

УДК 531.3

©2013. Б. В. Успенский, К. В. Аврамов

К НЕЛИНЕЙНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ФОРМАМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой статье предлагается модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Использование подхода, предложенного в этой статье, позволяет в два раза сократить размерность системы нелинейных алгебраических уравнений, из которой определяются нелинейные нормальные формы. Рассматриваются механические системы с двумя степенями свободы, описывающие колебания элементов двигателей внутреннего сгорания. Исследованы различные свойства нелинейных нормальных форм в этих системах.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы Шоу–Пьера, свободные колебания, кусочно-линейные системы.

1. Введение. Системы с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейными упругими характеристиками описывают широкий класс технических систем. Поэтому много было предпринято усилий для исследования кусочно-линейных систем [1-5]. Нелинейные нормальные формы (ННФ) в кусочно-линейных системах рассматриваются в работах [6, 7]. Общая теория нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера описана в работах [8, 9]. ННФ Каудерера–Розенберга подробно рассмотрены в монографии [10]. Обзор теоретических исследований по нелинейным формам представлен в статье [11], а обзор по прикладным исследованиям содержится в [12].

В этой статье предлагается новый вариант метода ННФ Шоу–Пьера для исследования кусочно-линейных систем. Основой для разработки этого алгоритма была статья [7]. В результате подхода, предложенного в настоящей статье, разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений для определения ННФ в два раза меньше по сравнению с системой, предложенной в [7].

2. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы и трilinearной упругой характеристикой:

$$M\ddot{z} + F(z) = 0; \quad (1)$$

$$F(z) = \begin{cases} K_1 z & \Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3; \\ K_2 z - b_2 & h^T z < \Delta_2; \\ K_3 z - b_3 & \Delta_3 < h^T z, \end{cases} \quad (2)$$

где z – вектор обобщенных координат системы размерности N ; $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$; h – вектор-столбец размерности N ; K_1, K_2, K_3 – положительно-определённые матрицы размерности $N \times N$; b_2, b_3 – вектора-столбцы, обеспечивающие непрерывность трilinearной упругой характеристики; $\Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$.

Теперь, следуя [6, 7], перейдем к главным координатам, соответствующим линейному участку системы $\Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{z} \leq \Delta_3$. Для этого введем замену переменных:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \quad (3)$$

где \mathbf{Q} – матрица собственных векторов матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_1$. Для простоты будем считать, что все собственные частоты системы, соответствующей матрице \mathbf{K}_1 , различны. Относительно координат $\boldsymbol{\eta}$ система (1) приобретает следующий вид:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\eta} = f(\boldsymbol{\eta}), \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{Q} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ – диагональная матрица, состоящая из квадратов собственных частот. Кусочно-линейная вектор-функция $f(\boldsymbol{\eta}) = (f_1, \dots, f_N)$ принимает следующий вид:

$$f(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \mathbf{Z}^{(2)}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_2 & \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \mathbf{Z}^{(3)}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_3 & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{Z}^{(2)} = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_2\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}^{(3)} = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_3\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}^{(2)} = \{z_{ij}^{(2)}\}$, $\mathbf{Z}^{(3)} = \{z_{ij}^{(3)}\}$.

3. Построение ННФ Шоу-Пьера. В соответствии с представлением об ННФ как инвариантных многообразиях [9], ННФ представляет собой семейство режимов движения системы, которые лежат на двумерном инвариантном многообразии в фазовом пространстве системы. В такой формулировке одна из пар фазовых координат системы выбирается в качестве ведущей, определяя специфический режим движения на многообразии. Остальные степени свободы считаются ведомыми координатами, зависящими от ведущих. Динамика поведения ведущих координат определяет движение ведомых через эти зависимости.

Следуя работам [8, 9], введем ведущие координаты $(\eta_i, \dot{\eta}_i)$. Для этих координат воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\eta_i(t) = a(t)\cos\phi(t); \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t)\sin\phi(t). \quad (6)$$

Тогда ведомые координаты выражаются через уравнения, описывающие нелинейную нормальную форму:

$$\begin{aligned} \eta_j(a, \phi) &= P_j(a, \phi); \\ \dot{\eta}_j(a, \phi) &= R_j(a, \phi); j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Движения на ННФ описываются следующей динамической системой:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{f_i}{\omega_i} \sin\phi; \\ \dot{\phi} &= \omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos\phi. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $P_j(a, \phi)$ из (7) разложим по ортонормированной системе базисных функций:

$$P_j(a, \phi) = \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} T_{l,m}(a, \phi), \quad (9)$$

где $T_{l,m}(a, \phi) = A_l(a) \cos(m-1)\phi$; $A_l(a), l = 1, \dots, N_a$ – система ортогональных на интервале $[a_{1,0}; a_{2,0}]$ базисных функций; $C_j^{(l,m)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подчеркнем, что в работах [7-9] производилось разложение функции $R_j(a, \phi)$ по системе ортонормированных функций. В предлагаемом здесь подходе это разложение не используется, что сокращает в два раза размерность разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений. В этом состоит основное преимущество предлагаемого здесь метода.

