УДК 531.36, 532.595

©2013. **Н. В. Антоньева, Ю. Н. Кононов**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРЕХСЛОЙНУЮ ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ

Рассмотрена задача об устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с коаксиальной цилиндрической полостью, полностью заполненной трехслойной идеальной жидкостью. В предположении, что внутренние поверхности раздела жидкостей при достаточно большой величине угловой скорости вращения близки к цилиндрическим, выведено частотное уравнение. Получены и исследованы необходимые условия устойчивости равномерного вращения для массивного твердого тела и малого количества жидкости.

Ключевые слова: *вращающееся твердое тело, устойчивость, коаксиальная цилиндрическая полость, вращающаяся трехслойная идеальная жидкость.*

1. Введение. В статье [1] рассмотрена задача об устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с цилиндрической полостью частично заполненной идеальной жидкостью. В работах [2, 3] обобщена эта задача на случай двухслойной идеальной жидкости. В статье [3] оценено влияние стратификации на области устойчивости и рассмотрен простейший случай стратификации – двухслойная жидкость. В настоящей работе обобщена задача [2, 3] на случай трехслойной идеальной жидкости, что позволило уточнить влияние стратификации на области устойчивости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим тяжелый осесимметричный волчок с коаксиальной цилиндрической полостью высотой $2c$, внешним радиусом $2a$ и внутренним $2R_0$, полностью заполненной тремя идеальными несмешивающимися жидкостями $(m = 3)$ плотности ρ_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$.

В невозмущенном движении волчок и жидкость совершают вращение вокруг вертикали как одно твердое тело с угловой скоростью Ω. Поверхности разделов жидкостей (внутренние поверхности) полагаются цилиндрическими, соответственно, с радиусами R_2 и R_3 $(R_0 \le R_2 \le R_3 < a)$.

Линеаризованные уравнения движения и граничные условия для вращающейся трехслойной идеальной жидкости будем записывать в системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а оси Ox и Oy вращаются вокруг оси Oz с угловой скоростью Ω [1–3, 5]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial t} - 2\Omega v_i = -\frac{\partial P_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2\Omega u_i = -\frac{\partial P_i}{\partial y}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

$$
\begin{gathered}
w_i = -(\dot{l}x + \dot{m}y) \quad \text{при} \quad z = c \pm h, \\
u_3 x + v_3 y = z(\dot{l}x + \dot{m}y) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = a^2, \\
u_1 x + v_1 y = z(\dot{l}x + \dot{m}y) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = R_0^2, \\
\rho_2 \left[\frac{\partial P_2}{\partial t} + \Omega^2 \left(u_2 x + v_2 y \right) \right] = \rho_1 \left[\frac{\partial P_1}{\partial t} + \Omega^2 \left(u_1 x + v_1 y \right) \right] \text{ при } x^2 + y^2 = R_2^2, \\
\rho_3 \left[\frac{\partial P_3}{\partial t} + \Omega^2 \left(u_3 x + v_3 y \right) \right] = \rho_2 \left[\frac{\partial P_2}{\partial t} + \Omega^2 \left(u_2 x + v_2 y \right) \right] \text{ при } x^2 + y^2 = R_3^2, \\
\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = R_2^2, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = \vec{v}_3 \cdot \vec{n} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = R_3^2,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где l, m, n – направляющие косинусы оси симметрии полости и твердого тела по отношению к осям $Oxyz$; $\vec{v}_i = (u_i, v_i, w_i)$; $\vec{n}$ – нормаль к поверхности раздела жидкостей; $p_i = \rho_i[P_i + (x^2 + y^2)\Omega^2/2]$ – давление в i-ой жидкости, $(i = 1, 2, 3)$.

3. Построение решения задачи. Для изучения устойчивости невозмущенного движения волчка Лагранжа предположим, что все функции времени можно представить в виде $u(x, y, z, t) = u_s(x, y, z, s)\mathrm{e}^{st}$. После перехода к новым функциям $Q_{is} = P_{is} - s^2(l_s x + m_s y)z$ и цилиндрическим координатам z, r, θ получим краевую задачу для определения Q_{is} по аналогии с работами [1–3, 5].

Разложим функции Q_{is} и z в ряд Фурье по косинусам на отрезке $c - h \le z \le c + h$:

$$
Q_{is} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[A_{ik}(r) \cos\theta + B_{ik}(r) \sin\theta \right] \cos k(z - h + c), \tag{3}
$$

$$
z = h - \frac{8c}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos k\,(z - c + h) = \sum_{k} C_k \cos k(z - c + h), \tag{4}
$$

где $C_k = h$ при $k = 0$ и $C_k = -2/(ck^2)$ при $k = \pi(2j+1)/(2c) \quad (j = 0, 1, 2, ...)$,

$$
A_{ik} + iB_{ik} = (l_s + im_s) \left[X_{ik} J_1(\alpha k r) + Z_{ik} Y_1(\alpha k r) \right], \quad k \ne 0,
$$

$J_1(\alpha k r)$, $\quad Y_1(\alpha k r)$ – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка. В виду удобства записи следует отличать нижний индекс суммирования от мнимой единицы.

