УДК 517.5

©2013. **О. А. Очаковская**

АНАЛОГ ПРОБЛЕМЫ ВАТСОНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ КРУГАМ

Получены теоремы единственности для класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам фиксированного радиуса. Изучается случай, когда граничное поведение функции рассматривается вблизи единственной точки.

Ключевые слова: *проблема Ватсона, теорема Карлемана.*

1. Введение. Пусть $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ множество функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leqslant c_0 c_1^q M_q |1 - z|^q$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, где постоянные $c_0 > 0$ и c_1 зависят от f, но не от z и q. Проблема, поставленная Г.Н. Ватсоном [1] в 1916 году в связи с исследованием асимптотических разложений, заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия на последовательность $\mathcal{M}$, при которых класс $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ содержит только нулевую функцию. Эта проблема оказалась тесно связанной с известной проблемой Ж. Адамара об описании квазианалитических классов функций, поставленной в 1912 году. Окончательное решение проблемы Г.Н. Ватсона и Ж. Адамара было получено Т. Карлеманом [2] в 1923 году. Им было показано, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $A^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевых функций, является условие

$$\int_1^{\infty} \ln\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{r^{2q}}{M_q^2}\right) \frac{dr}{r^2} = +\infty. \tag{1}$$

В 1930 году А. Островски [3] получил новое доказательство этого результата и обнаружил, что условие(1) можно заменить следующим:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty, \tag{2}$$

где

$$T(r) = \sup_{q \geqslant 0} \frac{r^q}{M_q}.$$

В настоящее время известен ряд других условий на последовательность $\mathcal{M}$, эквивалентных (1) и (2) (см., например, [4]-[6]). Одним из них является условие

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geqslant m} M_q^{1/q}\right)^{-1} = +\infty, \tag{3}$$

которое характеризует также квазианалитические классы функций на подмножествах вещественной оси. По поводу других результатов, связанных с проблемой Г.Н. Ватсона, см., например, [4]-[7] и библиографию в этих работах.

В данной статье рассматривается аналог проблемы Г.Н. Ватсона для функций класса $f \in L^{1,loc}(\mathbb{D})$, имеющих нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам фиксированного радиуса (см. теоремы 1-3 ниже). Одним из приложений полученных результатов является аналог теоремы Т. Карлемана для решений некоторых дифференциальных уравнений эллиптического типа (см. теорему 4). Получено также усиление теоремы Карлемана, в котором рассматривается более широкий класс функций (см. теорему 5).

2. Формулировки основных результатов. Для множества $A \subset \mathbb{C}$ символами ∂A и $\overline{A}$ обозначаются, соответственно, граница и замыкание A.

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ действует транзитивно на $\mathbb{D}$ посредством конформных отображений (см., например, [6, гл. 2, §2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$. Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|},$$

где черта означает комплексное сопряжение. Расстояние d и гиперболическая мера

$$d\mu(z) = \frac{dxdy}{(1 - |z|^2)^2}, \ z = x + iy$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$. Гиперболическим кругом радиуса $r > 0$ с центром $w \in \mathbb{D}$ называется множество

$$K_r(w) := \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) \leq r\}.$$

Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ называется r-областью, если выполнены следующие условия:

(i) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором гиперболическом круге радиуса r, содержащемся в $\mathcal{O}$;

(ii) множество центров всех гиперболических кругов радиуса r, содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Для всякой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ символом $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f \in L^{1,loc}(\mathcal{O})$ таких, что

$$\int\limits_{K_r(w)} f(z)\, d\mu(z) = 0$$

для любого гиперболического круга $K_r(w) \subset \mathcal{O}$ (если $\mathcal{O}$ не содержит таких кругов, то полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^{1,loc}(\mathcal{O})$).

Классы $V_r(\mathcal{O})$ и различные их обобщения изучались во многих работах (см., например, [9]-[11] и библиографию к этим работам). Из этих работ известно, что класс $V_r(\mathbb{D})\bigcap C(\overline{\mathbb{D}})$ является достаточно широким.

Перейдем к формулировкам основных результатов работы. Для $a \in (0,1)$ положим $\mathbb{D}_a = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < 1-a\}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in V_r(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ является r-областью и содержит круг $\mathbb{D}_a$ при некотором $a \in (0,1)$. Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющая (3), для которой*

$$|f(z)| \leqslant M_q |1-z|^q \tag{4}$$

при почти всех (по мере Лебега) $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f = 0$.

