p = \rho \left(\tilde{Q} - \frac{\partial' \varphi^*}{\partial t} - gz \right),$$

которое следует из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа. Здесь ρ – плотность жидкости, \tilde{Q} – произвольная функция времени. В случае, когда одно из оснований становится абсолютно жестким, можно положить $\tilde{Q} \equiv 0$. В результате получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 &= \rho Q^* + \mathfrak{f} - \\ - \frac{\rho h}{2} F_0 \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] + \rho \sum_n \left(\tilde{b}_n F_n \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] - \tilde{c}_n F_n \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] \right) \psi_n, \\ \chi_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 &= -\rho Q^* - \mathfrak{f} - \\ - \frac{\rho h}{2} F_0 \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] + \rho \sum_n \left(\tilde{b}_n F_n \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] - \tilde{c}_n F_n \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] \right) \psi_n, \end{aligned} \quad (11)$$

удовлетворяющих граничным условиям (7) и (8).

Здесь

$$Q^* = Q^d - \dot{a}_0, \quad \tilde{b}_n = \frac{\rho}{k_n \sinh \varkappa_n}, \quad \tilde{c}_n = \frac{\rho}{k_n \tanh \varkappa_n}, \quad \varkappa_n = k_n h,$$

$$F_0[w] = \frac{1}{S} \int_{\Omega} w d\Omega, \quad F_n[w] = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} w \psi_n d\Omega, \quad N_n^2 = \int_{\Omega} \psi_n^2 d\Omega.$$

Величина f определяется характером движения твердого тела. В задаче о поступательных колебаниях под действием упругой силы $f = -\rho x \ddot{X}$, в задаче о вращательных колебаниях физического маятника $f = \rho \left[(l_0 \ddot{\theta} + \theta g) y - \Psi \ddot{\theta} \right]$. l_0 – расстояние от оси вращения до невозмущенного верхнего основания.

3. Динамическая задача. В связи с упругостью обоих оснований, при рассмотрении поставленных выше задач приходится учитывать и статический прогиб. В линейной постановке функцию W_i представим как сумму статического и динамического прогибов:

$$W_i = W_i^{st} + W_i^d.$$

Вытекающую из (11) систему интегро-дифференциальных уравнений для динамической компоненты (индекс d ниже опускается) запишем в виде обобщенного волнового уравнения [1]

$$\mathfrak{A} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \mathfrak{C} W = f. \quad (12)$$

\mathfrak{A} и \mathfrak{C} – инерционный и упругий операторы в пространстве функций, удовлетворяющих граничным условиям (7), со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega,$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \chi_1 + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n & - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n \\ - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n & \chi_2 + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \text{diag}(D_i \Delta_2^2 - T_i \Delta_2 + (-1)^{i+1} \rho g).$$

Операторы краевых задач для консервативных механических систем всегда являются самосопряженными [1, 2, 6]. В этом случае, когда оператор \mathfrak{C} самосопряжен, а \mathfrak{A} положительно определен, все собственные значения спектра ω действительны и изолированы. Собственные формы колебаний, соответствующие различным ω , попарно ортогональны по кинетической и потенциальной энергии

$$(\mathfrak{A} W_k, W_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ \mu_k, & \text{при } k = j, \end{cases} \quad (\mathfrak{C} W_k, W_j) = \omega_k^2 (\mathfrak{A} W_k, W_j).$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний пластин w_k

$$W = \sum_k p_k w_k. \quad (13)$$

Подставим разложение (13) в уравнение (12), умножим левую и правую части этого уравнения на w_k и проинтегрируем полученные соотношения по области Ω . В результате получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

для обобщенных координат p_k , характеризующих деформацию упругих пластин при возбуждении k -го тона колебаний

$$\mu_k(\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\zeta_{ik0} = F_0[w_{ik}]$, $\zeta_{ikn} = F_n[w_{ik}]$,

$$\mu_k = (\mathfrak{A}w_k, w_k) = \sum_{i=1}^2 \left\{ (\chi_i + \rho h) S \zeta_{ik0}^2 + \sum_n N_n^2 \left[\zeta_{ikn}^2 (\chi_i + \tilde{c}_n) - \zeta_{ikn} \zeta_{(i+1)kn} \tilde{b}_n \right] \right\}.$$

