УДК 512.53

 Е. А. Бондарь

$\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- И $\mathscr{H}$-СЕЧЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ СИЛЬНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В статье показано, что моноид сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер содержит единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение. Найдены необходимые и достаточные условия существования $\mathscr{H}$-сеченийй и построены примеры $\mathscr{L}$-сечений. Доказано, что любое $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечение полугруппы сильных эндоморфизмов представляет собой прямое произведение соответствующих сечений на симметрических полугруппах.

Ключевые слова: *моноид, сильный эндоморфизм, отношения Грина, сечение.*

1. Введение. Пусть S – некоторая полугруппа и ρ – эквивалентность на ней. Подполугруппа полугруппы S называется ρ-сечением S, если она содержит в точности по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Естественный интерес вызывает изучение сечений тех эквивалентностей, которые связаны каким-либо образом с операцией на полугруппе. В этом смысле важную роль в теории полугрупп играют отношения Грина.

Изучая редуктивные моноиды, Л. Реннер в своей работе [1] ввел понятие элемента, сохраняющего порядок, и использовал его для описания алгебраических свойств моноида. Оказалось, что множество элементов, сохраняющих порядок, образует инверсный моноид и является $\mathscr{H}$-сечением. Д. Коуэн и Н. Рейли [2] показали, что любое $\mathscr{H}$-сечение симметрической инверсной полугруппы на множестве X ($|X| \neq 3$) состоит только из тех преобразований X, которые сохраняют некоторый зафиксированный на X линейный порядок. Позднее, в [3] были описаны $\mathscr{R}$- и, двойственным образом, $\mathscr{L}$-сечения конечной симметрической инверсной полугруппы. В отличие от $\mathscr{H}$-сечений, $\mathscr{R}$- ($\mathscr{L}$-) сечения конечной симметрической инверсной полугруппы в общем случае не изоморфны между собой, а число различных попарно неизоморфных $\mathscr{R}$- ($\mathscr{L}$-) сечений равно числу всех возможных разложений положительного целого числа n в неупорядоченную сумму положительных целых чисел. В [4] было показано, что каждое конечное частично упорядоченное множество можно вложить в некоторое идемпотентное $\mathscr{D}$-сечение конечной симметрической инверсной полугруппы. Для бесконечной симметрической инверсной полугруппы описание $\mathscr{H}$-, $\mathscr{R}$- ($\mathscr{L}$-) сечений можно найти в [5].

Сечения отношений Грина изучались и на других полугруппах. Так, в [6] классифицированы все $\mathscr{R}$- ($\mathscr{L}$-) сечения полугруппы Брауэра. В [7] описаны сечения всех отношений Грина на симметрической инверсной 0-категории, подсчитано их количество в конечном случае и найдены условия изоморфности сечений. Для конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ все $\mathscr{H}$- и $\mathscr{R}$-сечения описаны в [8]. При этом доказано, что $\mathscr{R}$-сечение единственно с точностью до изоморфизма. В то же время в [9] построены примеры неизоморфных $\mathscr{L}$-сечений для $\mathscr{T}_4$. Таким образом, в случае симметрической полугруппы не имеет места двойственное описание $\mathscr{L}$-сечений. Строение $\mathscr{R}$-сечений бесконечной симметрической полугруппы можно найти в [10].

Теорема Кэли для полугрупп дает естественную мотивацию для изучения различных подполугрупп симметрической полугруппы. Среди всех таких подполугрупп, благодаря своей информативности, на первый план выходят различные полугруппы эндоморфизмов алгебраических систем и, в частности, реляционных. Целью настоящей статьи является изучение $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер. Понятие сильного эндоморфизма графа было введено в [11] и изучалось вместе с другими типами эндоморфизмов, например, в работах [12]–[14]. Точное представление моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер в виде сплетения группы и некоторой малой категории было получено в [15]. Позже этот результат был обобщен для некоторых конечных n-однородных гиперграфов в [16], а для определенных бесконечных графов и гиперграфов – в [17].

Статья построена следующим образом. В §2 приведены основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения материала. Третий параграф посвящен исследованию строения $\mathscr{R}$- и $\mathscr{L}$-сечений полугруппы сильных эндоморфизмов. В §4 показано, что моноид сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа имеет единственное $\mathscr{H}$-сечение.

2. Предварительные сведения. Все не определенные в работе понятия можно найти, например, в [18]–[20].