Подставляя (3) и (4) в граничные условия (2), получим

$$
\begin{gathered}
\left(sa \frac{d}{dr} - 2i\Omega \right) (A_{2k} + iB_{2k}) = -2as(s + i\Omega)(s - 2i\Omega)(l_s + im_s), \quad r = a, \\
\left(sR_0 \frac{d}{dr} - 2i\Omega \right) (A_{1k} + iB_{1k}) = -2as\,(s + i\Omega)\,(s - 2i\Omega)(l_s + im_s), \quad r = R_0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
\left[\Omega^2 \left(sR_2 \frac{d}{dr} - 2i\Omega \right) - s\left(s^2 + 4\Omega^2 \right) \right] \left[\rho_2 \left(A_{2k} + iB_{2k} \right) - \rho_1 \left(A_{1k} + iB_{1k} \right) \right] = \\
= (\rho_2 - \rho_1) s^2 R_2 (s - 2i\Omega)(s + i\Omega)^2 (l_s + im_s), \quad r = R_2, \\
\left(sR_2 \frac{d}{dr} - 2i\Omega \right) (A_{2k} + iB_{2k}) = \left(sR_2 \frac{d}{dr} - 2i\Omega \right) (A_{1k} + iB_{1k}), \quad r = R_2,
\end{gathered} \tag{6}
$$

$$\begin{gathered}\left[\Omega^2\left(sR_3\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)-s\left(s^2+4\Omega^2\right)\right]\left[\rho_3\left(A_{3k}+iB_{3k}\right)-\rho_2\left(A_{2k}+iB_{2k}\right)\right]=\\ =\left(\rho_3-\rho_2\right)s^2R_3\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(l_s+im_s\right),\quad r=R_3,\\ \left(sR_3\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)\left(A_{3k}+iB_{3k}\right)=\left(sR_3\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)\left(A_{2k}+iB_{2k}\right),\quad r=R_3.\end{gathered}\tag{7}$$

Вначале рассмотрим случай $k=0$. Пусть

$$(A_{i0}+iB_{i0})=(l_s+im_s)(X_{i0}r+Z_{i0}/r).$$

Из граничных условий (5)–(7) получим систему уравнений для определения неизвестных X_{10},X_{20},X_{30} и Z_{10},Z_{20},Z_{30}:

$$\begin{gathered}\left(s-2i\Omega\right)X_{10}-\left(s+2i\Omega\right)Z_{10}/R_0^2=-2s\left(s+i\Omega\right)\left(s-2i\Omega\right),\\ \left(s-2i\Omega\right)X_{30}-\left(s+2i\Omega\right)Z_{30}/a^2=-2s\left(s+i\Omega\right)\left(s-2i\Omega\right),\\ R_2^2\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(\rho_1X_{10}-\rho_2X_{20}\right)+\\ +\left(s+2i\Omega\right)\left(s^2-2i\Omega s+\Omega^2\right)\left(\rho_1Z_{10}-\rho_2Z_{20}\right)=\\ =\left(\rho_2-\rho_1\right)s^2R_2^2\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2,\\ \left(s-2i\Omega\right)\left(X_{10}-X_{20}\right)+\left(s+2i\Omega\right)\left(Z_{10}-Z_{20}\right)/R_2^2=0,\\ R_3^2\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(\rho_2X_{20}-\rho_3X_{30}\right)+\\ +\left(s+2i\Omega\right)\left(s^2-2i\Omega s+\Omega^2\right)\left(\rho_2Z_{20}-\rho_3Z_{30}\right)=\\ =\left(\rho_3-\rho_2\right)s^2R_3^2\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2,\\ \left(s-2i\Omega\right)\left(X_{20}-X_{30}\right)+\left(s+2i\Omega\right)\left(Z_{20}-Z_{30}\right)/R_3^2=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Следует отметить, что, как будет показано ниже, в частотном уравнении движения твердого тела с жидкостью, из всех коэффициентов X_{i0} и Z_{i0} входят только X_{10}, Z_{10} и X_{30}, Z_{30}, то есть величины $X_{10}R_0+Z_{10}/R_0$ и $X_{30}a+Z_{30}/a$.

