УДК 515.124

©2013. **Е. А. Петров**

СОХРАНЯЮЩИЕ ШАРЫ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Показано, что корневые представляющие деревья T_X и T_Y конечных ультраметрических пространств изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $F\colon X \to Y$.

Ключевые слова: *конечное ультраметрическое пространство, конечное корневое дерево, сохраняющее шары отображение, боллеан.*

1. Введение. В 2001 году на семинаре Workshop on General Algebra (см. [1]) внимание специалистов по теории решёток было обращено на следующую задачу И.М. Гельфанда. *Используя теорию графов, описать с точностью до изометрии все конечные ультраметрические пространства.* В [2] была доказана теорема про изоморфизм категории ультраметрических пространств и категории полных, атомных, древовидных, градуированных действительными числами решеток. В работе [3] взвешенный орграф определял конечное квазиультраметрическое пространство, а в симметричном случае авторы получали «каноническое представление» конечных ультраметрических пространств с использованием взвешенных корневых деревьев, причём эти деревья были изоморфны как корневые взвешенные графы тогда и только тогда, когда соответствующие им ультраметрические пространства были изометричными.

Каноническое представление из [3] можно, в определённом смысле, считать решением упомянутой выше задачи И.М. Гельфанда. Естественно возникает вопрос о применении полученного представления в исследовании ультраметрических пространств. В связи с этим заметим, что в последнее время началось изучение боллеанов (ballean) метрических и более общих пространств (см., например, [4], [5]). В метрическом случае боллеан – это просто совокупность шаров пространства и исследование боллеанов очевидным образом связано с изучением класса отображений, сохраняющих свойство «быть шаром».

В работе [6] изучался класс конечных ультраметрических пространств, являющихся «экстремалями» фундаментального неравенства Гомори-Ху. Для пространств (X, d), (Y, ρ) из этого класса было доказано, что их представляющие деревья T_X и T_Y изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $F\colon X \to Y$. Таким образом, вопрос об изоморфизме боллеанов пространств X и Y оказался эквивалентным вопросу об изоморфизме корневых деревьев, получаемых путём «забывания» заданных на них весовых функций. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай произвольных конечных ультраметрических пространств.

Напомним необходимые определения. Для конечного множества X через $|X|$ будем обозначать количество его элементов. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Если метрика d удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

для всех $x, y, z \in X$, то она называется *ультраметрикой*, а пара (X, d) называется *ультраметрическим пространством.* В дальнейшем будем рассматривать только те пространства (X, d), для которых $|X| \neq 0$. *Диаметром* метрического пространства (X, d) называется величина

$$\mathrm{diam} X := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Под *графом* мы понимаем пару (V, E), состоящую из непустого множества V и (возможно пустого) множества E, элементы которого есть неупорядоченные пары различных точек из V. Для графа $G = (V, E)$ множество $V = V(G)$ называется *множеством вершин*, а $E = E(G)$ – *множеством рёбер.* Если элементами множества E являются упорядоченные пары $\langle x, y\rangle \in V \times V$, то $G = (V, E)$ – ориентированный граф (*орграф*).

Граф H является *подграфом* графа G, $H \subseteq G$, если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Граф G *конечен*, если $|V(G)| < \infty$. Если $E(G) = \varnothing$, то G – *пустой граф.* Конечный непустой граф $P \subseteq G$ называется *путём* (в G), если вершины из P можно без повторений занумеровать в последовательность $(v_1, v_2, ..., v_n)$ так, что $(\{v_i, v_j\} \in E(P)) \Leftrightarrow (|i - j| = 1)$. Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющий их путь. *Связный граф* — граф, в котором все вершины связаны.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. Выбранная вершина дерева называется *корнем дерева.* Дерево, содержащее такую вершину, называется *корневым деревом.* Вершину дерева иногда называют *узлом. Уровень узла* — длина пути от корня до узла, m-й *ярус* дерева – множество узлов дерева, на уровне m от корня дерева. *Потомками* данного узла будем называть все узлы последующего яруса, смежные с данным узлом. *Лист* дерева – вершина дерева инцидентная с единственным ребром. Если T – корневое дерево с единственным узлом, то мы считаем, что этот узел является листом. *Внутренний узел* – узел дерева, не являющийся листом. Два корневых дерева T_1 и T_2 называются изоморфными, если существует биекция $F\colon V(T_1) \to V(T_2)$, переводящая корень дерева T_1 в корень дерева T_2 и такая, что