Хорошо известно, что на любой полугруппе всегда можно определить пять отношений эквивалентности $\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{H}, \mathscr{D}, \mathscr{J}$, называемых отношениями Грина. Напомним, что два элемента полугруппы S называются $\mathscr{L}$- ($\mathscr{R}$-) эквивалентными, если они порождают один и тот же главный левый (правый) идеал в S и $\mathscr{J}$-эквивалентными, если они порождают один и тот же двусторонний идеал. Композиция отношений эквивалентности $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ обозначается через $\mathscr{D}$, а их пересечение – через $\mathscr{H}$.

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный конечный неориентированный граф без кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E. Множество вершин и ребер графа G будем также обозначать, соответственно, $V(G)$ и $E(G)$. Преобразование f множества вершин V графа G называется сильным эндоморфизмом, если для всех $x, y \in V$ условие $\{x, y\} \in E$ выполняется тогда и только тогда, когда $\{xf, yf\} \in E$. Множество $SEndG$ всех сильных эндоморфизмов относительно композиции преобразований образует подполугруппу с единицей в полугруппе всех эндоморфизмов графа G.

Для произвольного преобразования f графа G через S_f обозначается правильный подграф из G такой, что $V(S_f) = V(G)f$.

Пусть $\varphi : X \to Y$ – произвольное отображение, A – подмножество из X. Через ρ_φ обозначается отношение равнозначности отображения φ, а через $\varphi|_A$ – ограничение φ на A.

Отношения Грина на $SEndG$ описывает следующая теорема:

Теорема 1. *[13] Пусть G – произвольный конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, $f, g \in SEndG$. Тогда* *(i)* $(f, g) \in \mathscr{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\rho_f = \rho_g$*;*

(ii) $(f, g) \in \mathscr{L}$ *тогда и только тогда, когда* $S_f = S_g$*;*

(iii) $(f, g) \in \mathscr{H}$ *тогда и только тогда, когда* $\rho_f = \rho_g$ *и* $S_f = S_g$*;*

(iv) $(f, g) \in \mathscr{D}$ *тогда и только тогда, когда* $S_f \cong S_g$*.*

Для конечных неориентированных графов без кратных ребер (возможно, с петлями) описание отношений Грина на $SEndG$ идентично.

Говорят, что две вершины x и y графа G смежны, если множество $\{x, y\}$ является ребром этого графа. Множеством связности $N(x)$ вершины $x \in V$ называется множество всех вершин графа G, смежных с вершиной x. Определим на множестве вершин графа G отношение эквивалентности ν, положив $x\nu y \Leftrightarrow N(x) = N(y)$. Через x_ν обозначим класс эквивалентности по ν, содержащий x. Каноническим сильным фактор-графом G/ν называется граф, множество вершин которого – фактор-множество V/ν, а множество $\{a_\nu, b_\nu\}$ является ребром тогда и только тогда, когда $\{a, b\} \in E(G)$.

Как было упомянуто выше, полугруппу сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер можно представить в виде сплетения группы и малой категории:

$$SEndG \cong AutU \; wr \; \mathcal{K}_G, \tag{1}$$

где U – канонический сильный фактор-граф графа G, $\mathcal{K}_G$ – категория, объектами которой являются классы из U, а морфизмами – отображения (подробнее см. [15]). В связи с этим представлением каждый элемент из $SEndG$ будем отождествлять с некоторой парой (α, f), где $\alpha \in AutU$, $f \in Map(Ob\mathcal{K}_G, Mor\mathcal{K}_G)$ и для любого $A \in U$

$$Af = f_A, f_A \in Map(A, A\alpha).$$

Положим везде далее G – конечный неориентированный граф без кратных ребер, U – его канонический сильный фактор-граф, $|U| = m$. Если X – n-элементное множество, то симметрическая полугруппа $\mathscr{T}(X)$ также обозначается через $\mathscr{T}_n$.

Пусть $S(G) = \{(\alpha, g) \in SEndG | \alpha = i_U\}$, где i_U – тождественный автоморфизм U, $g_A \in \mathscr{T}(A)$, $A \in U$. Очевидно, $S(G)$ образует подполугруппу полугруппы $SEndG$.

Следующая лемма имеет непосредственное отношение к основным результатам статьи.