Система (8) при $k=0$, $R_0\neq0$, имеет решение:

$$\begin{gathered}X_{10}=-\frac{ss_1}{\Delta_0}\Big\{\rho_3\Big[\rho_2\left\{2s_1^4R_3^2R_2^2\left(a^2-R_0^2\right)-ss_1^3R_3^2R_2^2\left(a^2-R_2^2\right)+\right.\\ +2\tilde{s}s_1^2\left[R_2^2a^2\left(2R_3^2-R_0^2\right)-R_3^4R_0^2\right]+\tilde{s}s_1sR_2^2\left(-2R_3^2a^2+R_3^4+a^2R_2^2\right)-\\ \left.-2\tilde{s}^2a^2R_3^2\left(R_0^2-R_2^2\right)\right\}-\rho_1\left(R_2^2-R_3^2\right)\left(\tilde{s}a^2+s_1^2R_3^2\right)\left(2\tilde{s}R_0^2+R_2^2ss_1\right)\Big]-\\ -\rho_2^2\tilde{s}s_1\left(R_2^2-R_3^2\right)\left(a^2-R_3^2\right)\left(-2R_0^2s_1+R_2^2s\right)+\\ +\rho_1\rho_2\left(a^2-R_3^2\right)\left(s_1^2R_3^2+\tilde{s}R_2^2\right)\left(2s_0R_0^2+R_2^2ss_1\right)\Big\},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}X_{30}=-\frac{ss_1}{\Delta_0}\left\{\rho_3(2\tilde{s}a^2+R_3^2ss_1)\left[-\rho_2(R_0^2-R_2^2)(s_1^2R_2^2+\tilde{s}R_3^2)-\right.\right.\\ \left.-\rho_1(R_2^2-R_3^2)(s_1^2R_2^2+\tilde{s}R_0^2)\right]-\rho_2^2\tilde{s}s_1(R_2^2-R_3^2)(R_0^2-R_2^2)(2a^2s_1+R_3^2s)+\\ +\rho_1\rho_2\left[2s_1^4R_3^2R_2^2(a^2-R_0^2)+s_1^3sR_3^2R_2^2(R_0^2-R_3^2)+\right.\\ +2\tilde{s}s_1^2((-2R_2^2+a^2)R_3^2R_0^2+a^2R_2^4)+\\ \left.\left.+\tilde{s}s_1R_3^2s\left(-R_2^4-R_0^2R_3^2+2R_2^2R_0^2\right)+2\tilde{s}^2R_2^2R_0^2(a^2-R_3^2)\right]\right\},\end{gathered}\tag{9}$$

$$Z_{10}=\frac{(-s+2i\Omega)ss_1^2R_0^2R_2^2}{\Delta_0}\Big\{\rho_3\Big[\rho_2\left(s_1^2R_3^2(R_2^2-a^2)+\tilde{s}(a^2R_2^2-2R_3^2a^2+R_3^4)\right)-$$
$$-\rho_1(R_2^2-R_3^2)(\tilde{s}a^2+R_3^2s_1^2)\Big]-\rho_2^2\tilde{s}(R_2^2-R_3^2)(a^2-R_3^2)+$$
$$+\rho_1\rho_2(a^2-R_3^2)(s_1^2R_3^2+\tilde{s}R_2^2)\Big\},$$
$$Z_{30}=\frac{(-s+2i\Omega)ss_1^2a^2R_3^2}{\Delta_0}\left\{\rho_3\left[-\rho_2(s_1^2R_2^2-\tilde{s}R_3^2)(R_0^2-R_2^2)\right.\right.-$$
$$-\rho_1(R_2^2-R_3^2)(\tilde{s}R_0^2+R_2^2s_1^2)]-\rho_2^2\tilde{s}(R_2^2-R_3^2)(R_0^2-R_2^2)+$$
$$\left.+\rho_1\rho_2\left[s_1^2R_2^2(R_0^2-R_3^2)+\tilde{s}(-R_3^2R_0^2+2R_2^2R_0^2-R_2^4)\right]\right\},$$
$$\Delta_0=\rho_3\left(s_1^2R_3^2+\tilde{s}a^2\right)\left[-\rho_2\left(R_0^2-R_2^2\right)\left(s_1^2R_2^2+\tilde{s}R_3^2\right)-\rho_1\left(s_1^2R_2^2+\tilde{s}R_0^2\right)\left(R_2^2-R_3^2\right)\right]-$$
$$-\left(a^2-R_3^2\right)\left[\rho_2^2\tilde{s}s_1^2\left(R_2^2-R_3^2\right)\left(R_0^2-R_2^2\right)+\rho_1\rho_2\left(s_1^2R_2^2+\tilde{s}R_0^2\right)\left(s_1^2R_3^2+\tilde{s}R_2^2\right)\right].$$

Здесь $s_1=s+i\Omega$, $\tilde{s}=s^2-2is\Omega+\Omega^2$.

Из (9) следует, что $Z_{10}=0$ при $R_0=0$.

