УДК 539.3

©2013. **О. В. Грабко**

ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ШОРСТКИХ ТІЛ

Запропоновано алгоритм чисельного розв'язання статичної просторової задачі про контакт пружних шорстких тіл при відсутності тертя між ними і заздалегідь невідомій поверхні контакту. Алгоритм заснований на зведенні задачі до нелінійного інтегрального рівняння, його дискретизації і використанні різних збіжних ітераційних процесів для отримання розв'язку дискретизованого рівняння. Наведено результати чисельного розв'язку задачі про вдавлювання гладкого параболічного штампа в пружний півпростір з шорсткою поверхнею.

Ключові слова: *пружне тіло, шорстка поверхня, контактна задача, чисельний розв'язок, ітераційний процес.*

1. Вступ. Використання нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактної взаємодії пружних тіл [1–7] дозволяє розробляти ефективні ітераційні методи розв'язання контактних задач і дає можливість позбутися основної трудності реалізації варіаційних методів, яка полягає в необхідності розглядати досить складні задачі нелінійного програмування. Основні та найбільш відомі з таких рівнянь [1, 3–5] є операторними рівняннями першого роду, для яких пошук ефективних ітераційних процесів отримання наближеного розв'язку є досить важким завданням. Нелінійні інтегральні рівняння, які використані в роботах [6, 7] для моделювання контактної взаємодії пружних шорстих тіл, є операторними рівняннями другого роду. Тому їх використання дозволяє розробити ефективні збіжні ітераційні процеси для отримання чисельного розв'язку контактних задач. Мета даної статті полягає в розробці алгоритму чисельного розв'язання контактної задачі, який базується на застосуванні цих ітераційних процесів.

2. Інтегральне рівняння контактної задачі. Розглянемо статичну просторову контактну задачу про взаємодію двох пружних тіл при відсутності тертя між ними і невідомій заздалегідь поверхні контакту. Будемо вважати, що взаємодіючі тіла мають шорсткі поверхні і можуть бути апроксимовані пружними півпросторами. При певних припущеннях [6, 7] ця контактна задача зводиться до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння [7]

$$p\left(s\right)=h\left(p\left(s\right)-E\left(f\left(p\left(s\right)\right)+A\left(p\right)\left(s\right)-\Delta\left(s\right)\right)\right)\,,\quad s\in\bar{\Omega}\,, \tag{1}$$

в якому невідома функція $p(s)$ відшукується в просторі $C\left(\bar{\Omega}\right)$ [8] і являє собою розподіл контактних тисків у заданій замкненій плоскій обмеженій області $\bar{\Omega}$, яка містить у собі невідому площинку контакту Ω_0. У рівнянні (1) E є довільна додатна константа, функція $\Delta(s)$ є елементом простору $C\left(\bar{\Omega}\right)$, і лінійний обмежений інтегральний оператор впливу $A: C\left(\bar{\Omega}\right)\to C\left(\bar{\Omega}\right)$ задається співвідношеннями:

$$A\left(p\right)\left(s\right)=\int_{\Omega}K\left(s,t\right)p\left(t\right)dt,\ \ s\in\Omega;\qquad K\left(s,t\right)=\frac{c}{\left|s-t\right|}, \tag{2}$$

де $|s-t|$ є відстань між точками s і t області $\bar{\Omega}$, $c = \left(1-\nu_1^2\right) \cdot (\pi E_1)^{-1} + \left(1-\nu_2^2\right) \cdot (\pi E_2)^{-1}$, параметри ν_1, ν_2, E_1, E_2 – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга взаємодіючих тіл. Функції $h(x)$ і $\Delta(s)$ у правій частині рівняння (1) задаються співвідношеннями:

$$h(x) = \frac{1}{2}(x+|x|) \quad \forall x \in R; \quad \Delta(s) = -\delta_0(s) + \Delta^* \ \ \forall s \in \Omega, \tag{3}$$

де R – множина всіх дійсних чисел, $\delta_0(s) \geq 0$ – зазор між тілами в момент їх початкового дотику, $\Delta^* > 0$ – жорстке зближення тіл. Нарешті, вираз $f(p(s))$ у рівнянні (1) задає змнання поверхневих мікронерівностей, що утворюють шорсткість. Будемо вважати, що функція $f(x)$ у цьому виразі є неперервною, строго зростаючою, непарною і необмеженою на всій дійсній числовій прямій. Отримання точного або наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння (1) пов'язане зі значними труднощами, головна з яких полягає в тому, що плоска поверхня контакту тіл є заздалегідь невідомою і може мати дуже складну конфігурацію. Тому для розв'язання даного рівняння доцільно використовувати числові методи.