Лемма 2. *Пусть* $\mathscr{K}$ *– одно из отношений Грина* $\mathscr{L}$*,* $\mathscr{R}$ *или* $\mathscr{H}$ *на* $S(G)$*. Любое* $\mathscr{K}$*-сечение* K *полугруппы* $S(G)$ *изоморфно прямому произведению некоторых* $\mathscr{K}$*-сечений* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *симметрических полугрупп* $\mathscr{T}(A_1), \mathscr{T}(A_2), \ldots, \mathscr{T}(A_m)$*,* $A_i \in U$*.*

Доказательство. Из строения (1) $SEndG$ видно, что для $\varphi = (\alpha, q) \in SEndG$ отношение ρ_φ и образ $im(\varphi)$ зависят на самом деле, соответственно, от $\rho_{q_{A_i}}$ и $im(q_{A_i})$ отображений $q_{A_i} \in Map(A_i, A_i\alpha)$, $A_i \in U$. У элементов $(\alpha, q) \in S(G)$ отображения q_{A_i} представляют собой преобразования из $\mathscr{T}(A_i)$. Пусть K – произвольное

$\mathscr{K}$-сечение полугруппы $S(G)$ и $(i_U, f), (i_U, g) \in K$ – два произвольных элемента. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ обозначим через K_i множество таких преобразований $h_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i)$, что $(i_U, h) \in K$. Заметим, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\Big((i_U, f)(i_U, g)\Big)\Big|_{A_i} = (i_U, fg)|_{A_i} = f_{A_i} g_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i),$$

откуда $f_{A_i} g_{A_i} \in K_i$. Таким образом, K_i – подполугруппа $\mathscr{T}(A_i)$, $1 \le i \le m$. Понятно, что K_i, $1 \le i \le m$ должна содержать хотя бы по одному представителю из каждого класса эквивалентности $\mathscr{K}$ на $\mathscr{T}(A_i)$. Зафиксируем произвольное i и предположим, что K_i содержит два $\mathscr{K}$-эквивалентных на $\mathscr{T}(A_i)$ преобразования: p_{A_i} и q_{A_i}.

Заметим, что сечение K всегда будет содержать идемпотент (i_U, h), определенный по правилу: h_{A_j} – некоторое константное преобразование в случае если $j \ne i$, $1 \le j \le m$, а $h_{A_i} = i_{A_i}$. Понятно, что произведения $(i_U, p)(i_U, h)$, $(i_U, q)(i_U, h) \in K$. Обозначим $\alpha = (i_U, ph)$, $\beta = (i_U, qh)$. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеем тогда

$$A_j(ph) = p_{A_j} h_{A_j} = \begin{cases} h_{A_j}, & \text{если } j \ne i, \\ p_{A_i}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$A_j(qh) = q_{A_j} h_{A_j} = \begin{cases} h_{A_j}, & \text{если } j \ne i, \\ q_{A_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Учитывая, что $p_{A_i} \mathscr{K} q_{A_i}$ получим $\alpha \mathscr{K} \beta$, следовательно, $\alpha = \beta$, откуда $p_{A_i} = q_{A_i}$. Таким образом, K_i является $\mathscr{K}$-сечением на $\mathscr{T}(A_i)$.

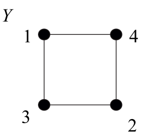

Рис. 1. Граф Y

Пусть K_i – $\mathscr{K}$-сечение на $\mathscr{T}(A_i)$, $1 \le i \le m$, K – множество всех элементов $(i_U, f) \in S(G)$, для которых $f_{A_i} \in K_i$ для всех i, $1 \le i \le m$. Поскольку умножение элементов из $S(G)$ сводится к умножению преобразований на классах, то, очевидно, K образует подполугруппу в $S(G)$, изоморфную $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$. При этом в K содержатся представители каждого из классов эквивалентности $\mathscr{K}$ на $S(G)$: любой элемент $(i_U, h) \in S(G)$ будет $\mathscr{K}$-эквивалентен $(i_U, h') \in K$ такому, что $h'_{A_i} \mathscr{K} h_{A_i}$, $h'_{A_i} \in K_i$, $1 \le i \le m$. Если же $(i_U, f), (i_U, g) \in K$ – два произвольных элемента и $(i_U, f) \mathscr{K} (i_U, g)$, то $f_{A_i} \mathscr{K} g_{A_i}$ $(1 \le i \le m)$, откуда $f_{A_i} = g_{A_i}$. Из доказанного выше следует, что K есть $\mathscr{K}$-сечение полугруппы $S(G)$ такое, что $K \cong \prod_{i=1}^m K_i$. $\square$

Заметим, что если $\mathscr{K} = \mathscr{D} = \mathscr{J}$, в общем случае K изоморфно вкладывается в $\prod_{i=1}^m K_i$. Рассмотрим, например, граф Y (рис. 1).