Используя соотношения (7, 9) и правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} (A_l' \cos[(m-1)\phi] \cdot \dot{a} - A_l(m-1) \sin[(m-1)\phi] \cdot \dot{\phi}); \\ \ddot{\eta}_j &= \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} (\cos[(m-1)\phi] [A_l'' \dot{a}^2 + \\ &+ A_l' \ddot{a} - A_l(m-1)^2 \dot{\phi}^2] - \sin[(m-1)\phi] [2(m-1) A_l' \dot{a} \dot{\phi} + A_l \ddot{\phi}]). \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения первых производных, входящих в соотношения (10), использовались уравнения (8). Для расчета вторых производных использовались следующие соотношения:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{f_i}{\omega_i} \sin\phi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\phi} \frac{\partial f_i}{\partial \phi} \right] \sin\phi + f_i \cos\phi \right); \quad (11)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{dt} \left(\omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos\phi \right) = -\frac{1}{a\omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\phi} \frac{\partial f_i}{\partial \phi} - f_i \frac{\dot{a}}{a} \right] \cos\phi - f_i \sin\phi \cdot \dot{\phi} \right). \quad (12)$$

Отметим, что частные производные от функции f_i из (11, 12) определяются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial a} &= \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}; \end{cases} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \phi} &= \begin{cases} 0 & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \sum_{N}^{k=1} z_i k^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_k}{\partial a} &= \begin{cases} \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} A_l' \cos(m-1)\phi & k \neq i; \\ \cos\phi & k = i; \end{cases} \\ \frac{\partial \eta_k}{\partial \phi} &= \begin{cases} \sum_{N_a}^{l=1} \sum_{N_\phi}^{m=1} C_j^{(l,m)} (m-1) A_l \sin(m-1)\phi & k \neq i; \\ -a\omega_i \sin\phi & k = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Основными неизвестными ННФ (9) являются коэффициенты $C_j^{(l,m)}$. Для их расчета к динамической системе (4) применим метод Галеркина, который выражается так:

$$\int_{a_{1,0}}^{a_{2,0}} \int_0^{2\pi} \{\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\boldsymbol{\eta})\} T_{l,m} da d\phi = 0$$

$$j = 1, \dots, N; j \neq i;$$

$$l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\phi.$$
(14)

В уравнении (14) вместо вторых производных вводят соотношения (10, 11, 12).

Система (14) представляет собой систему $(N - 1)N_a N_\phi$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $(N - 1)N_a N_\phi$ коэффициентов $C_j^{l,m}$. Если эти коэффициенты рассчитаны, то ННФ (9) приближенно определена. После определения ННФ, исследуется динамика на ней. Динамика на форме описывается системой (8).

Для численного решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона. Интегрирование в (14) осуществляется по области $a \in [a; a_0], \phi \in [0; 2\pi]$. Область интегрирования $a \in [0; a_0]$ разбивается на N_s участков $[a_j; a_{j+1}]; j = 1, \dots, N_s; a_1 = 0; a_{N_s+1} = a_0$. На каждом участке строится своя система ортогональных базисных функций $A_l, l = 1, \dots, N_a$. Следуя [7-9], на каждом участке воспользуемся линейными базисными функциями:

$$A_1(a) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j}; A_2(a) = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j}.$$

Таким образом, в результате выполнения вышеописанной процедуры на каждой из полос $[a_j; a_{j+1}]$ может быть найдена ННФ в виде (6)-(10). ННФ системы на интервале $a \in [0; a_0]$ представляет собой объединение ННФ для всех участков $[a_j; a_{j+1}]$.

Для того, чтобы найти выражение исходных координат \mathbf{z} через параметры a, ϕ , следует применить линейное преобразование координат (3) к найденной форме.

