УДК 517.5

©2013. **В. С. Василянская, Вит. В. Волчков**

ТЕОРЕМА ТИПА ВИНЕРА–ПЭЛИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучаются аналоги сферического преобразования на гиперболической плоскости. Для указанного преобразования получена формула обращения и доказана теорема типа Винера–Пэли.

Ключевые слова: *сферическое преобразование, формула обращения, теорема Винера–Пэли.*

1. Введение. Классическая теорема Винера–Пэли утверждает (см. [1, гл. 3]), что образ пространства функций из $L^2(\mathbb{R})$ с носителем на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ под действием преобразования Фурье совпадает с классом функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, допускающих аналитическое продолжение на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с оценкой

$$|f(z)| \le ce^{\sigma|\mathrm{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где константа $c > 0$ не зависит от z. Благодаря своему универсальному характеру и многочисленным приложениям, этот результат приобрел большую известность и получил дальнейшее развитие в ряде работ. Были получены его аналоги для различных интегральных преобразований на группах, однородных пространствах, гиперкомплексных системах и других структурах (см., например, [2]–[4]).

В недавней работе [5] начато изучение свойств решений уравнений вида

$$(f_1 \overset{s}{\times} f_2)(z) := \int\limits_G f_1(go)\, f_2(g^{-1}z) \left(\frac{1 - z\cdot\overline{go}}{1-\overline{z}\cdot go}\right)^s dg = 0, \tag{1}$$

где f_1, f_2 – функции на единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, G – группа конформных автоморфизмов $\mathbb{D}$, dg – мера Хаара на G, $s \in \mathbb{Z}$. При $s = 0$ левая часть в (1) дает свёртку функций f_1 и f_2 на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ (см. [2, введение, § 4, п. 3]). В общей ситуации (1) можно рассматривать как аналог искаженного уравнения свёртки на фазовом пространстве группы Гейзенберга [4, глава 12]. Теория уравнений свёртки на областях в $\mathbb{H}^2$ развита в [6, часть 2], [4, главы 15, 20], [7, часть 2]. Случай произвольного s остается неисследованным. Для описаний решений (1) и ряда других вопросов, связанных с указанным уравнением, важно иметь преобразование, хорошо приспособленное к свёрточной структуре в (1). В данной работе вводится такое преобразование и изучаются его свойства. В частности, получена формула обращения и доказана теорема типа Винера–Пэли.

2. Формулировки основных результатов. Пусть $\mathbb{H}^2$ – вещественная гиперболическая плоскость постоянной секционной кривизны -4, реализованная в виде единичного круга $\mathbb{D}$ с римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

(см. [2, введение, § 4, п. 1]). Расстояние между точками $z, w \in \mathbb{H}^2$ вычисляется по формуле

$$d(z,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\overline{z}w| + |z-w|}{|1-\overline{z}w| - |z-w|}.$$

Открытым (соответственно, замкнутым) шаром радиуса r на $\mathbb{H}^2$ с центром в нуле является евклидов круг $B_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \mathrm{th} r\}$ (соответственно, круг $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq \mathrm{th} r\}$). Риманова мера на $\mathbb{H}^2$ имеет вид

$$d\mu(z) = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}.$$

Оператор Лапласа-Бельтрами действует по правилу

$$(\mathrm{L}f)(z) = 4(1-|z|^2)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial\overline{z}}.$$

Нам потребуются следующие классы функций в $\mathbb{D}$: $C_c(\mathbb{D})$ – совокупность непрерывных функций с компактным носителем; $C_c^m(\mathbb{D}) = C^m(\mathbb{D}) \cap C_c(\mathbb{D})$, $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$; $C^{m,\kappa}(\mathbb{D}) = \{f \in C^m(\mathbb{D}) : f = f^\kappa\}$, где

$$f^\kappa(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z\,e^{-i\alpha})\,e^{i\kappa\alpha}d\alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z};$$

$C_c^{m,\kappa}(\mathbb{D}) = C^{m,\kappa}(\mathbb{D}) \cap C_c(\mathbb{D})$. Отметим, что $f^\kappa(z) = f_\kappa(\rho)\,e^{i\kappa\varphi}$, где ρ, φ – полярные координаты точки z,

$$f_\kappa(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\,e^{i\varphi})\,e^{-i\kappa\varphi}d\varphi.$$