3. Дискретизація інтегрального рівняння. Для дискретизації рівняння (1) введемо на загальній для тіл дотичній площині, яка проходить через точку їх початкового дотику, декартову систему координат з центром у цій точці. Задамо на цій площині область Ω у вигляді відкритого квадрата з площею d, обмеженого відрізками прямих, паралельних координатним осям вказаної системи. Далі для натурального числа m розіб'ємо область Ω на m^2 квадратних областей $\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, ..., \omega_{m^2}^{(m)}$ рівної площі, орієнтованих подібно квадрату Ω. Позначивши символом $\Omega^{(m)}$ об'єднання $\bigcup_{k=1}^{m^2} \omega_k^{(m)}$, наближений розв'язок рівняння (1) будемо відшукувати у лінійному нормованому просторі $\chi\left(\Omega^{(m)}\right)$ кусково постійних на $\Omega^{(m)}$ функцій, який визначається наступними співвідношеннями:

$$\chi\left(\Omega^{(m)}\right) = \left\{p(s) \in M\left(\Omega^{(m)}\right) \mid \exists c_1, c_2, ..., c_{m^2} \in R : p(s) = c_i \right.$$
$$\left. \forall s \in \omega_i^{(m)} \ \left(\forall i = \overline{1, m^2}\right)\right\}; \quad \|p(s)\| = \sup_{s \in \Omega^{(m)}} |p(s)| \quad \forall p(s) \in \chi\left(\Omega^{(m)}\right),$$

де $M\left(\Omega^{(m)}\right)$ є простір усіх обмежених на $\Omega^{(m)}$ функцій. Задамо оператор $A^{(m)} : \chi\left(\Omega^{(m)}\right) \to \chi\left(\Omega^{(m)}\right)$ і елемент $\Delta^{(m)}(s) \in \chi\left(\Omega^{(m)}\right)$ наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} A^{(m)}(p)(s) = \int_\Omega K^{(m)}(s,t)\, p(t)\, dt; \\ K^{(m)}(s,t) = \alpha_{ij}^{(m)}, \quad \text{якщо} \quad s \in \omega_i^{(m)} \quad \text{і} \quad t \in \omega_j^{(m)}; \\ \alpha_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \frac{c}{\left|s_i^{(m)} - s_j^{(m)}\right|}, & \text{якщо} \quad i \neq j; \\ \frac{cm^2}{d} \int_{\omega_i^{(m)}} \frac{dt}{\left|s_i^{(m)} - t\right|}, & \text{якщо} \quad i = j; \end{cases} \\ \Delta^{(m)}(s) = \Delta\left(s_i^{(m)}\right), \quad \text{якщо} \quad s \in \omega_i^{(m)}, \end{cases} \tag{4}$$

де символ $s_i^{(m)}$ тут і далі означатиме центр квадрата $\omega_i^{(m)}$. Ці співвідношення отримано з міркувань близькості функцій $K(s,t)$ та $K^{(m)}(s,t)$ у метриці простору

$L_1(\Omega\times\Omega)$ та близькості функцій $\Delta(s)$ і $\Delta^{(m)}(s)$ у метриці простору $L_1(\Omega)$ [8]. Замінюючи в рівнянні (1) оператор A на $A^{(m)}$ і функцію $\Delta(s)$ на $\Delta^{(m)}(s)$, отримаємо рівняння

$$p(s)=h\left(p(s)-E\left(f(p(s))+A^{(m)}(p)(s)-\Delta^{(m)}(s)\right)\right),\quad s\in\Omega^{(m)};\qquad(5)$$

розв'язок якого $p(s)$ будемо відшукувати в просторі $\chi\left(\Omega^{(m)}\right)$. Неважко переконатися, що для оператора $A^{(m)}$ і елемента $\Delta^{(m)}$, заданих рівностями (4), інтегральне рівняння (5) зводиться до наступної системи m^2 скалярних рівнянь з m^2 невідомими:

$$x_i=h\left(x_i-E\left(f(x_i)+\sum_{j=1}^{m^2}a_{ij}x_j-b_i\right)\right),\quad i=\overline{1,m^2}.\qquad(6)$$