$$(\{u, v\} \in E(T_1)) \Leftrightarrow (\{F(u), F(v)\} \in E(T_2))$$

для любых различных $u, v \in V(T_1)$.

Граф G называется *полным k-дольным*, если его вершины можно разбить на k непустых непересекающихся подмножества $X_1, ..., X_k$ так, что нет рёбер, соединяющих вершины одного и того же X_i, и две любые вершины из разных X_i, X_j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$ смежны. В этом случае пишем $G = G[X_1, ..., X_k]$.

Пусть $(Y, \leqslant_Y)$ – конечное частично упорядоченное множество. Под *диаграммой Хассе* ч.у. множества $(Y, \leqslant_Y)$ мы понимаем орграф с множеством вершин Y и множеством дуг (ориентированных рёбер) $A_Y \subseteq Y \times Y$ таких, что пара $\langle v_1, v_2 \rangle$ принадлежит A_Y тогда и только тогда, когда $v_1 \leqslant_Y v_2$, $v_1 \neq v_2$ и импликация

$$(v_1 \leqslant_Y w \leqslant_Y v_2) \Rightarrow (v_1 = w \vee v_2 = w)$$

имеет место для любого $w \in Y$. Два орграфа (Y, A_Y) и (X, A_X) являются изоморфными, если существует биекция $F\colon X \to Y$ такая, что

$$(\langle x, y \rangle \in A_X) \Leftrightarrow (\langle F(x), F(y) \rangle \in A_Y).$$

В этом случае F – изоморфизм орграфов (Y, A_Y) и (X, A_X). Любое корневое дерево T можно рассматривать как орграф $(V(T), A_T)$, если положить

$$(\langle u, v \rangle \in A_T) \Leftrightarrow (u \text{ – потомок } v).$$

Следующие утверждения почти очевидны.

Утверждение 1. *Пусть $(X, \leqslant_X)$, $(Y, \leqslant_Y)$ – конечные ч.у. множества, (X, A_X), (Y, A_Y) – соответствующие им диаграммы Хассе, $F\colon X \to Y$ – биекция. Отображение F является изоморфизмом ч.у. множеств $(X, \leqslant_X)$ и $(Y, \leqslant_Y)$ тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом орграфов (X, A_X) и (Y, A_Y).*

В этом утверждении и далее изоморфизм ч.у. множеств понимаем в стандартном смысле (см., например, [7, стр. 44]).

Утверждение 2. *Пусть T_1 и T_2 – конечные корневые деревья, $X = V(T_1)$, $Y = V(T_2)$ и (X, A_X), (Y, A_Y) – орграфы, соответствующие T_1 и T_2, $F\colon X \to Y$ – биекция. Отображение F является изоморфизмом корневых деревьев T_1 и T_2 тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом орграфов (X, A_X) и (Y, A_Y).*

2. Представляющие деревья. Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство. *Диаметральным графом* G_d будем называть граф, для которого

$$V(G_d) = X \text{ и } (\{u, v\} \in E(G_d)) \Leftrightarrow (d(u, v) = \mathrm{diam} X).$$

Напомним, что в метрическом пространстве (X, d) замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $t \in X$ называется множество

$$B_r(t) = \{x \in X : d(x, t) \leqslant r\}.$$

Для каждого $t \in X$ положим $\mathrm{Sp}_t(X) := \{d(x, t) : x \in X\}$. Обозначим через $\mathbf{B}_X$ множество всех шаров $B_r(t)$ с $r \in \mathrm{Sp}_t(X)$, т.е.