Поэтому $C^{m,\kappa}(\mathbb{D})$ совпадает с классом C^m-функций вида $h(\rho)\,e^{i\kappa\varphi}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{1-i\lambda}{2}$,

$$H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) = \rho^{|\kappa|}(1-\rho^2)^\nu F\left(\nu + s + \frac{|\kappa|-\kappa}{2},\, \nu - s + \frac{|\kappa|+\kappa}{2};\, |\kappa|+1;\, \rho^2\right),$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса. Для $f(z) = f_\kappa(\rho)\,e^{i\kappa\varphi} \in C_c(\mathbb{D})$ положим

$$\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda) = 2\pi\int_0^1 \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\,f_\kappa(\rho)\,H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\,d\rho. \tag{2}$$

Из равенства

$$H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) = \rho^{|\kappa|}(1-\rho^2)^{\frac{\kappa-|\kappa|}{2}-s} F\left(s+\frac{|\kappa|-\kappa}{2}+\nu(\lambda),\, s+\frac{|\kappa|-\kappa}{2}+\nu(-\lambda);\, |\kappa|+1; \frac{\rho^2}{\rho^2-1}\right)$$

(см. [8, формула 2.9(3)]) видно, что $\mathcal{F}^\kappa_s(f)$ – четная целая функция переменной λ. При $s=\kappa=0$ она является сферическим преобразованием $\widetilde{f}$ функции f на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ (см. [2, введение, § 4, п. 2]).

Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq -1,-2,...,$

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha-\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha+\beta+1}{2}\right)}.$$

Применение формулы Стирлинга [8, п. 1.18(2)] показывает, что для любого $r>0$ существует $C_r>0$ такое, что

$$|c_{\alpha,\beta}(-\lambda)|^{-1}\leq C_r(1+|\lambda|)^{\,\mathrm{Re}\alpha+\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

если $\mathrm{Im}\lambda\geq 0$ и $c_{\alpha,\beta}(-\mu)\neq 0$ в круге $|\mu-\lambda|\leq r$. При определенных значениях параметров α,β функция $c_{\alpha,\beta}(\lambda)$ совпадает с известной функцией Хариш–Чандры для римановых симметрических пространств ранга один (см. [2, гл. 4]). Нас будет интересовать случай, когда $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $\beta\in\mathbb{Z}$. Если $|\beta|>\alpha+1$, то функция $(c_{\alpha,\beta}(-\lambda))^{-1}$ имеет только простые полюсы в верхней полуплоскости, расположенные в конечном множестве

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta} = \{i(|\beta|-\alpha-1-2m):\, m\in\mathbb{Z}_+,\, |\beta|-\alpha-1-2m>0\}.$$

Обозначим

$$r_{\alpha,\beta}(\lambda) = -i\operatorname*{res}_{z=\lambda}(c_{\alpha,\beta}(z)\,c_{\alpha,\beta}(-z))^{-1}, \quad \lambda\in\mathcal{P}_{\alpha,\beta}.$$

Если $|\beta|\leq\alpha+1$, то $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}=\varnothing$. Встречающиеся ниже суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю.

Теорема 1. *Пусть* $f\in C^{3,\kappa}_c(\mathbb{D})$, $\alpha=|\kappa|$, $\beta=2s-\kappa$. *Тогда*

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \frac{4^{\alpha+\beta}}{\pi^2}\int_0^\infty \mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)\,|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}d\lambda + \\ & + \frac{2^{2\alpha+2\beta+1}}{\pi}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{\alpha,\beta}} r_{\alpha,\beta}(\lambda)\,\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z), \quad z\in\mathbb{D}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z) = H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{i\kappa\varphi}$.

Теорема 2.

(i) Пусть $f\in C^{\infty,\kappa}_c(\mathbb{D})$ *и* $\mathrm{supp} f\subset\overline{B}_r$. *Тогда для любого* $N\in\mathbb{Z}_+$ *существует константа* $c_N>0$ *такая, что*

$$|\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)|\leq c_N\frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{(1+|\lambda|)^N}, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

(ii) *Пусть четная целая функция $w(\lambda)$ удовлетворяет оценке вида* (5) *при некотором $r > 0$ и всех $N \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует функция $f \in C_c^{\infty,\kappa}(\mathbb{D})$ с носителем в $\overline{B}_r$ такая, что $\mathcal{F}_s^{\kappa}(f) = w$.*

Теоремы 1 и 2 являются аналогами соответственно формулы обращения и теоремы Винера–Пэли для сферического преобразования на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ (см. [2, введение, § 4, п. 2]). Относительно других результатов такого типа см., например, [2]–[4].

3. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $C^{\infty}_{even}(-a,a)$ множество четных бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(-a,a)$.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^{\infty,\kappa}(\mathbb{D})$. Тогда существует функция $g_\kappa \in C^{\infty}_{even}(-1,1)$ такая, что $f(x) = x^{|\kappa|} g_\kappa(x),\ x \in (-1,1)$.*

Доказательство. Случай $\kappa = 0$ является тривиальным. Докажем, что если требуемое утверждение верно при некотором $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, то оно верно и для $\kappa+1$. Пусть $f(z) = f_{\kappa+1}(\rho)\, e^{i(\kappa+1)\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{D})$. Тогда $f|_{(-1,1)} \in C^{\infty}(-1,1)$. Предположим

$$f(x) = x^m g_{m,\kappa}(x) \quad \text{на} \quad (-1,1), \tag{6}$$

где $m \in \{0,...,\kappa\}$, $g_{m,\kappa} \in C^{\infty}(-1,1)$. Получим такое же представление для $m+1$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\rho\, e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(f'_{\kappa+1}(\rho) + (\kappa+1)\frac{f_{\kappa+1}(\rho)}{\rho}\right) e^{i\kappa\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{D}).$$

По предположению внешней индукции заключаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x) = x^{\kappa} G_\kappa(x) = x^m h_{\kappa,m}(x), \quad x \in (-1,1),$$

где $G_\kappa,\ h_{\kappa,m} \in C^{\infty}(-1,1)$. Отсюда

$$xf'(x) + (\kappa+1)f(x) = 2x^{m+1}h_{\kappa,m}(x), \quad x \in (-1,1), \tag{7}$$

поскольку $f(-x) = (-1)^{\kappa+1}f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(-x) = (-1)^{\kappa}\frac{\partial f}{\partial z}(x)$. С другой стороны, из (6) находим

$$xf'(x) = mf(x) + x^{m+1}g'_{m,\kappa}(x). \tag{8}$$

Комбинируя (7) с (8), приходим к равенству

$$f(x) = x^{m+1}\frac{2h_{\kappa,m}(x) - g'_{m,\kappa}(x)}{\kappa+m+1}.$$

Это завершает доказательство для $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Случай $\kappa < 0$ следует теперь переходом к комплексно сопряженной функции. □

Лемма 2. *Пусть $\Phi \in C^{\infty}_{even}(\mathbb{R}^1)$ и $f(z) = \Phi(d(0,z))$. Тогда $f \in C^{\infty}(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Можно считать, что f имеет компактный носитель. Имеем

$$\widetilde{f}(\lambda) = \pi\int_0^{\infty}\Phi(t)F(\nu(\lambda),\, \nu(-\lambda);\, 1; -\mathrm{sh}^2 t)\,\mathrm{sh}(2t)\,dt.$$

Отсюда и из [3, теорема 2.1] следует, что четная целая функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет оценке вида (5) для любого $N \in \mathbb{Z}_+$. Используя теперь [2, ведение, § 4, п. 2, формула (32)], получаем требуемое утверждение. □

Введем дифференциальные операторы D_κ и d_κ, действующие на функцию $h \in C^1(0,1)$ по правилам:

$$\begin{aligned} (D_\kappa h)(\rho) &= \rho^\kappa (1-\rho^2)^{s-\kappa+1} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{h(\rho)}{\rho^\kappa (1-\rho^2)^{s-\kappa}}\right), \\ (d_\kappa h)(\rho) &= \frac{(1-\rho^2)^{\kappa-s+1}}{\rho^\kappa} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^\kappa h(\rho)}{(1-\rho^2)^{\kappa-s}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть $f \in C^{m,\kappa}(\mathbb{D})$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда функции $(D_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa+1)\varphi}$ и $(d_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa-1)\varphi}$ принадлежат $C^{m-1}(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Простые вычисления показывают, что

$$(D_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa+1)\varphi} + (d_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa-1)\varphi} = u(z),$$

где

$$u(z) = 2(1-z^2)\frac{\partial f}{\partial z} + 2(1-\overline{z}^2)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + 2s(z-\overline{z})f(z) \in C^{m-1}(\mathbb{D}).$$

Теперь требуемое утверждение следует из равенств:

$$(D_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa+1)\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z\, e^{-i\alpha})\, e^{i(\kappa+1)\alpha}\, d\alpha,$$

$$(d_\kappa f_\kappa)(\rho)\, e^{i(\kappa-1)\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z\, e^{-i\alpha})\, e^{i(\kappa-1)\alpha}\, d\alpha.$$