Зв'язок між невідомими $x_1,x_2,...,x_{m^2}$ і функцією $p(s)\in\chi\left(\Omega^{(m)}\right)$, яка задовольняє рівняння (5), такий, що $p^{(m)}(s)=x_i$ для всіх $s\in\omega_i^{(m)}$. Параметри a_{ij} і b_i, що входять в систему (6), визначаються з наступних очевидних співвідношень:

$$a_{ij}=\alpha_{ij}^{(m)}\frac{d}{m^2},\quad b_i=\Delta\left(s_i^{(m)}\right);\quad i,j=\overline{1,m^2}.\qquad(7)$$

Таким чином, чисельне розв'язання інтегрального рівняння (1) зводиться до знаходження розв'язку системи скалярних рівнянь (6), для якої числові параметри a_{ij} і b_i, задаються рівностями (7).

4. Ітераційні процеси для розв'язання дискретизованого рівняння. Запишемо систему рівнянь (6) у вигляді:

$$x_i=h\left(x_i-E\left(f(x_i)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)\right),\quad i=\overline{1,n}.\qquad(8)$$

Будемо припускати, що матриця податливості $A=\{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ для системи взаємодіючих тіл є симетричною та додатно визначеною, тобто

$$a_{ij}=a_{ji}\quad\forall i,j=\overline{1,n};\quad (Ax,x)\geq\alpha'\cdot(x,x)\quad\forall x\in R^n,\qquad(9)$$

де $\alpha'>0$ – найменше власне значення матриці A і символ (x,y) позначає скалярний добуток елементів x, y n-вимірного евклідового простору R^n [8]. Будемо також вважати, що функція $f(x)$, яка задана на R, є неперервною, строго зростаючою, непарною і необмеженою на R. Тоді для наближеного знаходження розв'язку системи (8) можна використовувати один з ітераційних процесів:

$$\begin{cases}\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)\in R^n;\\ x_i^{(m)}=h\left(x_i^{(m-1)}-E\left(f\left(x_i^{(m-1)}\right)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(m-1)}-b_i\right)\right),\quad i=\overline{1,n};\\ m=1,\ 2,\ ...\ ;\end{cases}\qquad(10)$$

$$\begin{cases} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in R^n; \\ x_i^{(m)} = h\left(x_i^{(m-1)} - E\left(\tilde{f}\left(x_i^{(m-1)}\right) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(m-1)} - b_i\right)\right), \quad i = \overline{1,n}; \\ m = 1,\ 2,\ \dots\ ; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}; \\ x_i^{(m)} = h\left(x_i^{(m-1)} - E\left(f\left(x_i^{(m-1)}\right) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(m-1)} - b_i\right)\right), \quad i = \overline{1,n}; \\ m = 1,\ 2,\ \dots\ , \end{cases} \tag{12}$$

де $\tilde{f}(x)$ є допоміжною функцією, яка побудована за допомогою функції $f(x)$. Для забезпечення збіжності цих процесів будемо параметр E, що входить у праві частини рівностей (10)–(12), вибирати наступним чином:

$$0 < E < \frac{1}{L + \max\limits_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)}, \tag{13}$$

де значення невід'ємної константи L залежить від вигляду функції $f(x)$. З урахуванням усіх припущень можна довести наступні теореми про збіжність цих процесів.

Теорема 1. *Якщо для деякого додатного значення L функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in R, \tag{14}$$

то при виконанні нерівностей (13) ітераційний процес (10) збігається в просторі R^n до єдиного розв'язку системи рівнянь (8) для будь-якого початкового вектора $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in R^n$.

Доведення. Нехай стала E в системі рівнянь (8) та в співвідношеннях (10) задовольняє умову (13). Запишемо систему (8) в операторній формі:

$$x = \tilde{F}(x),$$

де оператор $\tilde{F} : R^n \to R^n$ задається співвідношеннями:

$$\tilde{F}(x) = H(x - E \cdot (F(x) + A \cdot x - b)), \qquad F(x) = (f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)),$$

$$H(x) = (h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n)),$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Доведемо, що оператор $\tilde{F} : R^n \to R^n$ є стискуючим на всьому R^n. Це означатиме існування та єдиність розв'язку системи рівнянь (8) у R^n, а також збіжність до цього розв'язку ітераційного процесу (10) (згідно з принципом стискуючих відображень [8]).