$$\mathbf{B}_X = \{B_r(t) : t \in X, r \in \mathrm{Sp}_t(X)\}.$$

Нам понадобится следующая теорема из [8]

Теорема 1. *Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geqslant 2$. Тогда $G_d = G_d[X_1, ..., X_k]$, $k \geqslant 2$.*

Для каждого $i = 1, ..., k$ рассмотрим ультраметрические пространства (X_i, d), где X_i – подмножество множества X из предыдущей теоремы с метриками, полученными сужением ультраметрики d на X_i. Пусть $d_i = \mathrm{diam} X_i$ и $x_i \in X_i$. Очевидно,

$d(x_i, y) \leqslant d_i < \mathrm{diam} X$ для всех $y \in X_i$, а при $y \in X \backslash X_i$ имеем $d(x_i, y) = \mathrm{diam} X > d_i$. Таким образом, выполнена следующая

Лемма 1. *Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с $|X| \geqslant 2$ и диаметральным графом $G_d[X_1, ..., X_k]$. Тогда имеет место принадлежность $X_i \in \boldsymbol{B}_X$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Как это было сделано в [6], поставим каждому конечному ультраметрическому пространству (X, d) в соответствие помеченное корневое дерево T_X по следующему правилу. Если $X = \{x\}$ – одноточечное множество, то T_X – дерево, состоящее из одного узла, помеченного меткой x, которое мы считаем корневым по определению. Пусть $|X| \geqslant 2$. Корень v_0 дерева пометим меткой $\bar{v}_0 = \mathrm{diam} X$. Пусть G_d – диаметральный граф пространства (X, d). По теореме 1 $G_d = G_d[X_1, ..., X_k]$. В этом случае будем считать, что дерево T_X имеет k узлов $v_1, v_2, ..., v_k$, лежащих на первом ярусе с метками

$$\bar{v}_i := \begin{cases} \mathrm{diam} X_i, & \text{если } |X_i| \geqslant 2, \\ x, & \text{если } X_i \text{ – одноточечное множество} \\ & \text{с единственным элементом } x, \end{cases} \tag{1}$$

$i = 1, ..., k$. Узлы первого яруса, помеченные метками $x \in X$, будут листьями, а метками $\mathrm{diam} X_i$ – внутренними узлами дерева T_X. Если на первом ярусе внутренних узлов нет, то дерево T_X построено. В противном случае, повторяя описанную выше процедуру с пространствами (X_i, d), соответствующими внутренним узлам первого яруса, получаем узлы второго яруса и т.д.. Так как $|X|$ конечно, то на каком-то из ярусов все вершины будут листьями и построение дерева T_X завершается.

Построенное выше помеченное корневое дерево T_X будем называть *представляющим деревом пространства* (X, d). Отметим, что разным листьям соответствуют разные $x \in X$ и каждый элемент $x \in X$ приписан какому-то листу, но различные внутренние узлы могут иметь совпадающие метки. В дальнейшем изложении мы будем отождествлять листья дерева T_X с их метками, если это удобно.

Замечание 1. Пусть $|X| \geqslant 2$ и $(v_0, v_1, ..., v_n, x_i)$ – путь от корня v_0 дерева T_X до произвольного листа x_i, тогда $\mathrm{diam} X = \bar{v}_0 > \bar{v}_1 > ... > \bar{v}_n$.

Следующая лемма была сформулирована в [6] для специального класса конечных ультраметрических пространств, но её доказательство справедливо для всех таких пространств.