□

Лемма 4. *Имеют место равенства:*

$$D_\kappa H^s_{\lambda,\kappa} = c_{\kappa,\lambda} H^s_{\lambda,\kappa+1}, \quad d_\kappa H^s_{\lambda,\kappa} = \gamma_{\kappa,\lambda} H^s_{\lambda,\kappa-1}, \tag{10}$$

где

$$c_{\kappa,\lambda} = \begin{cases} \frac{2(\nu-s+\kappa)(\nu+s-\kappa-1)}{\kappa+1}, & \kappa \geq 0 \\ -2\kappa, & \kappa < 0 \end{cases}, \gamma_{\kappa,\lambda} = \begin{cases} 2\kappa, & \kappa > 0 \\ \frac{2(\nu+s-\kappa)(1-\nu+s-\kappa)}{\kappa-1}, & \kappa \leq 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно (9),

$$D_\kappa H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) = 2\,\rho^{\kappa+1}(1-\rho^2)^{s-\kappa+1}\, h'(\rho^2), \tag{12}$$

где

$$h(t) = t^{\frac{|\kappa|-\kappa}{2}}(1-t)^{\nu+\kappa-s}F\left(\nu+s+\frac{|\kappa|-\kappa}{2},\, \nu-s+\frac{|\kappa|+\kappa}{2};\, |\kappa|+1;\, t\right).$$

Используя [8, формулы 2.8(25), 2.8(26)], находим

$$h'(t) = \frac{c_{\kappa,\lambda}}{2}(1-t)^{\nu-s+\kappa-1}F\left(\nu-s+\kappa+1,\, \nu+s;\, \kappa+2;\, t\right), \tag{13}$$

если $\kappa \geq 0$, и

$$h'(t) = \frac{c_{\kappa,\lambda}}{2}t^{-\kappa-1}(1-t)^{\nu-s+\kappa-1}F\left(\nu+s-\kappa-1,\, \nu-s;\, -\kappa;\, t\right), \tag{14}$$

если $\kappa < 0$. Из (12)–(14) получаем первое равенство в (10). Второе равенство доказывается аналогично. $\square$

Следствие 1. *Пусть*

$$\mathfrak{L}_s = (1-|z|^2)^2\triangle - 4s(1-|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - 4s^2|z|^2 Id,$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа на $\mathbb{C}$, Id – тождественный оператор. Тогда

$$\mathfrak{L}_s\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa} = -(\lambda^2+4s^2+1)\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}. \tag{15}$$

Доказательство. Действие $\mathfrak{L}_s$ на функции вида $h(\rho)\,e^{i\kappa\varphi}$ осуществляется по правилу

$$\mathfrak{L}_s(h(\rho)\,e^{i\kappa\varphi}) = ((d_{\kappa+1}D_\kappa h)(\rho) + 4(\kappa^2+\kappa(1-2s)-s)h(\rho))\,e^{i\kappa\varphi}.$$

Поэтому (15) вытекает из (10) и (11). $\square$

Лемма 5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\max_{z\in\overline{B}_r}\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(z)\right| \leq \frac{c\,e^{r|\mathrm{Im}\,\lambda|}}{(1+|\lambda|)^{|\kappa|-\alpha-\beta}}, \tag{16}$$

где $c > 0$ не зависит от λ.

Доказательство. При $|z| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ имеем

$$e^{-2\,\mathrm{arth}|z|} = \frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} = e^{2\,\mathrm{arth}|z|}.$$

Отсюда

$$\left|\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^\nu\right| = \left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Im}\lambda} \leq e^{(1+|\mathrm{Im}\,\lambda|)\,\mathrm{arth}|z|}.$$

Из этой оценки и интегрального представления

$$c_{\nu,\kappa,s}\,\mathcal{H}^s_{\lambda,\kappa}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\nu}\left(\frac{1-z\,e^{-i\theta}}{1-\overline{z}\,e^{i\theta}}\right)^{s}e^{i\kappa\theta}\,d\theta, \tag{17}$$

где

$$c_{\nu,\kappa,s}=\begin{cases}\frac{\Gamma(\kappa+\nu-s)}{\kappa!\,\Gamma(\nu-s)}, & \kappa\geq 0\\ \frac{\Gamma(\nu+s-\kappa)}{(-\kappa)!\,\Gamma(\nu+s)}, & \kappa<0\end{cases}$$

(см. [9, доказательство теоремы 1]), заключаем, что (16) выполнено при $\alpha=\beta=0$. Применяя к (17) оператор $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}$ и используя формулу Лейбница, аналогично получаем (16) в общем случае. □

Обозначим через $[x]$ (соответственно, $\{x\}$) целую (дробную) часть числа $x\in\mathbb{R}$.