Для довільних елементів $x, y \in R^n$ можна з урахуванням (14) отримати оцінки

$$\left\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\right\| \le \|(I - E \cdot A)(x - y) - E \cdot (F(x) - F(y))\| =$$

$$= \|(I - E\cdot A)(x-y) - E\cdot B_{xy}\cdot(x-y)\| = \|(I - E\cdot(B_{xy}+A))(x-y)\| \le$$
$$\le \|(I - E\cdot(B_{xy}+A))\|_* \cdot \|x-y\|,$$

в яких діагональна матриця B_{xy} містить на головній діагоналі числа з відрізку $[0, L]$; I – одинична матриця; символами $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_*$ позначено евклідову норму вектора та спектральну норму матриці [10].

Для матриці $(B_{xy} + A)$ є справедливими очевидні оцінки

$$\|B_{xy}+A\|_* \le \|B_{xy}\|_* + \|A\|_* \le L + \|A\|_* \le L + \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right),$$

з яких внаслідок (13) випливає, що симетрична матриця $(I - E\cdot(B_{xy}+A))$ є невід'ємно визначеною [10]. Тому оцінюючи норму такої матриці, отримаємо співвідношення [6, 10]:

$$\|I - E\cdot(B_{xy}+A)\|_* = \sup_{\|z\|=1}(z - E\cdot(B_{xy}\cdot z + A\cdot z), z) =$$
$$= \sup_{\|z\|=1}(1 - E\cdot(B_{xy}\cdot z, z) - E\cdot(A\cdot z, z)) \le \sup_{\|z\|=1}(1 - E\cdot(A\cdot z, z)) \le$$
$$\le \sup_{\|z\|=1}\left(1 - E\cdot\alpha'\right) = 1 - E\cdot\alpha' < 1,$$

де символом (z', z) позначено скалярний добуток елементів $z', z \in R^n$. З цих співвідношень та отриманих вище оцінок випливає нерівність

$$\left\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\right\| \le \left(1 - E\cdot\alpha'\right)\cdot\|x-y\|,$$

яку можна довести для кожних елементів x, y простору R^n. Таким чином, оператор $\tilde{F}: R^n \to R^n$ є стискуючим на R^n.

Теорема 1 доведена. □

Теорема 2. *Нехай функція $f(x)$ є неперервно диференційовною на інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ і хоча б одне із значень $b_1, b_2, ..., b_n$ є строго додатним. Нехай числа a, b, L і функція $\tilde{f}(x)$ визначаються співвідношеннями:*

$$0 < a \le \min_{1\le i\le n;\ x_i^*>0}(x_i^*)\ ;\quad b \ge \max_{1\le i\le n}(x_i^*)\ ;$$

$$L = \max(L_1, f(a)/a)\ ;\quad L_1 = \max_{x\in[a,b]}\left(|f'(x)|\right)\ ;$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (f(a)/a)\cdot x, & \textit{якщо}\quad |x| \le a; \\ f(x), & \textit{якщо}\quad a < |x| \le b; \\ f'(b)\cdot x + \mathrm{sign}(x)\cdot[f(b) - f'(b)\cdot b], & \textit{якщо}\quad |x| > b; \end{cases}$$

де $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ є розв'язок системи рівнянь (8). Тоді при виконанні нерівностей (13) ітераційний процес (11) збігається в просторі R^n до единого розв'язку системи рівнянь (8).

Доведення. Відмітимо, що із додатної означеності симетричної матриці A та неперервності, строгої зростаючості, непарності і необмеженості функції $f(x)$ на R випливає, що система рівнянь (8) має єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ у просторі R^n [9]. Тому використання цього розв'язку для побудови функції $\tilde{f}(x)$ є цілком зрозумілим.

Очевидно, що функція $\tilde{f}(x)$ за своєю побудовою задовольняє на R умову Ліпшиця

$$\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| \le L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in R$$

і, крім того, є неперервною, строго зростаючою, непарною та необмеженою на R (тобто $\tilde{f}(x)$ задовольняє всі умови, які покладені на $f(x)$ у теоремі 1). Тому з теореми 1 випливає, що при виконанні умови (13) ітераційний процес (11) збігається в R^n до єдиного розв'язку $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ наступної системи рівнянь:

$$x_i = h\left(x_i - E\left(\tilde{f}(x_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)\right), \quad i = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Оскільки $\tilde{f}(x_i^*) = f(x_i^*)$ для кожного i, то елемент $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, який задовольняє систему рівнянь (8), буде також задовольняти і систему рівнянь (15). Але система (15), як і система (8), має єдиний розв'язок у R^n. Тому $\tilde{X} = X^*$ і ітераційний процес (11) збігається в R^n до розв'язку системи рівнянь (8).