Лемма 2. *Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство и пусть x_1, x_2 – два различных листа дерева T_X. Тогда, если $(x_1, v_1, ..., v_n, x_2)$ – путь, соединяющий листья x_1 и x_2 в T_X, то*

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \bar{v}_i.$$

Лемма 3. *Пусть (X, d) – ультраметрическое пространство и $Y, Z \subseteq X$. Тогда, если $Y \in \boldsymbol{B}_X$ и $Z \in \boldsymbol{B}_Y$, то $Z \in \boldsymbol{B}_X$.*

Доказательство. Выберем $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$ и $r_y, r_z \in [0, \infty)$ так, что $Y = \{x \in X : d(y_1, x) \leqslant r_y\}$ и $Z = \{y \in Y : d(z_1, y) \leqslant r_z\}$. Так как в ультраметрическом пространстве любая точка шара является его центром, то

$$Y = \{x \in X : d(z_1, x) \leqslant r_y\}. \tag{2}$$

Диаметры шаров из $\mathbf{B}_X$ и $\mathbf{B}_Y$ совпадают с их радиусами, значит

$$r_y = \mathrm{diam} Y, \quad r_z = \mathrm{diam} Z, \tag{3}$$

а так как $Z \subseteq Y$, то из (3) следует неравенство

$$r_y \geqslant r_z. \tag{4}$$

Принадлежность $Z \in \mathbf{B}_X$ равносильна тому, что

$$Z = \{x \in X : d(x, z_1) \leqslant r_z\}. \tag{5}$$

Включение $Z \subseteq \{x \in X : d(x, z_1) \leqslant r_z\}$ очевидно, поэтому достаточно доказать обратное включение. Пусть $x_0 \in X$ и $d(z_1, x_0) \leqslant r_z$. Тогда в силу (4) и (2) имеем $x_0 \in Y$. Отсюда и неравенства $d(z_1, x_0) \leqslant r_z$ следует, что $x_0 \in Z$. Равенство (5) доказано. $\square$

Определение 1. Пусть T – конечное корневое дерево с корнем v_0. Для каждой вершины $v \in V(T)$ определим подграф T^v следующим образом. Если $v = v_0$, то $T^v := T$. Если $v \neq v_0$, то пусть u – единственная вершина T такая, что v – потомок u. Рассмотрим $G \subseteq T$ с

$$V(G) := V(T) \text{ и } E(G) := E(T) \backslash \{u, v\}.$$

Граф G представляет собой лес, состоящий из двух деревьев. T^v – то из этих деревьев, которое содержит v.

Пусть как в определении 1 T – конечное корневое дерево с корнем v_0. Обозначим через L_v множество листьев графа T^v. Легко показать, что $L_v \subseteq L$, где L – множество листьев графа T. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma_T \colon V(T) \to 2^L$$

такое, что $\Gamma_T(v) = L_v$ для $v \in V(T)$. Заметим, что если v – лист дерева T, то $\Gamma_T(v) = \{v\}$, где $\{v\}$ – одноточечное множество, состоящее из единственного элемента v.

Исследуем отображение Γ_T в случае когда T является представляющим деревом конечного ультраметрического пространства X.

Лемма 4. *Пусть (X, d) – конечное ультраметрическое пространство с представляющим деревом T_X, $|X| \geqslant 2$. Тогда*

(i) отображение $\Gamma_{T_X} \colon V(T_X) \to 2^X$ является инъективным,

(ii) для любого $v \in V(T_X)$ имеет место принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \boldsymbol{B}_X$,

(iii) для любого $\tilde{B} \in \boldsymbol{B}_X$ *существует узел* $\tilde{v}$ *такой, что* $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$.