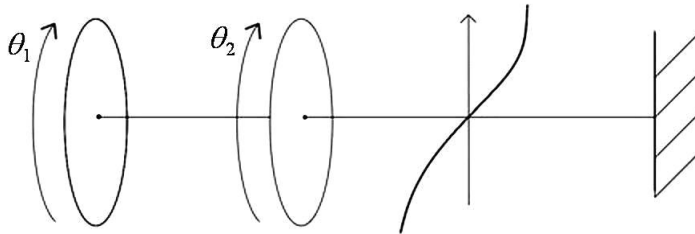


Рис. 1. Механическая система

4. Численный анализ механических систем с конечным числом степеней свободы. С помощью нелинейных нормальных форм исследуем крутильные колебания силовых передач двигателей внутреннего сгорания с противоположно движущимися поршнями. Модели таких систем рассмотрены в работах [13-15]. Крутильные колебания опишем системой с кусочно-линейной упругой характеристикой,

представленной на рис. 1. Эта система описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_1(\theta_2 - \theta_1) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - c_1(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) &= 0; \end{aligned} \tag{15}$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1 \theta_2 & \theta_2 < \Delta; \\ c_2 \theta_2 - \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \tag{16}$$

где θ_1, θ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебания двух коленчатых валов двигателя; c_1 – жесткость зубчатой передачи между коленчатыми валами. Билинейная упругая характеристика $f(\theta_2)$ описывает нелинейную упругую муфту.

Численный анализ проводился для следующих значений параметров системы:

$$c_1 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}; \Delta = 1.04 \text{ rad}; I_1 = 0.3 \text{ kg/m}^2; I_2 = 0.45 \text{ kg/m}^2. \tag{17}$$

Собственные частоты линейных колебаний системы с малыми амплитудами таковы:

$$\omega_1 = 18.25 \text{ rad/s}; \omega_2 = 44.72 \text{ rad/s}.$$

Проводились расчеты ННФ с помощью подхода представленного выше. Результаты

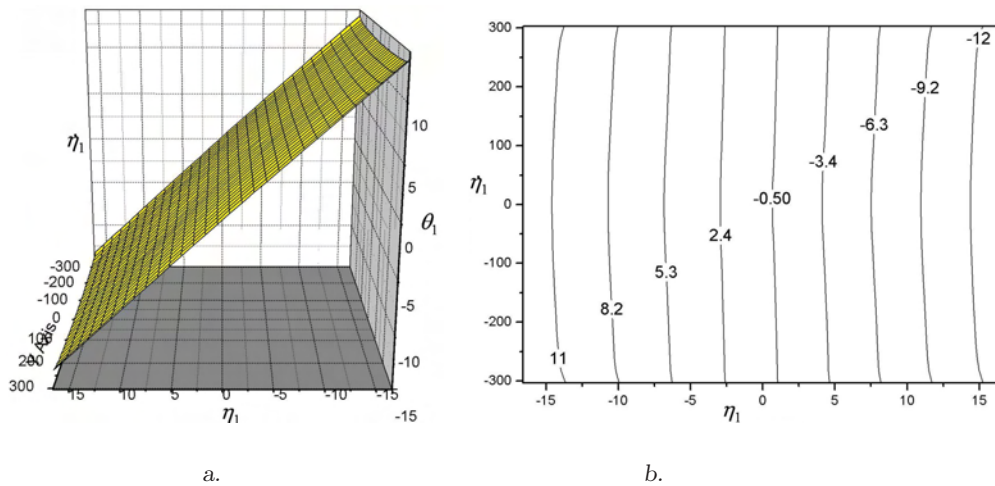


Рис. 2. Нелинейная нормальная форма для случая $c_2 = 0.5c_1$; на рисунке а представлена поверхность в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$, а на рисунке б показаны линии уровня этой поверхности

расчетов для $c_2 = 0.5c_1$ приводится на рис. 2. На рис. 2а представлена ННФ в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Из этого рисунка следует, что ННФ достаточно близка к плоскости. Напомним, что плоскостью является нормальная форма линейной системы. Для исследования отличия нелинейной нормальной формы (рис. 2а) от плоскости строились линии уровня. Они представлены на рис. 2б. Как видно из этого рисунка, линии уровня отличаются от прямых, что свидетельствует о влиянии нелинейности