Теорема 2 доведена. □

Теорема 3. *Нехай для деякого додатного значення L функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [-\delta, \delta],$$

де $\delta = \frac{1}{\alpha'}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ і α' є найменше власне значення матриці A. Тоді при виконанні нерівностей (13) ітераційний процес (12) збігається в просторі R^n до єдиного розв'язку системи рівнянь (8).

Доведення теореми 3 наведено в роботі [9].

Теорема 4. *Нехай функція $f(x)$ є неперервно диференційовною на всій дійсній числовій прямій R і стала L задана співвідношеннями*

$$L = \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left|f'(x)\right|,$$

де $\delta = \frac{1}{\alpha'}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ та α' є найменше власне значення матриці A. Тоді при виконанні нерівностей (13) ітераційний процес (12) збігається в просторі R^n до єдиного розв'язку системи рівнянь (8).

Доведення. Згідно теореми Лагранжа про середнє значення, функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [-\delta, \delta],$$

де $L = \max\limits_{x\in[-\delta,\delta]} |f'(x)|$. Таким чином, з теореми 3 випливає, що при виконанні нерівностей (13) ітераційний процес (12) збігається в R^n до єдиного розв'язку системи рівнянь (8).

Теорема 4 доведена. □

Відмітимо, що при використанні, наприклад, степеневого закону зім'яття мікронерівностей [2]

$$f(x) = \alpha_0 \cdot sign(x) \cdot (|x|)^K \tag{16}$$

наведені теореми дозволяють отримувати наближений розв'язок контактної задачі для випадку $0 < K < 1$ (теорема 2), для випадку $K = 1$ (теорема 1) і для випадку $K > 1$ (теореми 3 і 4).

5. Чисельні результати. З метою апробації запропонованого алгоритму були отримані чисельні розв'язки контактної задачі про вдавлювання силою $P = 36054$ Н гладкого параболічного штампу в пружний півпростір з шорсткою поверхнею (таке значення P отримано за результатами чисельного розв'язання задачі при $\Delta^* = 1,85\cdot 10^{-4}$м). Початковий зазор $\delta_0(x,y)$ між взаємодіючими тілами заданий співвідношенням

$$\delta_0(x,y) = x^2/2R_0 + y^2/2R_0, \quad (x,y) \in \Omega,$$

в якому $R_0 = 0,05$ м. Коефіцієнт Пуассона ν_2 і модуль Юнга E_2 півпростору прийняті рівними 0,3 і 210000 МПа, відповідно. Функція $f(x)$, за допомогою якої враховується шорсткість, задана співвідношенням (16), в якому $K = 0,4$, $\alpha = 1,7\cdot 10^{-7.8}$м/(Па)$^{0.4}$. Чисельний розв'язок задачі побудовано на сітці, що складається з $51\times 51 = 2601$ квадратного граничного елемента, площа d_1 кожного з яких дорівнює $4\cdot 10^{-8}$м^2 ($n = 51$, $d = 104,04\cdot 10^{-6}$м^2). Числові параметри a_{ij} і b_i, що входять в систему (8), обчислювалися за формулами (4), (7). Для отримання результатів використовувався ітераційний процес (10), в якому значення E задовольняло умову (13). Значення константи L, що входить в (13), знаходилося на основі чисельного експерименту. Воно вибиралося як найменше з усіх можливих значень, що задовольняють нерівність $L \geq \alpha_0 \cdot K \cdot \left(x_0\cdot 10^{-3}\right)^{K-1}$ при $x_0 = 10^8$ Па.

Позначивши через b половину довжини сторони квадрата Ω ($b = 0,005$ м), знайдемо значення безрозмірних параметрів A_0, A, P, δ, r_0 з наступних співвідношень [2]:

$$A_0 = \frac{b}{2R}; \quad A = \frac{\alpha(2\pi\theta)^K}{b}; \quad P_0 = \frac{P}{2\pi\theta b^2}; \quad \delta = \frac{\Delta^*}{b}; \quad r_0 = \frac{a}{b},$$