Для вывода уравнений поступательного движения твердого тела под действием упругой силы воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы (2)

$$MV_0 + \rho \sum_{i=1}^2 \int_V \dot{v}_x dV = -c\ddot{X},$$

а для вывода уравнений вращательных колебаний воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения (3)

$$J\ddot{\theta} + \rho \sum_{i=1}^2 \int_V [y\dot{v}_z - (z - l_0)\dot{v}_y] dV = L.$$

Здесь M – масса механической системы, C – жесткость пружины, J – момент инерции твердого тела, замороженной жидкости и пластин относительно оси Oy .

Так как

$$\dot{v}_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \dot{v}_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \ddot{\theta}, \quad \dot{v}_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \ddot{\theta},$$

то, с учетом представления потенциала φ в виде (10), уравнения движения твердого тела при поступательных и вращательных колебаниях можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + \rho \sum_n C_n (F_n[\ddot{W}_1] - F_n[\ddot{W}_2]) &= -cX, \\ J\ddot{\theta} + k^2\theta &= \rho \sum_n \left\{ (\Omega_{2n} F_n[\ddot{W}_2] + g F_n[W_2]) - (\Omega_{1n} F_n[\ddot{W}_1] + g F_n[W_1]) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} k^2 &= gm \left(l_0 + \frac{h}{2} + s \right) + g \sum_{i=0}^2 m_i \tilde{l}_i, \\ \Omega_{1n} &= l_0 + \frac{2}{k_n} \tanh \frac{\varkappa_n}{2}, \quad \Omega_{2n} = l_0 - \frac{2}{k_n} \tanh \frac{\varkappa_n}{2} + h, \end{aligned}$$

m – масса жидкости, для $i = \overline{1, 2}$ m_i и \tilde{l}_i – масса i -той пластины и расстояние от i -той пластины до оси вращения, m_0 и \tilde{l}_0 – масса твердого тела и расстояние от центра

масс твердого тела до оси вращения соответственно. Величина s представляет собой смещение центра масс жидкости, обусловленное статическим прогибом W_i^{st}

$$s = \frac{1}{2Sh} \int_{\Omega} (W_1^{st2} + W_2^{st2}) d\Omega.$$

Подставив (13) в (14), получим счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения рассматриваемых механических систем

$$\begin{aligned} \mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) &= \alpha_k \ddot{X}, & M \ddot{X} + cX &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ddot{p}_k, \\ \mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) &= \Omega_k \ddot{\theta} + g\beta_k \theta, & J \ddot{\theta} + k^2 \theta &= \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\Omega}_k \ddot{p}_k + g\beta_k p_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \rho \int_{\Omega} (w_{2k} - w_{1k}) x d\Omega = \rho \sum_n C_n (\zeta_{2kn} - \zeta_{1kn}), \\ \beta_k &= \rho \int_{\Omega} (w_{2k} - w_{1k}) y d\Omega = \rho \sum_n D_n (\zeta_{2kn} - \zeta_{1kn}), \\ C_n &= \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_n x d\Omega, & D_n &= \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_n y d\Omega, \\ \tilde{\Omega}_k &= \rho \sum_n \beta_n (\Omega_{2n} \zeta_{2nk} - \Omega_{1n} \zeta_{1nk}). \end{aligned}$$

Таким образом, задача о движении цилиндрического резервуара с упругими основаниями, полностью заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к интегрированию бесконечных системы ОДУ относительно обобщенных координат. Эти координаты характеризуют положение твердого тела, относительное движение жидкости и пластин.

Разрешив системы уравнений (15) относительно p_k [7], получим выражения для присоединенной массы и присоединенного момента инерции жидкости

$$M_{2x} = m - \sum_k \frac{\alpha_k^2}{\mu_k}, \quad \tilde{J}_{2y} = J_2 - \sum_k \frac{\tilde{\Omega}_k^2}{\mu_k}.$$

При этом $0 < M_{2x} \leq M_2$ и $0 < \tilde{J}_{2y} \leq J_2$, причём равенство возможно только в случае жёстких оснований.