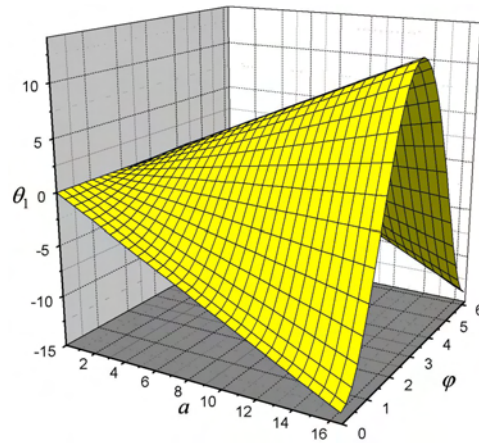


Рис. 3. ННФ в пространстве a, ϕ, θ_1

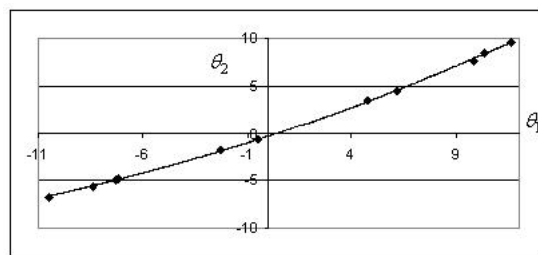


Рис. 4. ННФ в конфигурационном пространстве

на вид ННФ. Следуя работам [7-9], ННФ (рис. 2а) построим в системе координат a, ϕ, θ_1 . Результаты расчета представлены на рис. 3.

Полученная ННФ перестраивается в конфигурационном пространстве [11] обобщенных координат системы (15). Результаты расчетов представляются сплошной линией на рис. 4. Итак, исследуемая ННФ также является формой Каудерера-Розенберга, так как ее можно представить в виде однозначной функции $\theta_2(\theta_1)$. Отметим некоторые свойства нормальной формы Каудерера-Розенберга. Во-первых, эта нормальная форма не проходит через точку $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Во-вторых, эта нормальная форма удовлетворяет соотношению: $|\max\theta_1| \neq |\min\theta_1|$. Оба эти свойства объясняются несимметричностью билинейной упругой характеристики рассматриваемой динамической системы.

Для подтверждения правильности расчетов нелинейной нормальной формы проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме. Результаты расчетов представлены на рис. 4 точками. Близость результатов, полученных различными методами, свидетельствует, что нелинейная нормальная форма получена правильно. На рис. 5 сплошной линией представлены движения системы $\theta_1(t)$ на нелинейной нормальной форме, а точками показаны результаты прямого численного интегрирования систе-

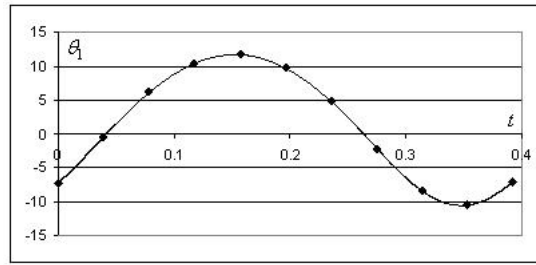


Рис. 5. Колебания системы с течением времени

мы (14) из начальных условий, соответствующих ННФ. Колебания, полученные из ННФ, и результаты прямого численного интегрирования системы (14) близки.