Далее рассмотрим случай, когда $k\neq 0$. Из граничных условий (5)–(7) получим линейную систему для определения неизвестных X_{1k},X_{2k},X_{3k} и Z_{1k},Z_{2k},Z_{3k}

$$\begin{cases} J_aX_{3k}+Y_aZ_{3k}=b_1,\\ J_{R_0}X_{1k}+Y_{R_0}Z_{1k}=b_6,\\ \tilde{J}_{R_2}X_{1k}+J_{1R_2}X_{2k}+\tilde{Y}_{R_2}Z_{1k}+Y_{1R_2}Z_{2k}=b_2,\\ J_{R_2}X_{1k}-J_{R_2}X_{2k}+Y_{R_2}Z_{1k}-Y_{R_2}Z_{2k}=0,\\ \tilde{J}_{R_3}X_{2k}+J_{1R_3}X_{3k}+\tilde{Y}_{R_3}Z_{2k}+Y_{1R_3}Z_{3k}=b_3,\\ J_{R_3}X_{2k}-J_{R_3}X_{3k}+Y_{R_3}Z_{2k}-Y_{R_3}Z_{3k}=0.\end{cases}\tag{10}$$

Здесь

$$J_a=\alpha skaJ_0(\alpha ka)-(s+2i\Omega)\,J_1(\alpha ka),J_{R_0}=\alpha skR_0J_0(\alpha kR_0)-(s+2i\Omega)\,J_1(\alpha kR_0),$$
$$J_{R_2}=\alpha skR_2J_0(\alpha kR_2)-(s+2i\Omega)\,J_1(\alpha kR_2),$$
$$Y_a=\alpha skaY_0(\alpha ka)-(s+2i\Omega)\,Y_1(\alpha ka),Y_{R_0}=\alpha skR_0Y_0(\alpha kR_0)-(s+2i\Omega)\,Y_1(\alpha kR_0),$$
$$Y_{R_2}=\alpha skR_2Y_0(\alpha kR_2)-(s+2i\Omega)\,Y_1(\alpha kR_2),$$
$$J_{1R_2}=-\rho_2s^*J_1(\alpha kR_2),Y_{1R_2}=-\rho_2s^*Y_1(\alpha kR_2),J_{1R_3}=-\rho_3s^*J_1(\alpha kR_3),$$
$$Y_{1R_3}=-\rho_3s^*Y_1(\alpha kR_3),\tilde{J}_{R_2}=(\rho_2-\rho_1)\,\Omega^2J_{R_2}+s^*\rho_1J_1(\alpha kR_2),$$
$$\tilde{Y}_{R_2}=(\rho_2-\rho_1)\,\Omega^2Y_{R_2}+s^*\rho_1Y_1(\alpha kR_2),\tilde{J}_{R_0}=\Delta\rho\Omega^2J_{R_0}+s^*\rho_1J_1(\alpha kR_0),$$
$$\tilde{Y}_{R_0}=\Delta\rho\Omega^2Y_{R_0}+s^*\rho_1Y_1(\alpha kR_0),\;\; s^*=s\left(s^2+4\Omega^2\right),\;\; b_1=-2as\,(s+i\Omega)\,(s-2i\Omega)\,,$$
$$b_6=-2R_0s\,(s+i\Omega)\,(s-2i\Omega)\,,b_2=(\rho_2-\rho_1)\,s^2R_2\,(s+i\Omega)^2\,(s-2i\Omega)\,,$$
$$b_3=(\rho_3-\rho_2)\,R_3s^2\,(s-2i\Omega)\,(s+i\Omega)^2\,,$$
$$\tilde{J}_{R_3}=(\rho_3-\rho_2)\,\Omega^2J_{R_3}+s^*\rho_2J_1(\alpha kR_3),\tilde{Y}_{R_3}=(\rho_3-\rho_2)\,\Omega^2Y_{R_3}+s^*\rho_2Y_1(\alpha kR_3).$$