Имеем $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$. Без ограничения общности, можем считать, что $K_1 = \{\binom{12}{12}, \binom{12}{11}\}$, $K_2 = \{\binom{34}{34}, \binom{34}{33}\}$. Прямое произведение $K_1 \times K_2$ содержит с точностью до изоморфизма сильные эндоморфизмы $\varphi = \binom{1234}{1233}$, $\psi = \binom{1234}{1134}$, причем нетрудо видеть, что $S_\varphi \cong S_\psi$. Таким образом, $K_1 \times K_2$ не может служить сечением для $S(G)$.

3. Описание $\mathscr{R}$-сечений. Установим связь между $\mathscr{R}$-сечениями $SEndG$ и $\mathscr{R}$-сечениями полугруппы $S(G)$.

Лемма 3. *Пусть $R \subseteq SEndG$. Множество R есть $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $S(G)$ тогда и только тогда, когда R является $\mathscr{R}$-сечением полугруппы $SEndG$.*

Доказательство. Покажем, что всякое $\mathscr{R}$-сечение R на $S(G)$ является $\mathscr{R}$-сечением и для $SEndG$. Действительно, пусть (β, f) – произвольный элемент из $SEndG$. Понятно, что для всякого $f_{A_i} \in Map(A_i, A_i\beta)$, $A_i \in U$ можно найти такие преобразования $h_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i)$, что $\rho_{h_{A_i}} = \rho_{f_{A_i}}$. Пусть $(i_U, h) \in S(G)$ такое, что $\rho_{h_{A_i}}$ обладает указанным свойством для всех $A_i \in U$. Тогда $(\beta, f)\mathscr{R}(i_U, h)$.

Пусть теперь R – $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $SEndG$. Покажем, что $R \subseteq S(G)$.

Предположим, что некоторый сильный эндоморфизм $\varphi = (\beta, f) \notin S(G)$ принадлежит R. Тогда, во-первых, $\varphi^2 \neq \varphi$, и во-вторых, $\beta^l = i_U$ для некоторого натурального $l \geq 3$. Рассмотрим преобразования $\varphi_1 = \varphi^l$, $\varphi_2 = (\varphi_1)^2 = \varphi^{2l}$, $\varphi_2 = (\varphi_1)^3 = \varphi^{3l}, \ldots$ и т. д. пока для некоторого r не получим $\varphi_r = \varphi^{rl}$ – идемпотент. Это означает, что преобразование φ_r из $R \cap S(G)$. Сравним теперь преобразования φ_r и $\varphi\varphi_r$ из R: с одной стороны $\varphi\varphi_r \neq \varphi_r$, поскольку им соответствуют разные автоморфизмы β и i_U, а с другой стороны – $\rho_{\varphi\varphi_r} = \rho_{\varphi_r}$, поскольку $\rho_\varphi \subseteq \rho_{\varphi_r}$. Из полученного противоречия следует, что $R \subseteq S(G)$. Таким образом, R является $\mathscr{R}$-сечением полугруппы $S(G)$. □

Теперь, используя Лемму 2, можем описать $\mathscr{R}$-сечения моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер.

Теорема 4. *Полугруппа $SEndG$ имеет единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение $R \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_m$, где R_i – $\mathscr{R}$-сечение симметрической полугруппы $\mathscr{T}(A_i)$, $1 \leq i \leq m$.*

Доказательство. Следует из лемм 2 и 3, а также того, что для каждого класса $A_i \in U$ можно построить единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $\mathscr{T}(A_i)$ [8]. □

Учитывая, что число всех $\mathscr{R}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$ равно $n!$ [8], получаем

Следствие 5. *Пусть k_i – мощность класса $A_i \in U$, $1 \leq i \leq m$. Число всех различных $\mathscr{R}$-сечений полугруппы $SEndG$ равно $\prod\limits_{i=1}^{m} k_i!$.*

Аналогичная связь существует и между $\mathscr{L}$-сечениями $S(G)$ и $SEndG$.

Лемма 6. *Пусть $L \subseteq SEndG$. Множество L есть $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $S(G)$ тогда и только тогда, когда L – $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $SEndG$.*

Доказательство. Пусть L – $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $S(G)$, $(\beta, f) \in SEndG$ – произвольный элемент. Положим $A'_i = A_i \cap im(\beta, f)$ для всех $A_i \in U$, $1 \leq i \leq m$. Тогда $(\beta, f)\mathscr{L}(i_U, g)$, где $im(g_{A_i}) = A'_i$ для всех $A_i \in U$. Таким образом, любой сильный эндоморфизм $\mathscr{L}$-эквивалентен некоторому из $S(G)$. Поэтому $\mathscr{L}$-сечение L полугруппы $S(G)$ является $\mathscr{L}$-сечением и для $SEndG$.