де $K = 0,4$, $\theta = E_2/\left(2\left(1-\nu_2^2\right)\right)$, $a = 0,004$ м – радіус контактної плями, знайдений за результатами чисельного розв'язання задачі. Ці значення такі: $A_0 = 0,05$; $A = 0,3$; $P_0 = 0,00199$; $\delta = 0,037$; $r_0 = 0,8$. У роботі [2] наведено результати розв'язання розглянутої контактної задачі для випадку $A_0 = 0,05$; $A = 0,3$; $\delta = 0,037$; $P_0 = 0,00199$, який і був обраний для апробації запропонованого алгоритму. Отримане в [2] значення r_0 становить 0,82, що дуже добре відповідає розрахунковому значенню 0,8. Таким чином, відносна похибка у визначенні радіуса контактної плями складає приблизно 2,5%. Для більш повного аналізу отриманих чисельних результатів проведено співставлення знайденого розподілу безрозмірної величини $q\left(\frac{x}{b},\frac{y}{b}\right) = p\left(x,y\right)/\left(2\pi\theta\right)$ при $y=0,\ 0 \le (x/b) \le 1$ з аналогічним розподілом, представленим у роботі [2]. Отримані дані показано в таблиці 1, де у першому рядку записано значення функції $q\left(r,0\right) \times 10^3$, які наведені в [2], а у другому рядку – значення цієї функції, знайдені за результатами чисельного розв'язку.

Таблиця 1. Результати розв'язання задачі про контакт параболічного штампа і пружного півпростору

r	0	0.08	0.16	0.24	0.32	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8	0.82
1	2.760	2.709	2.623	2.501	2.280	1.931	1.411	0.849	0.466	0.169	0.021	0.001
2	2.938	2.881	2.715	2.461	2.132	1.738	1.241	0.767	0.382	0.116	0.005	0

Аналіз залежностей $q\left(r,0\right)$, показаних у таблиці 1, свідчить про їхню добру відповідність. Найбільше взаємне ухилення порівнюваних функцій не перевищує 7% по відношенню до найбільшого значення $q\left(0,0\right)$, зазначеного в роботі [2].

6. Висновки. Запропонований алгоритм дозволяє отримувати чисельний розв'язок просторової статичної контактної задачі про взаємодію пружних шорстких тіл при відсутності тертя між ними і заздалегідь невідомій поверхні контакту. Аналіз наведених чисельних результатів свідчить про те, що розроблений алгоритм можна застосовувати до розв'язання задач розглянутого класу.

1. *Александров В.М.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В.М. Александров, J.J. Kalker, Д.А. Пожарский // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 51–55.
2. *Александров В.М.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 3. – С. 516–527.
3. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галанов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 5. – С. 827–835.
4. *Галанов Б.А.* Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости / Б.А. Галанов // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 296, № 4. – С. 812–815.
5. *Пожарский Д.А.* О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта / Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, вып. 5. – С. 812–818.
6. *Александров А.И.* Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / Александров А.И. – Днепропетровск.: Ин-т технической механики АН УССР, 1989. – 74 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т технической механики; 89-2).
7. *Александров А.И.* Теоремы существования решения для контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности / А.И. Александров, Е.В. Грабко // Вісник Запорізьк. ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. – 2010. – № 1. – С. 11–17.
8. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
9. *Александров А.И.* Алгоритм численного решения пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности / А.И. Александров, Е.В. Грабко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 17. – С. 23–34.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

O. V. Grabko

Iteration processes for solution of the static contact problem for the elastic rough bodies.

The algorithm of the numerical solution of the static three-dimensional frictionless problem, connected with the interaction between the elastic rough bodies, where possible unknown contact surface, has been proposed. Algorithm consists of the reduce problem into the nonlinear integral equation, discretization of it and the use of different convergent iteration processes for the obtain solution of the discretized equation. The numerical results for a problem on indentation of the rigid parabolic in the elastic half-space with the rough surface are demonstrated.

Keywords: *elastic body, rough surface, contact problem, numerical solution, iteration process.*

Е. В. Грабко

Итерационные процессы для решения статической задачи о контакте упругих шероховатых тел.

Предложен алгоритм численного решения статической пространственной задачи о контакте упругих шероховатых тел при отсутствии трения между ними и заранее неизвестной поверхности контакта. Алгоритм основан на сведении задачи к нелинейному интегральному уравнению, его дискретизации и использовании различных сходящихся итерационных процессов для получения решения дискретизированного уравнения. Приведены результаты численного решения задачи о вдавливании гладкого параболического штампа в упругое полупространство с шероховатой поверхностью.

Ключевые слова: *упругое тело, шероховатая поверхность, контактная задача, численное решение, итерационный процесс.*

Запорожский национальный ун-т
`elenagrabko@rambler.ru`

Получено 14.10.13