4. Статическая задача. Как сказано в предыдущем пункте, для вычисления смещения центра масс жидкости s , оценки применимости линейного подхода и вычисления потенциальной энергии механической системы необходимо знать величину статического прогиба пластин.

Граничная задача для статического прогиба имеет вид:

$$\begin{cases} D_1 \Delta^2 W_1^{st} - T_1 \Delta W_1^{st} + \rho g W_1^{st} = -\frac{\rho g h}{2} - C, \\ D_2 \Delta^2 W_2^{st} - T_2 \Delta W_2^{st} - \rho g W_2^{st} = -\frac{\rho g h}{2} + C, \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathfrak{B}_{1i} W_i^{st} = 0, \quad \mathfrak{B}_{2i} W_i^{st} = 0. \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} W_1^{st} d\Omega = \int_{\Omega} W_2^{st} d\Omega, \quad (18)$$

где $C = p_0 - \rho Q^{st}$, Q^{st} – статический член функции \tilde{Q} .

Вопросы существования решения задачи (16)–(18) подробно рассмотрены в монографии [2].

Решение системы уравнений (16) имеет вид:

$$\begin{aligned} W_1^{st} &= A_{11} u_{11} + A_{12} u_{12} + A_{13} u_{13} + A_{14} u_{14} - \frac{C}{\rho g} - \frac{h}{2}, \\ W_2^{st} &= A_{21} u_{21} + A_{22} u_{22} + A_{23} u_{23} + A_{24} u_{24} - \frac{C}{\rho g} + \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

где u_{ij} – линейно независимые решения однородной системы, A_{ij} и C – константы, определяемые из граничных условий (17), (18).

Если поперечное сечение цилиндрического резервуара Ω является кругом, то ограниченными для каждой пластины останутся только две функции u_{ij} , а система уравнений для определения констант A_{ij} и C принимает менее громоздкий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}[u_{11}] & \mathfrak{B}_{11}[u_{12}] & 0 & 0 & -\mathfrak{B}_{11}[\frac{1}{\rho g}] \\ \mathfrak{B}_{21}[u_{11}] & \mathfrak{B}_{21}[u_{12}] & 0 & 0 & -\mathfrak{B}_{21}[\frac{1}{\rho g}] \\ 0 & 0 & \mathfrak{B}_{12}[u_{21}] & \mathfrak{B}_{12}[u_{22}] & -\mathfrak{B}_{12}[\frac{1}{\rho g}] \\ 0 & 0 & \mathfrak{B}_{22}[u_{21}] & \mathfrak{B}_{22}[u_{22}] & -\mathfrak{B}_{22}[\frac{1}{\rho g}] \\ F_0[u_{11}] & F_0[u_{12}] & -F_0[u_{21}] & -F_0[u_{22}] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}[\frac{h}{2}] \\ \mathfrak{B}_{21}[\frac{h}{2}] \\ -\mathfrak{B}_{12}[\frac{h}{2}] \\ -\mathfrak{B}_{22}[\frac{h}{2}] \\ h \end{pmatrix}.$$

Решение статической задачи позволяет найти необходимое условие совместности колебаний пластин и жидкости. А именно, гидростатическое давление идеальной жидкости должно быть неотрицательной величиной $p = \rho(Q^{st} - gz) \geq 0$. Для этого необходимо

$$p_0 \geq \rho g h / 2 - C.$$

Данное неравенство не является достаточным условием совместности для динамической задачи, но дает простую предварительную оценку имеющегося в конкретном случае «запаса прочности».

5. Анализ частотных уравнений и потенциальной энергии.