Система (10) при $k \neq 0$, $R_0 = 0$ имеет решение

$$\begin{gathered}
X_{1k} = -\frac{1}{\Delta}\Big\{\rho_3\Big[-\rho_2 b_1(J_{R_3}Y_{1R_3} - J_{1R_3}Y_{R_3})(-J_{1R_2}Y_{R_2} + J_{R_2}Y_{1R_2}) - \\
-b_2(J_{R_2}Y_{R_3} - J_{R_3}Y_{R_2})(J_aY_{1R_3} - J_{1R_3}Y_a)\Big] + \\
+\rho_2\left[b_3(-J_{1R_2}Y_{R_2} + J_{R_2}Y_{1R_2}) + b_2(\tilde{J}_{R_3}Y_{R_2} - J_{R_2}\tilde{Y}_{R_3})\right](J_aY_{R_3} - J_{R_3}Y_a)\Big\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
X_{2k} = -\frac{1}{\Delta}\Big\{\rho_3\Big[-\rho_2 b_1 J_{R_2}Y_{1R_2}(J_{R_3}Y_{1R_3} - J_{1R_3}Y_{R_3}) - \\
-\rho_1 b_1\tilde{J}_{R_2}Y_{R_2}(J_{R_3}Y_{1R_3} - J_{1R_3}Y_{R_3}) - b_2 J_{R_2}Y_{R_3}(J_aY_{1R_3} - J_{1R_3}Y_a)\Big] + \\
+\rho_2 J_{R_2}(-\tilde{Y}_{R_3}b_2 + Y_{1R_2}b_3)(J_aY_{R_3} - J_{R_3}Y_a) + \rho_1 Y_{R_2}\tilde{J}_{R_2}b_3(J_aY_{R_3} - J_{R_3}Y_a)\Big\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
X_{3k} = \frac{1}{\Delta}\Big\{\rho_3\Big[\rho_2 b_1 J_{R_2}Y_{1R_3}(J_{R_3}Y_{1R_2} - J_{1R_2}Y_{R_3}) - \rho_1 b_1\tilde{J}_{R_2}Y_{R_3}(J_{R_2}Y_{R_3} - J_{R_3}Y_{R_2})\Big] - \\
-\rho_2^2 b_1 J_{R_2}Y_{R_3}(J_{1R_2}\tilde{Y}_{R_3} - \tilde{J}_{R_3}Y_{1R_2}) + \rho_2\Big[-\rho_1\tilde{J}_{R_2}Y_{R_3}b_1(-Y_{R_2}\tilde{J}_{R_3} + \tilde{Y}_{R_3}J_{R_2}) + \\
+J_{R_2}Y_a b_3(J_{R_3}Y_{1R_2} - J_{1R_2}Y_{R_3}) + J_{R_2}Y_a b_2(\tilde{J}_{R_3}Y_{R_3} - J_{R_3}\tilde{Y}_{R_3})\Big] - \\
-\rho_1 Y_a\tilde{J}_{R_2}b_3(J_{R_2}Y_{R_3} - J_{R_3}Y_{R_2})\Big\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Z_{2k} = -\frac{J_{R_2}}{\Delta}\Big\{\rho_3\Big[\rho_2 b_1 J_{1R_2}(J_{R_3}Y_{1R_3} - J_{1R_3}Y_{R_3}) + \rho_1 b_1\tilde{J}_{R_2}(J_{R_3}Y_{1R_3} - J_{1R_3}Y_{R_3}) + \\
+b_2 J_{R_3}(J_aY_{1R_3} - J_{1R_3}Y_a)\Big] - \rho_2(-\tilde{J}_{R_3}b_2 + J_{1R_2}b_3)(J_aY_{R_3} - J_{R_3}Y_a) - \\
-\rho_1\tilde{J}_{R_2}b_3(J_aY_{R_3} - J_{R_3}Y_a)\Big\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Z_{3k} = \frac{1}{\Delta}\left\{\rho_3\left[\rho_2 b_1 J_{R_2}J_{1R_3}(J_{R_3}Y_{1R_2} - J_{1R_2}Y_{R_3}) - \rho_1 b_1\tilde{J}_{R_2}J_{1R_3}(J_{R_2}Y_{R_3} - J_{R_3}Y_{R_2})\right] - \right. \\
-\rho_2^2 b_1 J_{R_2}J_{R_3}(J_{1R_2}\tilde{Y}_{R_3} - \tilde{J}_{R_3}Y_{1R_2}) + \rho_2\Big[-\rho_1\tilde{J}_{R_2}J_{R_3}b_1(-Y_{R_2}\tilde{J}_{R_3} + \tilde{Y}_{R_3}J_{R_2}) + \\
+J_{R_2}J_a\Big(b_3(J_{R_3}Y_{1R_2} - J_{1R_2}Y_{R_3}) + b_2(\tilde{J}_{R_3}Y_{R_3} - J_{R_3}\tilde{Y}_{R_3})\Big)\Big] - \\
\left.-\rho_1 J_a\tilde{J}_{R_2}b_3(J_{R_2}Y_{R_3} - J_{R_3}Y_{R_2})\right\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\Delta = \rho_3\Big\{\rho_2 J_{R_2}(Y_{1R_3}J_a - Y_aJ_{1R_3})(Y_{1R_2}J_{R_3} - Y_{R_3}J_{1R_2}) - \\
-\rho_1\tilde{J}_{R_2}(Y_{1R_3}J_a - Y_aJ_{1R_3})(Y_{R_3}J_{R_2} - Y_{R_2}J_{R_3})\Big\} + \\
+\rho_2^2 J_{R_2}(-Y_{1R_2}\tilde{J}_{R_3} + \tilde{Y}_{R_3}J_{1R_2})(Y_aJ_{R_3} - Y_{R_3}J_a) + \\
+\rho_1\rho_2\tilde{J}_{R_2}(Y_aJ_{R_3} - Y_{R_3}J_a)(-Y_{R_2}\tilde{J}_{R_3} + \tilde{Y}_{R_3}J_{R_2}).
\end{gathered}$$

Аналогичное решение имеет система (10) и при $R_0 \neq 0$. В виду громоздкости приводить его не будем.