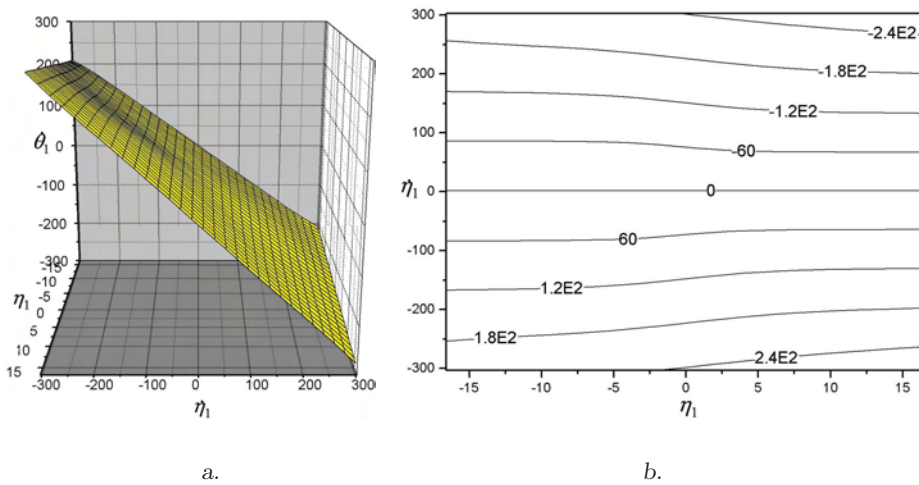


Рис. 6. ННФ в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$

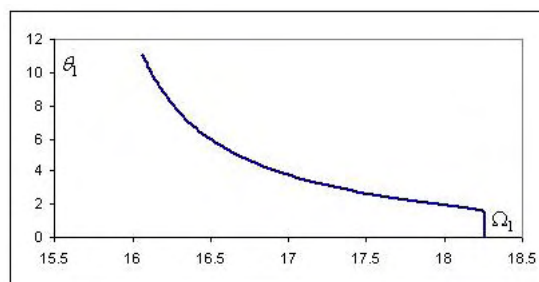


Рис. 7. Скелетная кривая колебаний θ_1

Как следует из рис. 2, ННФ билинейной системы близка к плоскости в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Подчеркнем, что эта ННФ значительно больше отклоняется от плоскости, если ее изобразить в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Эта поверхность изобража-

жена на рис. 6а. На рис. 6б показаны линии уровня. В этом случае они значительно отличаются от прямых.

ННФ рассчитывались для разных значений амплитуд колебаний a_0 . Для каждой амплитуды определялась частота движений на ННФ Ω_1 . Результаты такого расчета представлены на скелетной кривой (рис. 7). Теперь рассмотрим ННФ крутильных

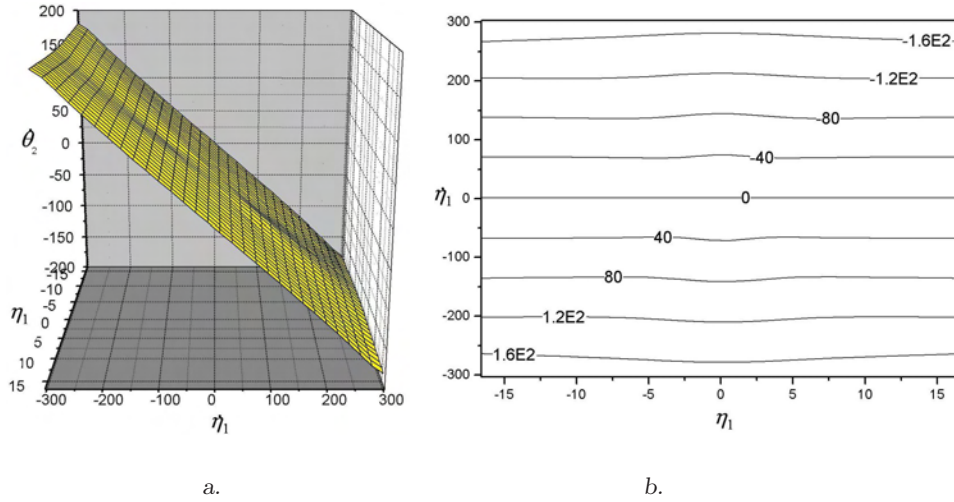


Рис. 8. ННФ системы с трилинейной упругой характеристикой

колебаний механической системы (15) с трилинейной упругой характеристикой, которая имеет следующий вид:

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_2\theta_2 + \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \leq -\Delta; \\ c_1\theta_2 & -\Delta < \theta_2 < \Delta; \\ c_2\theta_2 - \Delta(c_2 - c_1) & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим ННФ системы с нелинейностью (18) для параметров (17) при $c_2 = 0.7c_1$.

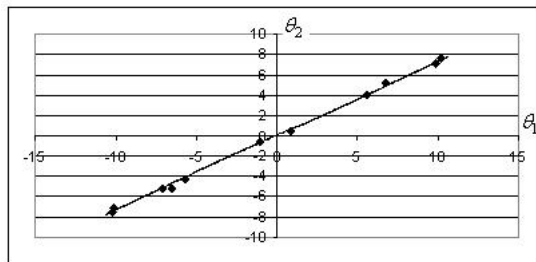


Рис. 9. Нелинейная нормальная форма Каудерера–Розенберга

ННФ этой системы в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_2)$ представлена на рис. 8а. На рис. 8б показаны линии уровня этой поверхности. Полученная ННФ близка к плоскости.