Пусть теперь L – $\mathscr{L}$-сечение $SEndG$. Покажем, что L содержится в $S(G)$. Предположим, что некоторый сильный эндоморфизм $\varphi = (\beta, f) \notin S(G)$ принадлежит L. Следовательно, $\beta^l = i_U$ для некоторого натурального $l \geq 3$. Пусть $k \geq l$ – такое натуральное число, что преобразование $\varphi_k = \varphi^{kl}$ – идемпотент. Таким образом, преобразование φ_k из $L \cap S(G)$. Так как $im(f_{A_i}) \supseteq im(f^{kl}_{A_i})$ и $f^{kl}_{A_i}$ – идемпотент, то $im(f_{A_i})$ содержит, по крайней мере, по одному представителю каждого из классов эквивалентности $\rho_{f^{kl}_{A_i}}$, для всех $A_i \in U$. Поэтому $im(\varphi\varphi_k) = im(\varphi_k)$. Так как $\varphi_k, \varphi\varphi_k \in L$, то должно выполняться равенство $\varphi_k = \varphi\varphi_k$. Но указанные преобразования неравны в силу того, что им соответствуют разные автоморфизмы: $\varphi_k = (i_U, f^{kl})$, а $\varphi\varphi_k = (\beta, f)(i_U, f^{kl}) = (\beta, f^{kl+1})$. Полученное противоречие доказывает $L \subseteq S(G)$. $\square$

Из лемм 2 и 6 получаем

Следствие 7. *Любое $\mathscr{L}$-сечение L полугруппы $SEndG$ изоморфно прямому произведению некоторых $\mathscr{L}$-сечений $L_1, L_2, \ldots, L_m$ симметрических полугрупп $\mathscr{T}(A_1), \mathscr{T}(A_2), \ldots, \mathscr{T}(A_m)$, $A_i \in U$.*

Напомним, что $\mathscr{L}$-сечением для $\mathscr{T}_n$ может служить следующая конструкция [9].

Пусть на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ задан некоторый линейный порядок $\prec$. Обозначим через $M \subseteq N$ такое непустое подмножество, что

$$M = \{i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_k\}.$$

Положим

$$\tau_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{k-1} & i_k & i_k & \ldots & i_k \end{pmatrix}.$$

Тогда $L = \{\tau_M | M \subseteq N, M \neq \varnothing\}$ – $\mathscr{L}$-сечение для $\mathscr{T}_n$.

Пример. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 2.

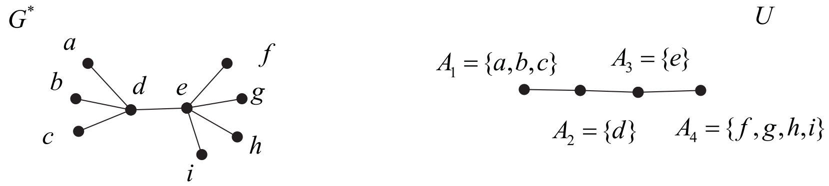

Рис. 2. Граф G^* и его канонический фактор-граф U

Как видно по каноническому фактор-графу U, описание $\mathscr{L}$-сечений моноида $SEndG^*$ сводится к описанию $\mathscr{L}$-сечений симметрических полугрупп на трех-, одно-, и четырехэлементном множествах.

Очевидно, что $\mathscr{T}_1$ имеет единственное $\mathscr{L}$-сечение, равное $\mathscr{T}_1$. Обозначим его L_1.

Положим $a \prec b \prec \ldots \prec i$. Тогда согласно приведенной выше конструкции $\mathscr{L}$-сечениями для $\mathscr{T}_3$ и $\mathscr{T}_4$ будут, соответственно, полугруппы:

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} abc \\ aaa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bbb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ ccc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ abb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ acc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bcc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix} \right\},$$

$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} fghi \\ ffff \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gggg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ iiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fggg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ghhh \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} fghi \\ giii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fgii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fhii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ghii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghi \end{pmatrix} \right\}.$$

Для $\mathscr{T}_4$ можно построить другой пример $\mathscr{L}$-сечения (см. [9]):

$$L_4' = \left\{ \begin{pmatrix} fghi \\ ffff \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gggg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ iiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ggii \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} fghi \\ ffgg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fgii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffhi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gghi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghi \end{pmatrix} \right\}.$$