Полученное решение (9) включает в себя ряд частных случаев: при $\rho_3 = 0$ мы имеем решение для двухслойной жидкости, а при $\rho_3 = \rho_2 = 0$ – для однородной.

В дальнейшем для исследования устойчивости вращения твердого тела нам понадобятся корни уравнения

$$\Delta = 0.$$

Следует отметить, что корни этого уравнения описывают собственные частоты колебаний равномерно вращающейся трехслойной идеальной жидкости и их подробное исследование было проведено в работе [4].

Уравнение возмущенного движения твердого тела с жидкостью имеет вид [1–3, 5]

$$A\left[(\ddot{l}+i\ddot{m})+2i\Omega(\dot{l}+i\dot{m})-\Omega^2(l+im)\right]+C\Omega\left[\Omega(l+im)-i(\dot{l}+i\dot{m})\right]=$$
$$=m_0gd(l+im)-i(M_X+iM_Y)$$

или

$$A\,(s+i\Omega)^2-iC\Omega\,(s+i\Omega)=\frac{\Omega^2C^2}{4A}\beta-i\frac{M_X+iM_Y}{l_s+im_s}.$$

Вычислим момент, действующий со стороны трехслойной жидкости на твердое тело

$$M_x=\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Sigma_i}P_i\,[y\cos(z\nu)-z\cos(y\nu)]dS,$$
$$M_y=\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Sigma_i}P_i\,[z\cos(x\nu)-y\cos(z\nu)]dS.$$

Здесь Σ_i – поверхность контакта i-ой жидкости с твердым телом; $\cos(x\nu)$, $\cos(y\nu)$, $\cos(z\nu)$ – косинусы внешней нормали $\vec{\nu}$ к поверхности Σ_i.

Как и в работах [1–3, 5], с точностью до малых первого порядка получим

$$M_X^s+iM_Y^s=M_x^s+iM_y^s.$$

$$\frac{M_x^s+iM_y^s}{l_s+im_s}=\pi ih\left\{2d^2a\rho_m(X_{m0}a+\frac{Z_{m0}}{a})+(\Omega^2+s^2)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{2}{3}a^2(3d^2+h^2)\rho_m-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\rho_i\tilde{b}_{0i}\right]+\sum_{j=0}^{\infty}C_k^2\sum_{i=1}^{m}(\tilde{J}_{ik}X_{ik}+\tilde{Y}_{ik}Z_{ik})\right\},\tag{11}$$

где

$$\beta=4m_0gdA/\left(C^2\Omega^2\right),s=i(\tau-1)\Omega,\tilde{J}_{ik}=\rho_1\tilde{s}J_{1k},\tilde{J}_{2k}=\rho_2\tilde{s}J_{2k},\tilde{Y}_{2k}=\rho_2\tilde{s}Y_{2k}.$$
$$\tilde{J}_{3k}=\rho_3\left[\alpha J_1(\alpha ka)+\tilde{s}J_{3k}\right],\tilde{Y}_{3k}=\rho_3\left[\alpha Y_1(\alpha ka)+\tilde{s}Y_{2k}\right],$$
$$J_{2k}=2\left[R_2J_1(\alpha kR_2)-R_1J_1(\alpha kR_1)\right]-\alpha k\left[R_2^2J_0(\alpha kR_2)-R_1^2J_0(\alpha kR_1)\right],$$
$$Y_{2k}=2\left[R_2Y_1(\alpha kR_2)-R_1Y_1(\alpha kR_1)\right]-\alpha k\left[R_2^2Y_0(\alpha kR_2)-R_1^2Y_0(\alpha kR_1)\right],$$
$$J_{3k}=2\left[R_3J_1(\alpha kR_3)-R_2J_1(\alpha kR_2)\right]-\alpha k\left[R_3^2J_0(\alpha kR_3)-R_2^2J_0(\alpha kR_2)\right],$$
$$Y_{3k}=2\left[R_3Y_1(\alpha kR_3)-R_2Y_1(\alpha kR_2)\right]1-\alpha k\left[R_3^2Y_0(\alpha kR_3)-R_2^2Y_0(\alpha kR_2)\right],$$
$$\tilde{b}_{01}=R_1^4-R_0^4,\tilde{b}_{02}=R_2^4-R_1^4,\tilde{b}_{03}=R_3^4-R_2^4.$$

Тогда частотное уравнение с учетом (11) и $s = i(\tau-1)\Omega$ при $R_0 \neq 0$ примет вид

$$A\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{4A}\beta = \pi h\Bigg\{\frac{2h^2}{\Omega^2}\Big[R_0\rho_1(X_{10}R_0 + Z_{10}/R_0) - \\ -a\rho_m(X_{m0}a + Z_{m0}/a)\Big] + \tau(\tau-2)\Big[\frac{2}{3}\left(3h^2+c^2\right)\left(R_0\rho_1 + a^2\rho_m\right) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\rho_i\tilde{b}_{0i}\Big] - \frac{1}{\Omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}C_k^2\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{J}_{ik}X_{ik} + \tilde{Y}_{ik}Z_{ik}\right)\Bigg\}, \qquad (12)$$