Доказательство. Инъективность Γ_{T_X} и принадлежность $\Gamma_{T_X}(v) \in \mathbf{B}_X$ следуют из леммы 3, леммы 1 и приведённого выше построения представляющего дерева T_X. Покажем, что для любого $\tilde{B} = \{x_1, .., x_k\} \in \mathbf{B}_X$ найдётся узел $\tilde{v} \in V(T_X)$ такой, что $\Gamma_{T_X}(\tilde{v}) = \tilde{B}$. При $k = 1$ это очевидно, поэтому считаем $k \geqslant 2$. Положим $b := \max\{d(x, y), x, y \in \tilde{B}\}$ и пусть $b = d(x_i, x_j)$. Т.к. $\tilde{B}$ – это шар в ультраметрическом пространстве, то он совпадает с множеством $\{x \in X : d(x, x_i) \leqslant b\}$. Пусть $(x_i, v_1, ..., v_n, x_j)$ – путь, соединяющий листья x_i и x_j в T_X. По лемме 2 $b = d(x_i, x_j) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \bar{v}_i$. В силу замечания 1, узел $\tilde{v}$, помеченный меткой b, будет узлом наименьшего яруса среди узлов v_i. Рассмотрим корневое поддерево $T_X^{\tilde{v}}$ дерева T_X. Покажем, что множество листьев $L_{\tilde{v}}$ поддерева $T_X^{\tilde{v}}$ совпадает с множеством $\tilde{B}$. Пусть $x \in L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, ..., v_n, x_i)$. Очевидно, что $d(x, x_i) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \bar{v}_i \leqslant b$. Следовательно, $x \in \tilde{B}$. Обратно, пусть $x \in \tilde{B}$ и предположим, что $x \notin L_{\tilde{v}}$. Рассмотрим путь $(x, v_1, .., v_n, x_i)$ в T_X, соединяющий x и x_i. Тогда вершина $\tilde{v}$ является потомком одной из вершин v_i этого пути, что даёт неравенство $b < \bar{v}_i$. Следовательно, $d(x, x_i) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \bar{v}_i > b$, что противоречит принадлежности $x \in \tilde{B}$. $\square$

Корневое дерево с корнем v_0 (см. (1)), получающееся из T_X путём «стирания меток» будем обозначать через $\overline{T}_X$.

Лемма 5. *Пусть* (X, d) *– конечное ультраметрическое пространство,* $u, v \in V(\overline{T}_X)$, $u \neq v$. *Узел* u *является потомком узла* v *тогда и только тогда, когда*

$$\Gamma_{\overline{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\overline{T}_X}(v)$$

и импликация

$$(\Gamma_{\overline{T}_X}(u) \subseteq \Gamma_{\overline{T}_X}(w) \subseteq \Gamma_{\overline{T}_X}(v)) \Rightarrow (\Gamma_{\overline{T}_X}(u) = \Gamma_{\overline{T}_X}(w)) \vee (\Gamma_{\overline{T}_X}(w) = \Gamma_{\overline{T}_X}(v))$$

выполняется для любого $w \in V(\overline{T}_X)$.

Доказательство этой леммы достаточно просто и мы его опускаем.

Из лемм 4 и 5 выводится

Следствие 1. *Пусть* (X, d) *– конечное ультраметрическое пространство. Если на* $\boldsymbol{B}_X$ *задать частичный порядок, индуцированный из частично упорядоченного множества* $(2^X, \subseteq)$, *то диаграмма Хассе ч.у. множества* $(\boldsymbol{B}_X, \subseteq)$ *изоморфна орграфу* $(V(\overline{T}_X), A_{\overline{T}_X})$.

3. Отображение, сохраняющее шары. Сформулируем центральное для этой работы

Определение 2. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $F \colon X \to Y$ сохраняет шары, если для любых $Z \in \mathbf{B}_X$ и $W \in \mathbf{B}_Y$ выполнены соотношения

$$F(Z) \in \mathbf{B}_Y \text{ и } F^{-1}(W) \in \mathbf{B}_X,$$

где $F(Z)$ – образ множества Z при отображении F и $F^{-1}(W)$ – прообраз множества W при этом отображении.