Таким образом, примерами $\mathscr{L}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов графа G^* являются следующие полугруппы:

$$L_3 \times L_1 \times L_1 \times L_4 \cong L_3 \times L_4,$$

$$L_3 \times L_1 \times L_1 \times L_4' \cong L_3 \times L_4'.$$

4. Описание $\mathscr{H}$-сечений. Для описания $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 8. *Если U содержит хотя бы один класс мощности > 2, то полугруппа $SEndG$ не имеет $\mathscr{H}$-сечений.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $|A_1| > 2$, где $A_1 \in U$, $|U| = m$. Проведем доказательство, опираясь на подобное в [8], дополнив его необходимыми изменениями. Определим три следующих $\mathscr{H}$-класса: H_1, H_2, H_3. Пусть H_1 содержит элементы $\varphi = (\alpha, g) \in SEndG$, у которых $G/\rho_\varphi = \{\{a_{11}\}, \{a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$, и образ равен $\{a_{11}, a_{13}, a_2, \ldots, a_m\}$, где $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}$, $a_i \in A_i$, $2 \leq i \leq m$ – произвольные фиксированные элементы. Из представления (1) (см. §2) видно, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ найдется такое $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что $A_i\alpha = A_j$. Причем, очевидно, $A_1\alpha = A_1$, поскольку остальные A_i, $2 \leq i \leq m$ принадлежат разбиению целиком. Таким образом, имеем $A_1 g_{A_1} = \{a_{11}, a_{13}\}$ и $A_i g_{A_i} = \{a_j\}$, где $i, j \in \{2, 3 \ldots, m\}$ и $A_i\alpha = A_j$.

Подобным образом определим H_2: пусть всем элементам из класса H_2 соответствуют разбиение $\{\{a_{11}, a_{12}\}, \{a_{13}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$ и образ $\{a_{12}, a_{13}, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда если $(\beta, f) \in H_2$ и $A_i\beta = A_j$ для некоторых i, j, то по аналогии с предыдущими рассуждениями $A_1\beta = A_1$ и, следовательно, $A_1 f_{A_1} = \{a_{12}, a_{13}\}$, $A_i f_{A_i} = \{a_j\}$, где $i, j \in \{2, 3 \ldots, m\}$.

Наконец, пусть всем элементам из H_3 соответствуют разбиение $\{\{a_{11}, a_{13}\}, \{a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$ и образ $\{a_{11}, a_{12}, a_2, \ldots, a_m\}$. Если $(\gamma, h) \in H_3$ и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ индекс $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такой, что $A_i\gamma = A_j$, то имеем $A_1 h_{A_1} = \{a_{11}, a_{12}\}$, если $i = j = 1$, и $A_i h_{A_i} = \{a_j\}$ – в остальных случаях.

Поскольку квадрат любого элемента каждого из классов H_1, H_2 и H_3 сохраняют и разбиение, и образ, то представители $\mathscr{H}$-сечения полугруппы $SEndG$ будут идемпотентами. Таким образом,

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1|A_1|} & A_2 & \ldots & A_m \\ a_{11} & a_{13} & a_{13} & \ldots & a_{13} & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix} \in H_1,$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1|A_1|} & A_2 & \dots & A_m \\ a_{12} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{13} & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in H_2,$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1|A_1|} & A_2 & \dots & A_m \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in H_3.$$

Следовательно, $\mathscr{H}$-сечение содержит $\psi = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = (\mu, q)$ и $\psi^2 = (\mu^2, p)$. Однако

$$A_1 q_{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1|A_1|} \\ a_{12} & a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}, A_1 p_{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1|A_1|} \\ a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} \end{pmatrix},$$

т.е. ψ, ψ^2 неравны и принадлежат одному и тому же $\mathscr{H}$-классу. Следовательно, в условиях предложения невозможно построить $\mathscr{H}$-сечение полугруппы $SEndG$. $\square$

Имеет место следующая лемма о существовании $\mathscr{H}$-сечений в $SEndG$.

Лемма 9. *Полугруппа $SEndG$ имеет $\mathscr{H}$-сечение тогда и только тогда, когда все классы из U мощности ≤ 2 и для любого $(\beta, f) \in SEndG$, и всех двухэлементных классов $A \in U$ выполняется $A\beta = A$ или $|A\beta| = 1$.*

Доказательство. Предположим, что H – некоторое $\mathscr{H}$-сечение полугруппы $SEndG$. По лемме 8 для любого $A \in U$ выполняется $|A| \leq 2$. Пусть $C = \{\varphi \in SEndG | G/\rho_\varphi = U\}$. Очевидно, что для любого $\gamma \in C$ имеем γ^2 также из C, и $im(\gamma) = im(\gamma^2)$. Поэтому в пересечении $H \cap C$ будут находиться все идемпотенты из C, и только они.