На рис. 9 показана эта же ННФ в конфигурационном пространстве θ_1, θ_2 . Итак, ННФ Каудерера-Розенберга $\theta_2(\theta_1)$ проходит через начало координат. Более того, она является симметричной относительно начала координат. Все эти свойства ННФ являются следствием симметричности трилинейной упругой характеристики. Для проверки правильности расчета ННФ (рис. 9) проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, которые находятся на ННФ. Результаты прямого численного интегрирования представлены точками на рис. 9. Близость результатов, полученных двумя методами, свидетельствует о правильности проведенных расчетов.

5. Заключение. В этой статье предложен альтернативный работам [6, 8] подход к расчету нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера в кусочно-линейной системе. В предлагаемом подходе разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений в два раза меньше аналогичной системы, рассмотренной в статье [7]. Показано, что в модальных координатах одного из линейных участков ННФ близка к плоскости. Она может существенно отличаться от плоскости, если ее перестроить в пространстве, в которое будут входить как модальные координаты одного линейного участка, так и обобщенные скорости исходной механической системы. Из результатов численного интегрирования следует, что ННФ в кусочно-линейных системах могут быть представлены в виде модальных линий в конфигурационном пространстве. Эти ННФ являются формами Каудерера-Розенберга.

1. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // Journal of Sound and Vibration. – 1983. – 1. – P. 129-155.
2. *Natsiavas* Stability and Bifurcation Analysis for Oscillator with Motion Limiting Constraints // Journal of Sound and Vibration, – 1990. – 1. – P. 97-102.
3. *Li G.H., Rand R.H., Moon F.C.* Bifurcation and Chaos in a forced zero-stiffness impact oscillator // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 1990. – 4. – P. 417-432.
4. *Bishop R.S.* Impact oscillators // Phil. Trans. R. Soc. – 1994. – A347. – P. 347-351.
5. *Ostrovsky L.A., Starobinets I.M.* Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator // Chaos. – 1995. – 5(3). – P. 496-500.
6. *Chen S.L., Shaw S.W.* Normal modes for piecewise linear vibratory systems // Nonlinear Dynamics, – 1996. – 10. – P. 135-164.
7. *Jiang D., Pierre C., Shaw S.W.* Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – 272. – P. 869-891.
8. *Shaw S.W., Pierre C.* Normal modes for non-linear vibratory systems. // Journal of Sound and Vibration, – 1993. – 164. – P. 85-124.
9. *Pesheck E., Pierre C., Shaw S.W.* A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – 249. – P. 971-993.
10. *Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V. and Zevin A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New-York: Wiley. – 1996.
11. *Mikhlin Yu., Avramov K.V.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // Appl. Mech. Review. – 2010. – 63. – P. 4-20.
12. *Avramov K.V., Mikhlin Yu.V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Review (in press).
13. *Avramov K.V., Karaban V.N.* Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics // International Applied Mechanics. – 1997. – 33(7). – P. 548-588.
14. *Avramov K.V.* Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces

// International Applied Mechanics. – 2002. – 38(9). – P. 1151-1156.

15. Avramov K.V., Belomyttsev A.S., Karaban V.N. Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics // International Applied Mechanics. – 1994. – 30(5). – P. 396-402.

B. V. Uspensky, K. V. Avramov

On Nonlinear Normal Modes of Piecewise-Linear Systems' Free Vibrations.

The paper is devoted to a modification of nonlinear normal modes technique by Shaw and Pierre for analysis of mechanical systems with piecewise-linear elastic response behavior. The approach that is introduced in the paper results in reducing of the dimensionality of the nonlinear system for determination nonlinear modes twice. Effectiveness of introduced technique is demonstrated at 2-DOF mechanical systems that simulate vibrations of elements of internal combusting engines. Properties of nonlinear normal modes are investigated in such systems.

Keywords: *Shaw-Pierre nonlinear normal modes, free vibrations, piecewise-linear systems.*

Б. В. Успенський, К. В. Аврамов

До нелінійних нормальних форм вільних коливань кусково-лінійних систем.

У статті запропоновано модифікацію методу нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра для дослідження механічних систем з кусково-лінійними пружними характеристиками. Використання викладеного у статті підходу дозволяє вдвічі скоротити розмірність системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення нелінійних нормальних форм. Розглядаються механічні системи з двома ступенями свободи, які описують коливання елементів двигунів внутрішнього згорання. Досліджено властивості нелінійних нормальних форм у цих системах.

Ключові слова: *Нелінійні нормальні форми Шоу-П'єра, вільні коливання, кусково-лінійні системи.*

Национальный технический ун-т „Харьковский политехнический институт“

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Uspensky.kubes@gmail.com

Получено 16.11.12