Отметим, что для любого биективного отображения $F\colon X \to Y$ и любых подмножеств X_1, X_2 множества X включение $X_1 \subseteq X_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(X_1) \subseteq F(X_2)$. Следовательно справедлива следующая

Лемма 6. *Пусть X, Y – метрические пространства и $F\colon X \to Y$ – сохраняющее шары биективное отображение. Тогда для любых $B_1, B_2 \in \boldsymbol{B}_X$ имеет место эквивалентность*

$$(B_1 \subseteq B_2) \Leftrightarrow (F(B_1) \subseteq F(B_2)).$$

Следствие 2. *Пусть X, Y – метрические пространства и $F\colon X \to Y$ – сохраняющее шары биективное отображение. Тогда отображение*

$$(\boldsymbol{B}_X, \subseteq) \ni B \mapsto F(B) \in (\boldsymbol{B}_Y, \subseteq)$$

есть изоморфизм ч.у. множеств $(\boldsymbol{B}_X, \subseteq)$ и $(\boldsymbol{B}_Y, \subseteq)$.

Теорема 2. *Пусть X, Y – конечные ультраметрические пространства. $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда существует сохраняющее шары биективное отображение $\Phi\colon X \to Y$.*

Доказательство. Теорема тривиальна при $|X| = 1$, поэтому будем считать, что $|X| \geqslant 2$. Пусть $V_X = V(\overline{T}_X)$ и $V_Y = V(\overline{T}_Y)$ – множества вершин графов $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$ соответственно. Предположим, что существует биективное отображение $\Psi\colon V_X \to V_Y$, сохраняющее отношение смежности между вершинами и переводящее корень дерева $\overline{T}_X$ в корень дерева $\overline{T}_Y$. Биекция Ψ отображает множество листьев графа $\overline{T}_X$ – множество X на множество листьев графа $\overline{T}_Y$ – множество Y, так как листья – это в точности вершины степени 1. Обозначим через Φ сужение Ψ на X, $\Phi = \Psi|_X$, и покажем, что биективное отображение $\Phi\colon X \to Y$, рассматриваемое как отображение между ультраметрическими пространствами (X, d) и (Y, ρ), сохраняет шары.

Пусть $B \in \mathbf{B}_X$. Покажем, что

$$\Phi(B) \in \mathbf{B}_Y \tag{6}.$$

В силу леммы 4 существует узел v дерева $\overline{T}_X$, для которого B совпадает с множеством листьев L_v графа $\overline{T}_X^v$, где $\overline{T}_X^v$ – поддерево дерева $\overline{T}_X$ задаваемое определением 1. Так как Ψ – изоморфизм, то образом дерева $\overline{T}_X^v$ является какое-то поддерево T' дерева $\overline{T}_Y$. Пусть $u = \Psi(v)$ и $\overline{T}_Y^u$ – поддерево дерева $\overline{T}_Y$, построенное для u в соответствии с определением 1. Так как при изоморфизме Ψ корень дерева $\overline{T}_X$ переходит в корень дерева $\overline{T}_Y$, то используя определение 1, легко установить равенство $T' = \overline{T}_X^u$. Сужение Ψ на $V(\overline{T}_X^v)$ является изоморфизмом деревьев $\overline{T}_X^v$ и $\overline{T}_Y^u$. При изоморфизме множество листьев переходит в множество листьев. Пусть L_u – множество листьев дерева $\overline{T}_Y^u$. Тогда

$$L_u = \Psi|_{V(\overline{T}_X^v)}(L_v) = \Psi(L_v). \tag{7}$$

Так как $L_v \subseteq X$, а $\Phi = \Psi|_X$, то из (7) получаем

$$L_u = \Phi(L_v) = \Psi(B). \tag{8}$$

По лемме 4 имеем $L_u \in \mathbf{B}_Y$. Отсюда и из (8) следует (6). Аналогично устанавливается, что

$$\Phi^{-1}(Z) \in \mathbf{B}_X$$

для любого $Z \in \mathbf{B}_Y$. Таким образом, из того, что $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья следует, что Φ – сохраняющая шары биекция.