Лемма 6. *Пусть* $f\in C_c^{m,\kappa}(\mathbb{D})$. *Тогда*

$$\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)=\frac{(-1)^m 2\,\pi}{(4(\nu+\kappa-s)(\nu+s-\kappa-1))^{[m/2]}\,\gamma^{2\{m/2\}}_{\kappa+1,\lambda}}\cdot$$
$$\cdot\int\limits_0^1\frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\left(D^{2\{m/2\}}_\kappa(d_{\kappa+1}D_\kappa)^{[m/2]}f_\kappa\right)(\rho)\,H^s_{\lambda,\kappa+2\{m/2\}}(\rho)\,d\rho. \tag{18}$$

В частности, если m – чётно, то

$$\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)=\frac{1}{(4(\nu+\kappa-s)(\nu+s-\kappa-1))^{m/2}}\,\mathcal{F}^\kappa_s\left((d_{\kappa+1}D_\kappa)^{m/2}f_\kappa(\rho)e^{i\kappa\varphi}\right)(\lambda). \tag{19}$$

Кроме того,

$$|\mathcal{F}^\kappa_s(f)(\lambda)|\leq c\,\frac{e^{r(f)|\mathrm{Im}\lambda|}}{(1+|\lambda|)^{m+|\kappa|}},\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{20}$$

где константа $c>0$ *не зависит от* λ *и* $r(f)=\inf\{r>0:\mathrm{supp}f\subset B_r\}$.

Доказательство. Равенство (18) получается из определения $\mathcal{F}^\kappa_s(f)$ интегрированием по частям с использованием (10), (11) и леммы 3. Равенство (19) является очевидным следствием (18). Наконец, прямая оценка интеграла в (18) с учетом (16) и (11), приводит к (20). □

Лемма 7. *Пусть* $f_1\in C_c^{0,\kappa}(\mathbb{D})$, $f_2\in C_c^{0,0}(\mathbb{D})$. *Тогда*

$$\mathcal{F}^\kappa_s(f_1\overset{s}{\times}f_2)=\mathcal{F}^\kappa_s(f_1)\,\mathcal{F}^0_s(f_2). \tag{21}$$

Доказательство. Для краткости, положим

$$\langle f,\psi\rangle=\int\limits_{\mathbb{D}}f(z)\psi(z)\,d\mu(z),\quad f\in C_c(\mathbb{D}),\ \psi\in C(\mathbb{D}).$$

Тогда

$$\mathcal{F}_s^\kappa(f_1 \overset{s}{\times} f_2)(\lambda) = \langle f_1 \overset{s}{\times} f_2, H_{\lambda,\kappa}^s(\rho)e^{-i\kappa\varphi}\rangle = \langle f_1, (H_{\lambda,\kappa}^s(\rho)e^{-i\kappa\varphi}) \overset{-s}{\times} f_2\rangle. \tag{22}$$

Учитывая, что $H_{\lambda,\kappa}^s = H_{\lambda,-\kappa}^{-s}$, из (15), (22) и [5, теорема 1] имеем

$$\mathcal{F}_s^\kappa(f_1 \overset{s}{\times} f_2)(\lambda) = \langle f_1, \mathcal{F}_{-s}^0(f_2)(\lambda)\, H_{\lambda,\kappa}^s(\rho)e^{-i\kappa\varphi}\rangle = \mathcal{F}_s^\kappa(f_1)(\lambda)\, \mathcal{F}_{-s}^0(f_2)(\lambda).$$

Осталось заметить, что

$$\mathcal{F}_{-s}^0(f_2)(\lambda) = \langle f_2, H_{\lambda,0}^{-s}\rangle = \langle f_2, H_{\lambda,0}^s\rangle = \mathcal{F}_s^0(f_2)(\lambda).$$

□

4. Доказательство теорем 1, 2. Пусть $\alpha = |\kappa|$, $\beta = 2s - \kappa$,

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}; \alpha+1; -\mathrm{sh}^2 t\right),$$

$$\triangle_{\alpha,\beta}(t) = (2\,\mathrm{sh}t)^{2\alpha+1}\,(2\,\mathrm{ch}t)^{2\beta+1}, \quad t > 0.$$