Предположим теперь, что для некоторого $(\beta, f) \in SEndG$ существует такой класс $A \in U$, что $|A| = 2 = |A\beta|$ и $A\beta \neq A$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $|A_1| = |A_2| = 2$ и $A_1\beta = A_2$. Пусть $A_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$, a_i – произвольные фиксированные представители классов A_i, $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, тогда

$$(i_U, g) = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & A_2 & \dots & A_m \\ a_{11}a_{12} & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in SEndG.$$

Рассмотрим произведение $(i_U, g)(\beta, f) = (\beta, h)$, где $A_1 h_{A_1} = \{a_{21}, a_{22}\}$ и $A_i h_{A_i} = a_i f_{A_i} \in A_i\beta$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, m\}$. Таким образом, в $SEndG$ существует $\mathscr{H}$-класс, элементам которого соответствуют разбиение $\{\{a_{11}\}, \{a_{12}\}, A_2, \dots, A_m\}$ и образ $\{a_{21}, a_{22}, a_2 f_{A_2}, a_3 f_{A_3}, \dots, a_m f_{A_m}\}$. Пусть (β, h') элемент указанного класса, принадлежащий H. Тогда произведение

$$(\beta, h')(i_U, g) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ a_2 & a_2 f_{A_2} & \dots & a_m f_{A_m} \end{pmatrix} \in C,$$

но не является идемпотентом, т. е. не принадлежит H. А это противоречит начальному предположению. Отметим здесь также, что из доказанного следует $\gamma \mathscr{H} \gamma^2$ для любого $\gamma \in SEndG$. Таким образом, все элементы из H идемпотентны, откуда $H \subseteq S(G)$. Следовательно, H – $\mathscr{H}$-сечение для $S(G)$.

Наоборот, пусть все классы из U мощности ≤ 2, и для любого $(\beta, f) \in SEndG$, и всех двухэлементных классов $A \in U$ выполняется $A\beta = A$ или $|A\beta| = 1$. Согласно

[8] на $\mathscr{T}(A_i)$, $A_i \in U$ существуют и определены единственным образом $\mathscr{H}$-сечения H_i, $1 \leq i \leq m$. По лемме 2 прямое произведение $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$ изоморфно некоторому $\mathscr{H}$-сечению H полугруппы $S(G)$.

Покажем, что для любого $(\beta, f) \in SEndG$ найдется $\mathscr{H}$-эквивалентный элемент из $S(G)$. Для каждого $f_A \in Map(A, A\beta)$, $A \in U$ определим сюръективное преобразование $p_{A\beta} : A\beta \to im(f_A)$. Рассмотрим теперь сильный эндоморфизм $(i_U, p) \in S(G)$. Нетрудно видеть, что $im(i_U, p) = im(\beta, f)$. Для любого $A \in U$, если $A \neq A\beta$, то $|A\beta| = 1$ и $|A \cap im(\beta, f)| = 1$, откуда $A, A\beta \in \rho_{(\beta,f)} \cap \rho_{(i_U,p)}$. Если же $A = A\beta$, то $p_{A\beta} = p_A = f_A$ и, очевидно, $\rho_{f_A} = \rho_{p_A}$. Таким образом, $\rho_{(\beta,f)} = \rho_{(i_U,p)}$. Следовательно, $(\beta, f)\mathscr{H}(i_U, p)$ и H является $\mathscr{H}$-сечением для $SEndG$. $\square$

Из лемм 2 и 9 следует описание $\mathscr{H}$-сечений моноида $SEndG$.

Теорема 10. *Если полугруппа $SEndG$ имеет $\mathscr{H}$-сечение H, то оно единственно, причем $H \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$, где H_i – $\mathscr{H}$-сечение $\mathscr{T}(A_i)$.*

Выводы Описание $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечений полугруппы сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер сводится к описанию соответствующих сечений на симметрических полугруппах, которые уже полностью или частично изучены (см. Введение). При этом $\mathscr{H}$-сечение $SEndG$ можно построить тогда и только тогда, когда все классы из U одно- или двухэлементны, а моноид $SEndG$ удовлетворяет некоторому ограничению. В таком случае полученное $\mathscr{H}$-сечение моноида $SEndG$ будет единственным. $\mathscr{R}$-сечение моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер можно построить всегда, и оно единственно с точностью до изоморфизма. Полное описание $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $SEndG$ сводится к вопросу об описании $\mathscr{L}$-сечений симметрической полугруппы, который, как известно, пока остается открытым (см., напр., [20]).