Положив $X = X_0 e^{i\sigma t}$, $p_k = p_{k0} e^{i\sigma t}$ и $\theta = \theta_0 e^{i\sigma t}$, получим уравнения частот σ , соответственно, поступательных и вращательных колебаний резервуара

$$M\sigma^2 - c = \sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\mu_k(\sigma^2 - \omega_k^2)}, \quad J\sigma^2 - k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Omega_k \sigma^2 - g\beta_k)^2}{\mu_k(\sigma^2 - \omega_k^2)}.$$

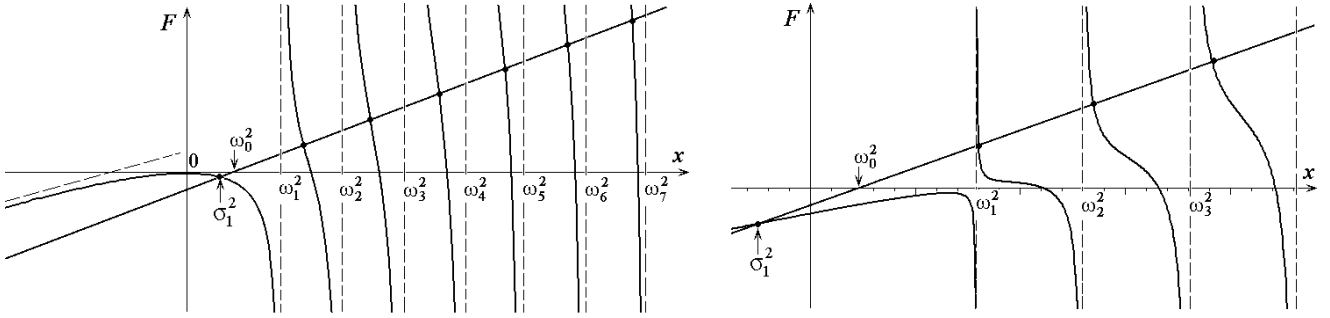


Рис. 2. Графики частотных уравнений

Исследование этих уравнений удобно проводить графоаналитическим методом, представив левую и правую части, соответственно, как функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ ($x = \sigma^2$) [3, 7]. Из рисунка видно, что наличие упругости оснований ($\alpha_k^2 \neq 0$) приводит к смещению её основной частоты влево. Чтобы показать отсутствие корней в левой полуплоскости заметим, что прямая $F = F_1(x)$ имеет тангенс угла наклона равный полной массе системы M , а функция $F = F_2(x)$ монотонна при $x < 0$ и имеет наклонную асимптоту с тангенсом угла наклона \tilde{M} . Так как $F_1(0) = -c < 0 = F_2(0)$ и $\tilde{M} = M_2 - M_{2x} \leq M_2 < M$, то графики функций $F = F_1(x)$ и $F = F_2(x)$ в левой полуплоскости не пересекаются.

Для физического маятника пересечения в левой полуплоскости отсутствуют, если

$$k^2 > g^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_k)^2}{\mu_k \omega_k^2}. \quad (19)$$

Достаточные условия устойчивости найдем из анализа потенциальной энергии рассматриваемых механических систем. Для сокращения записи рассмотрим случай, когда верхнее основание является жестким, а нижнее – заземлено по контуру. В этом случае статический прогиб отсутствует ($s = 0$), а потенциальная энергия системы, с учетом найденных выше разложений по собственным формам, примет вид квадратичных форм:

$$\Pi = \frac{1}{2} c X^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k p_k^2(t), \quad (20)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{k} \theta^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k p_k^2(t), \quad (21)$$

для поступательных и вращательных колебаний твердого тела, соответственно. Здесь

$$\gamma_k = (\mathfrak{C} w_k, w_k) = \sum_n \zeta_{2nk}^2 N_n^2 [(D_2 k_n^2 + T_2) k_n^2 - \rho g],$$

$$\tilde{k} = k^2 - g^2 \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{\gamma_k}.$$

Для положительной определенности квадратичных форм (20), (21) достаточно потребовать выполнения неравенств $\gamma_k > 0$ и $\dot{k} > 0$, т.е.

$$\sum_n \zeta_{2nk}^2 N_n^2 [(D_2 k_n^2 + T_2) k_n^2 - \rho g] > 0, \quad (22)$$

$$k^2 > g^2 \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{\gamma_k}. \quad (23)$$

Условие (22) будет выполнено, если

$$(D_2 k_n^2 + T_2) k_n^2 - \rho g > 0.$$

Так как величины k_n образуют бесконечно возрастающую числовую последовательность [5], то последнее неравенство можно упростить, положив $n = 1$.