а при $R_0 = 0$:

$$A\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{4A}\beta = \pi h\Bigg\{-\frac{2h^2 a\rho_m}{\Omega^2}\left(X_{m0}a + Z_{m0}/a\right) + \tau(\tau-2)\times \\ \times\Big[\frac{2}{3}\left(3h^2+c^2\right)a^2\rho_m - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\rho_i\tilde{b}_{0i}\Big] - \frac{1}{\Omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}C_k^2\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{J}_{ik}X_{ik} + \tilde{Y}_{ik}Z_{ik}\right)\Bigg\}. \qquad (13)$$

Таким образом, полученные частотные уравнения (12)–(13) описывают малые колебания равномерно вращающегося твердого тела, содержащего трехслойную идеальную жидкость. Спектр частот колебаний описывается множеством действительных корней этого уравнения. Необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка состоит в требовании, чтобы все корни уравнений (12)–(13) были действительными. Следует отметить, это уравнение является довольно сложным для аналитического исследования. При $\rho_1 = \rho_2 = 0$ уравнения (12)–(13) совпадают с [1–3, 5].

По аналогии с работами [1–3, 5], можно показать, что при $\beta < 1$ ($\Omega^2 > \dfrac{4m_0 dgA}{C^2}$) волчок неустойчив, когда $D < 0$ и

$$|\tau_0 - \tau_{nu}| \leq 2\sqrt{\frac{-D(\tau_0)}{C\sqrt{1-\beta}}}, \qquad (14)$$

где $D(\tau_0)$ – вычет правой части уравнений (12)–(13), а τ_0 – корень уравнения $\Delta = 0$.

Из неравенства (14) следует, что опасность потери устойчивости имеется всегда, когда одна из собственных частот колебаний стратифицированной жидкости близка к нутации твердого тела $\tau_{nu} \to \tau_0$. Бесконечному числу собственных колебаний соответствует бесконечно много областей неустойчивости. Однако, практическое значение могут иметь лишь несколько первых областей, так как вязкость жидкости сводит на нет области неустойчивости для собственных частот более высокого порядка [1].

Были проведены численные исследования условий устойчивости (14) при постоянной массе жидкости $\sum\limits_{i=1}^{3}\varepsilon_i\left(R_i^2 - R_{i-1}^2\right) = 0$ и различных $\tilde{c} = c/a$, ε_i и R_i, где

$\rho_i = \rho(1+\varepsilon_i)$ $(\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0)$. На основании проведенных численных исследований показано, что если в идеальной однородной вращающейся жидкости произошла кусочно-постоянная по плотности стратификация, то это приводит к уменьшению собственных частот колебаний жидкости. В трехслойной жидкости, как и в двухслойной, появляется предельная частота, остальные частоты незначительно отличаются от частот колебаний трехслойной жидкости при замене внутренних поверхностей твердыми перегородками.

Предварительные численные вычисления показали, что при постоянной массе жидкости полюса τ_0 не представляют большого интереса, если $\tau_0 < 0$ или $\tau_0 > 0.20$. Для $0 \le \tau_0 \le 0.2$ величина вычета $D(\tau_0) < 0$.

Результаты численных расчетов представлены в таблицах 1–3 для $a = 1$, $R_3 = 0.5, R_2 = 0.05$.

Таблица 1. $m = 1$ *при* $\rho_1 = 1$

τ_0	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$
0.02	0.968	0.398	0.230
0.04	0.991	0.408	0.236
0.06	1.015	0.419	0.242
0.08	1.039	0.430	0.249
0.1	1.065	0.442	0.256
0.12	1.092	0.454	0.263
0.14	1.120	0.467	0.271
0.16	1.149	0.480	0.279
0.18	1.181	0.494	0.287
0.2	1.214	0.509	0.295

Таблица 2. $m = 2$ *при* $\rho_1 = 0.9, \rho_2 = 1.73$, $\varepsilon_1 = -0.1$, $\varepsilon_2 = 0.73$

τ_0	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$
0.02	0.98008	0.49813	0.34358
0.04	1.00286	0.51053	0.35257
0.06	1.02647	0.52333	0.36189
0.08	1.05098	0.53656	0.37156
0.1	1.07646	0.55024	0.38162
0.12	1.10300	0.56441	0.39209
0.14	1.13070	0.57911	0.40300
0.16	1.15964	0.59436	0.41438
0.18	1.18996	0.61022	0.42628
0.2	1.22178	0.62673	0.43872