Равенство (2) можно записать в виде

$$\mathcal{F}_s^\kappa(f)(\lambda) = \int\limits_0^\infty \Phi(t)\,\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\triangle_{\alpha,\beta}(t)\,dt,$$

где

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{2^{2(\alpha+\beta+1)}}\,\frac{f(\mathrm{th}t)}{(\mathrm{th}t)^\alpha(\mathrm{ch}t)^{\alpha+\beta}}.$$

Теперь теорема 2 следует из [3, теорема 2.1] и лемм 1, 2.

Далее, используя [3, теорема 2.3] и лемму 1, получаем (4) для $f \in C_c^{\infty,\kappa}(\mathbb{D})$. В общем случае обозначим $f^*(z)$ правую часть в (4) (см. (20), (16), (3)). Тогда взяв "s" – свёртку f^* с «шапочкой» ω_ε на $\mathbb{H}^2$, по теореме о среднем [5] имеем

$$\begin{aligned}(f^* \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon)(z) = &\frac{4^{\alpha+\beta}}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}_s^\kappa(f)(\lambda)\,\mathcal{F}_s^0(\omega_\varepsilon)(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z)|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}d\lambda + \\ &+\frac{2^{2(\alpha+\beta)+1}}{\pi}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{\alpha,\beta}} r_{\alpha,\beta}(\lambda)\,\mathcal{F}_s^\kappa(f)(\lambda)\,\mathcal{F}_s^0(\omega_\varepsilon)(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z).\end{aligned} \tag{23}$$

С другой стороны, по доказанному выше

$$\begin{aligned}(f \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon)(z) = &\frac{4^{\alpha+\beta}}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}_s^\kappa(f \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon)(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z)|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}d\lambda + \\ &+\frac{2^{2(\alpha+\beta)+1}}{\pi}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{\alpha,\beta}} r_{\alpha,\beta}(\lambda)\,\mathcal{F}_s^\kappa(f \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon)(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z).\end{aligned} \tag{24}$$

Из (23), (24) и (21) видим, что $f^* \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon = f \overset{s}{\times} \omega_\varepsilon$. Отсюда следует равенство $f = f^*$, что и требовалось. □

Следствие 2. *Если $f \in C_c^{0,\kappa}(\mathbb{D})$ и для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$*

$$|\mathcal{F}_s^\kappa(f)(\lambda)| \leq \frac{c}{(1+|\lambda|)^{m+|\kappa|+3}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

где c не зависит от λ, то $f \in C^m(\mathbb{D})$.

Доказательство. Как и выше, обозначим через f^* функцию в правой части равенства (4). Тогда $f^* \in C^m(\mathbb{D})$ ввиду оценок (25), (16) и (3). Теперь повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем $f^* = f \in C^m(\mathbb{D})$. □

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 331 с.
2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
3. *Koornwinder T.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups. In: Askey R.A., at al.(eds.) Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. – Reidel, Dordrecht, 1984. – P. 1–85.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
5. *Трипольская Н.А., Волчков Вит.В.* Об одном обобщении теоремы о среднем //Труды ИПММ НАН Украины. – Т. 24. – 2012. – С. 225–233.
6. *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
7. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhäuser: Basel. – 2013. – 592 p.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
9. *Василянская В.С., Волчков Вит.В.* Интегралы типа Эйзенштейна на сфере и их обобщения // Труды ИПММ НАН Украины. – Т. 25. – 2012. – С. 42–49.

V. S. Vasylianska, Vit. V. Volchkov

Paley–Wiener type theorem for generalized spherical transform on the hyperbolic plane.

Analogues of the spherical transform on the hyperbolic plane are studied. The inversion formula and Paley–Wiener type theorem for the specified transform are obtained.

Keywords: *spherical transform, inversion formula, Paley–Wiener theorem.*

В. С. Василянська, Віт. В. Волчков

Теорема типу Вінера–Пелі для узагальненого сферичного перетворення на гіперболічній площині.

Вивчаються аналоги сферичного перетворення на гіперболічній площині. Для вказаного перетворення отримано формулу обертання та доведено теорему Вінера–Пелі.

Ключові слова: *сферичні перетворення, формула обертання, теорема Вінера–Пелі.*

Донецкий национальный ун-т
`sv.vasia@gmail.com`

Получено 29.11.13