Пусть теперь $\Phi\colon X \to Y$ сохраняющая шары биекция. Нужно доказать, что $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья. Пусть (Y, A_Y), (X, A_X) – диаграммы Хассе ч.у. множеств $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$, $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и пусть $(V(\overline{T}_Y), A_{\overline{T}_Y})$, $(V(\overline{T}_X), A_{\overline{T}_X})$ – орграфы, соответствующие $\overline{T}_Y$, $\overline{T}_X$. В соответствии со следствием 1 (X, A_X) и $(V(\overline{T}_X), A_{\overline{T}_X})$ изоморфны как ориентированные графы, аналогично, орграфы (Y, A_Y) и $(V(\overline{T}_Y), A_{\overline{T}_Y})$ тоже изоморфны. Используя утверждение 1 и следствие 2, убеждаемся в изоморфизме орграфов (Y, A_Y) и (X, A_X). Следовательно, орграфы $(V(\overline{T}_X), A_{\overline{T}_X})$ и $(V(\overline{T}_Y), A_{\overline{T}_Y})$ тоже изоморфны. Последнее по утверждению 2 равносильно изоморфности корневых деревьев $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$. $\square$

Рассуждения, аналогичные проведённым во второй части доказательства теоремы 2, показывают, что $\overline{T}_X$ и $\overline{T}_Y$ изоморфны как корневые деревья тогда и только тогда, когда изоморфны ч.у. множества $(\mathbf{B}_X, \subseteq)$ и $(\mathbf{B}_Y, \subseteq)$. Таким образом, имеет место

Следствие 3. *Пусть X и Y – конечные ультраметрические пространства. Ч.у. множества $(\boldsymbol{B}_X, \subseteq)$ и $(\boldsymbol{B}_Y, \subseteq)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует сохраняющая шары биекция $\Phi\colon X \to Y$.*

1. *Lemin A.J.* On Gelfand's Problem concerning graphs, lattices, and ultrametric spaces. Workshop on General Algebra, Johannes Kepler University Linz, Department of Algebra, Stochastics, and Knowledge Based Mathematical Systems, Linz, Austria, June 14-17, 2001.
2. *Lemin A.J.* The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like, and real graduated lattices LAT* // Algebra Universalis. – 2003. – V. 50 (1). – P. 35–49.
3. *Gurvich V., Vyalyi M.* Characterizing (quasi-)ultrametric finite spaces in terms of (directed) graphs // Discrete Appl. Math. – 2012. – V. 160 (12). – P. 1742-1756.
4. *Protasov I., Banakh T.* Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups. – VNTL Publishers, Math. Stud. Monogr. Ser, Lviv, 2003. – V. 11. – 147 pp.
5. *Protasov I., Zarichnyi M.* General asymptology. – VNTL Publishers, Math. Stud. Monogr. Ser, Lviv, 2007. – V. 12. – 219 pp.
6. *Петров Е.А., Довгошей А.А.* О неравенстве Гомори-Ху // http://arxiv.org/abs/1211.2389.
7. *Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П.* Общая алгебра. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
8. *Dordovskyi D., Dovgoshey O., Petrov E.* Diameter and diametrical pairs of points in ultrametric spaces // P-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2011. – V. 3 (4). – P. 253-262.

E. Petrov

Ball-preserving mappings of finite ultrametric spaces.

It is shown that the rooted trees T_X and T_Y representing finite ultrametric spaces X and Y are isomorphic if and only if there exists a ball-preserving bijection $F\colon X \to Y$.

Keywords: *finite ultrametric space, finite rooted tree, ball-preserving mapping, ballean.*

Є. О. Петров

Відображення, що зберігають кулі, скінченних ультраметричних просторів.

Показано, що кореневі дерева T_X і T_Y, які представляють скінченні ультраметричні простори X і Y є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли існує бієкція $F\colon X \to Y$, що зберігає кулі.

Ключові слова: *скінченний ультраметричний простоір, скінченне кореневе дерево, відображення, що зберігає кулі, болеан.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`eugeniy.petrov@gmail.com`

Получено 01.03.13