Таблица 3. $m = 3$ *при* $\rho_1 = 0.9,\ \rho_2 = 1.96,\ \rho_3 = 1.097,\ \varepsilon_1 = -0.1,\ \varepsilon_2 = 0.96,\ \varepsilon_3 = 0.097$

τ_0	$c/\left(a(2j+1)\right)$	$c/\left(a(2j+1)\right)$	$c/\left(a(2j+1)\right)$
0.02	1.03032	0.48856	0.31212
0.04	1.05436	0.50147	0.32055
0.06	1.07907	0.51481	0.32928
0.08	1.10450	0.52863	0.33832
0.1	1.13069	0.54294	0.34770
0.12	1.15769	0.55780	0.35744
0.14	1.18556	0.57323	0.36755
0.16	1.21435	0.58927	0.37808
0.18	1.24413	0.60597	0.38906
0.2	1.27497	0.62339	0.40051

Из табл. 1–3 следуют следующие интервалы неустойчивости:

$$m = 1 \quad (0.968;\ 1.214) \cup (0.398;\ 0.509) \cup (0.230;\ 0.295) \cup ...,$$

$$m = 2 \quad (0.98008;\ 1.22178) \cup (0.49813;\ 0.62673) \cup (0.34358;\ 0.43872) \cup ...,$$

$$m = 3 \quad (1.03032;\ 1.27497) \cup (0.48856;\ 0.62339) \cup (0.31212;\ 0.40051) \cup ...,$$

Таким образом, из приведенных интервалов неустойчивости следует, что если в однородной ($m = 1$) вращающейся жидкости произошла двухслойная ($m = 2$) или трехслойная ($m = 3$) стратификация, то это приводит к уменьшению интервалов неустойчивости.

4. Выводы. В предположении, что угловая скорость вращения волчка достаточно большая, выведено характеристическое уравнение возмущенного движения волчка Лагранжа с коаксиальной цилиндрической полостью полностью заполненной трехслойной идеальной жидкостью. Получены необходимые условия устойчивости в случае массивного твердого тела с малым количеством трехслойной жидкости.

1. *Stewartson R.* On the stability of a spinning top containing liquid // J.Fluid Mechanics. – 1959. – Vol. 5, pt. 4. – P. 577–592.
2. *Кононов Ю.Н., Антоньева Н.В.* Об устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с коаксиальной цилиндрической полостью, заполненной двухслойной идеальной жидкостью. – Вiсник Донецького унiверситету. Серiя А. – 2012. – № 2. – С. 46–50.
3. *Кононов Ю.Н., Антоньева Н.В.* Влияние стратификации на устойчивость вращения волчка Лагранжа с идеальной жидкостью. – Харьков: ХНУ, Сборник материалов международной научной школы-конференции «Тараповские чтения», заочная конференция (1–31 мая 2012г.). – 2012. – С. 64.
4. *Кононов Ю.Н., Дрынь С.В.* Свободные колебания вращающейся трехслойной идеальной жидкости. – Вiсник Донецького унiверситету. Серiя А. – 2002. – № 1. – С. 145–149.
5. *Куликов В.П., Самсонов В.А.* О малых колебаниях около тривиального вращения на струне твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью // Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 4. – С. 33–37.
6. *Кононов Ю.Н.* О свободных колебаниях вращающейся идеальной стратифицированной жидкости. – Вiсник Донецького унiверситету. Серiя А. – 1998. – № 2. – С. 56–61.

N. V. Antonieva, Yu. N. Kononov

On the stability of uniform rotation Lagrange top containing three-layer ideal fluid.

The problem of the stability of the uniform rotation of the Lagrange top with a coaxial cylindrical cavity is completely filled with a perfect three-layer fluid. Assuming that the inner surface of the liquids at a sufficiently large value of the angular velocity close to the cylindrical frequency equation is derived. Obtained and investigated the necessary conditions for the stability of the uniform rotation for the bulk solids and a small amount of liquid.

Keywords: *rotating rigid body, resistance, coaxial cylindrical cavity, rotating three-layer ideal fluid.*

Н. В. Антоньєва, Ю. М. Кононов

Про стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа, що містить тришарову ідеальну рідину.

Розглянуто задачу про стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа з коаксіальною циліндричною порожниною, повністю заповненою тришаровою ідеальною рідиною. У припущенні, що внутрішні поверхні розділу рідин при досить великій величині кутової швидкості обертання близькі до циліндричних, виведено частотне рівняння. Отримано і досліджено необхідні умови стійкості рівномірного обертання для масивного твердого тіла і малої кількості рідини.

Ключові слова: *обертове тверде тіло, стійкість, коаксіальна циліндрична порожнина, обертова тришарова ідеальна рідина.*

Донецкий национальный ун-т
kononov_yuriy@telenet.dn.ua
tasenka5@ukr.net

Получено 19.02.13