1. *Renner L.* Analogue of the Bruhat decomposition for algebraic monoids II // Journal of Algebra. – 1986. – Vol. 101 (2). – P. 303–338.
2. *Cowan D., Reilly N.* Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups // International Journal of Algebra and Computation. – 1995. – Vol. 5 (3). – P. 259–287.
3. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* $\mathscr{L}$- and $\mathscr{R}$- Cross-Sections in $\mathscr{IS}_n$ // Communications in Algebra. – 2003. – Vol. 31 (9). – P. 4507–5423.
4. *Pekhterev V.* Idempotent $\mathscr{D}$-cross-sections of the finite inverse symmetric semigroup IS_n // Algebra and Discrete Mathematics. – 2008. – Vol. 3. – P. 84–87.
5. *Pekhterev V.* $\mathscr{H}$-, $\mathscr{R}$- and $\mathscr{L}$-cross-sections of the infinite symmetric inverse semigroup // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – Vol. 1. – P. 92–104.
6. *Kudryavtseva G., Maltcev V., Mazorchuk V.* $\mathscr{L}$- and $\mathscr{R}$-cross-sections in the Brauer Semigroup // U.U.D.M. Report 2004:43. – ISSN 1101-3591.
7. *Жучок Ю.В.* Сечения отношений Грина на симметрической инверсной 0-категории // Алгебра и логика. – 2012. – Т. 51. – № 4. – С. 458–475.
8. *Pekhterev V.* $\mathscr{H}$- and $\mathscr{R}$-cross-sections of the full finite semigroup $\mathscr{T}_n$ // Alg. Discrete Math. – 2003. – Vol. 2 (3). – P. 82–88.
9. *Kozhuhov I.B.* On transversals of the semigroup T_n for the relation $\mathscr{L}$ // Kamyanets–Podolsky, July, 1–7, 2007. – P. 110.
10. *Пехтерев В.О.* $\mathscr{R}$-зрізи напівгрупи $\mathscr{T}_X$ // Математичні студії. – 2004. – Т. 21 (2). – С. 133–139.
11. *Čulík K.* Zur Theorie der Graphen // Časopis Pěst. Mat. – 1958. – Vol. 83. – P. 133–155.

12. *Böttcher M., Knauer U.* Endomorphism spectra of graphs // Discrete Mathematics. – 1992. – Vol. 109. – P. 45–57.
13. *Li W-M.* Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 47. – P. 209–214.
14. *Zhuchok Y.V.* The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – V. 16, No. 1 – P. 134–150.
15. *Knauer U., Nieporte M.* Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. – 1989. – Vol. 52. – P. 607–614.
16. *Бондарь Е.А., Жучок Ю.В.* Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – Т. 18 (1). – С. 21–34.
17. *Бондарь Е.А., Жучок Ю.В.* Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов // Укр.мат.журн. – 2013. – Т. 65 (6). – С. 743–754.
18. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М: Мир, 1972. – Т. 1. – 278 с.
19. *Knauer U.* Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices // De Gruyter studies in mathematics. – 2011. – Vol. 41 – 308 p.
20. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction. – Springer-Verlag, 2009. – 317 p. – (Algebra and Applications, v. 9).

E. A. Bondar

$\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- and $\mathscr{H}$-cross-sections in the strong endomorphism semigroup of the undirected graphs.

In the present paper we show that the strong endomorphism monoid of a finite undirected graph without multiply edges contains a unique $\mathscr{R}$-cross-section up to an isomorphism. We find necessary and sufficient conditions of an existence of $\mathscr{H}$-cross-sections and construct examples of $\mathscr{L}$-cross-sections. Also we prove that any $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- and $\mathscr{H}$-cross-section of the strong endomorphism semigroup is isomorphic to the direct product of the corresponding cross-sections in symmetric semigroups.

Keywords: *monoid, strong endomorphism, Green's relations, cross-section.*

Є. О. Бондар

$\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- та $\mathscr{H}$-зрізи напівгрупи сильних ендоморфізмів неорієнтованих графів.

У статті показано, що моноїд сильних ендоморфізмів скінченного неорієнтованого графа без кратних ребер містить єдиний з точністю до ізоморфізма $\mathscr{R}$-зріз. Знайдено необхідні та достатні умови існування $\mathscr{H}$-зрізів та побудовано приклади $\mathscr{L}$-зрізів. Доведено, що будь-який $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- та $\mathscr{H}$-зріз напівгрупи сильних ендоморфізмів є прямим добутком відповідних зрізів на симетричних напівгрупах.

Ключові слова: *моноїд, сильний ендоморфізм, відношення Гріна, зріз.*

Луганский национальный ун-т им. Тараса Шевченко
`bondareug@gmail.com`

Получено 06.12.12