Условие (23) совпадает с условием (19), полученным на основе анализа частотного уравнения.

Если $T_i \rightarrow \infty$ и $D_i \rightarrow \infty$, то величина $\mu_k \rightarrow \infty$ и правая часть неравенства стремится к нулю. То есть, если $k^2 > 0$, то увеличением предварительного натяжения нижнего основания T_2 или его жесткости D_2 можно стабилизировать неустойчивое положение равновесия физического маятника.

В случае, когда жестким является нижнее основание,

$$\gamma_k = \sum_n \zeta_{1nk}^2 N_n^2 [(D_1 k_n^2 + T_1) k_n^2 + \rho g],$$

откуда следует, что положение равновесия в задаче Сретенского всегда устойчиво, а для устойчивости физического маятника необходимо и достаточно выполнения только неравенства (19).

6. Заключение. Описанная в статье процедура модального анализа, сводящая задачи динамики твердого тела, жидкости и пластин к счетным системам ОДУ, является довольно алгоритмичной и хорошо применима для произвольных случаев движения твердого тела. Постановки задач и основные аналитические результаты приведены для случая цилиндрического резервуара с произвольным поперечным сечением. Существенной трудностью является необходимость предварительного получения аналитических выражений для собственных форм совместных колебаний пластин и жидкости. Это возможно только для резервуаров канонической формы (поперечное сечение – круг, кольцо, прямоугольник). Естественным обобщением рассмотренных в статье задач является случай многослойной жидкости, разделенной упругими перегородками.

1. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.

4. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. – 270 с.
5. Мижигин Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука. – 1957. – 476 с.
7. Кононов Ю.Н., Дидок Н.К. Задача Сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями // Механика твердого тела. – 2010. – Т. 40. – С. 210–220.
8. Кононов Ю.Н., Дидок Н.К. Совместные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и пластинки на свободной поверхности жидкости // Труды XIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». – 2009. – Т. 2. – С. 108–112.

N. K. Didok, Yu. N. Kononov

Dynamics and stability of oscillations of cylindrical tank with ideal fluid and elastic bases.

Problems on translational and rotational oscillations of cylindrical tank with elastic bases and filling of an ideal incompressible liquid are considered. On the base of modal analysis, original problems of rigid body dynamics and hydro-elasticity were reduced to countable systems of ordinary differential equations. Expressions of added mass and added momentum of inertia were obtained. Necessary and sufficient conditions of stability of the rigid body equilibrium position were investigated on the base of the analysis of frequency equations and positive definiteness of the potential energy. Possibility of stabilization of unstable equilibrium position was shown.

Keywords: rigid body, ideal liquid, hydroelasticity, modal analysis, stability of motion, frequency equation.

М. К. Дідок, Ю. М. Кононов

Динаміка та стійкість коливань циліндричного резервуара з ідеальною рідиною та пружними основами.

Розглянуто задачі про поступальні та обертальні коливання циліндричного резервуара з пружними основами, який повністю заповнено ідеальною нестисливою рідиною. На основі модального аналізу, початкові задачі динаміки твердого тіла та гідропружності зведено до злічених систем звичайних диференціальних рівнянь. Виведено вирази для приєднаної маси та приєданого моменту інерції рідини. Необхідні та достатні умови стійкості положення рівноваги механічної системи досліджено на основі аналізу частотних рівнянь і додатної визначеності потенціальної енергії. Вказано можливість стабілізації нестійкого положення рівноваги.

Ключові слова: тверде тіло, ідеальна рідина, гідропружність, модальний аналіз, стійкість руху, частотне рівняння.

Донецкий национальный ун-т
kononov_yuriy@telenet.dn.ua,
nick_di@rambler.ru

Получено 01.02.13