Дальнейшие результаты показывают точность условий теоремы 1.

Теорема 2. *Для любого $a \in (0,1)$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geqslant m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < +\infty, \tag{5}$$

существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$, для которой выполнено неравенство (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Далее, обозначим через $V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ множество функций $f \in V_r(\mathbb{D})$, которые при любых $a \in (0,1)$ удовлетворяют условию

$$|f(z)| \leqslant c_0 c_1^q M_q |1-z|^q \tag{6}$$

для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, где постоянные c_0 и c_1 зависят от f и a, но не от z и q.

Теорема 3. *Для любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей (5), существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$.*

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $V_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевых функций, является условие (3).

Одним из приложений теорем 1-3 является следующий аналог теоремы Карлемана для решений уравнения

$$(1 - |a + z(1-a)|^2)\Delta f(z) + b f(z) = 0 \tag{7}$$

в круге $\mathbb{D}$.

Теорема 4. *Пусть $a \in (0,1)$, $b > (1-a)^2$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

(i) Пусть $f \in C^2(\mathbb{D})$ является решением уравнения (7). Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющая (3), для которой выполнено условие (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f = 0$.

(ii) *Для любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей (5), существует ненулевое решение $f \in C^2(\mathbb{D})$ уравнения (7), для которого выполнено условие (4) при всех $z \in \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.*

Обозначим теперь через $U_r(\mathbb{D})$ множество функций $f \in C(\mathbb{D})$, для которых

$$\int_{\partial K_r(w)} f(z)dz = 0$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отметим, что класс $U_r(\mathbb{D})$ гораздо шире содержащегося в нем класса голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Известно, например, что подпространство радиальных функций из $U_r(\mathbb{D})$ является бесконечномерным (см. [9, Part 5, Ch.4.2]), в то время как соответствующее подпространство голоморфных в $\mathbb{D}$ функций состоит из констант. Пусть $U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ – множество функций $f \in U_r(\mathbb{D})$, которые при любом $a \in (0,1)$ удовлетворяют условию (6) для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ и всех $q \in \mathbb{Z}_+$, с положительными постоянными c_0 и c_1, зависящими от f и a, но не зависящими от z и q.

Следующий результат усиливает теорему Карлемана.

Теорема 5. *Для того, чтобы класс $U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ не содержал ненулевую функцию, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ удовлетворяла условию (3).*

Доказательства теорем 1-5 содержаться в разделе 4 данной работы. В разделе 3 приводятся необходимые обозначения и некоторые вспомогательные утверждения.

3. Вспомогательные утверждения. По поводу используемых ниже понятий и фактов см. [12].

Группа $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ изоморфна группе $SU(1,1)$, состоящей из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

которая действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$gz = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Разложение Ивасавы группы $SU(1,1)$ имеет вид $SU(1,1) = \mathcal{NAK}$, где

$$\mathcal{N} = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

и $\mathcal{K} = SO(2)$ – группа поворотов. Всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t 0 = \frac{\operatorname{sh} t - ise^{-t}}{\operatorname{ch} t - ise^{-t}},$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}^1$ определены однозначно, при этом

$$s = -\frac{Im\, z}{|1 - z|^2}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}. \tag{8}$$

Используя (8), имеем
$$d\mu(z) = e^{-2t} ds\, dt. \qquad (9)$$

Пусть $\mathcal{L} = 4(1-|z|^2)\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ – оператор Лапласа-Бельтрами.

Лемма 1. *Пусть* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *и* $\{M'_q\}_{q=0}^{\infty}$ *– последовательности положительных чисел такие, что выполнено (3) и для всех* $q \in \mathbb{Z}_+$
$$M'_q \leqslant c_1 c_2^q (1 + M_{q+k}), \qquad (10)$$
где $c_1, c_2 > 1,\ k \in \mathbb{Z}_+$ *не зависят от* q. *Тогда*
$$\sum_{m=1}^{\infty} (\inf_{q \geqslant m} (M'_q)^{1/q})^{-1} = +\infty. \qquad (11)$$

Доказательство. Если существует бесконечно много чисел $q \in \mathbb{Z}_+$, для которых $M_{q+k} \leqslant 1$, то выполнение условия (11) очевидно. В противном случае существует число $q > 1$ такое, что $M_{q+k} > 1$ при всех $q > q_0$. Следовательно, при таких q выполнено неравенство
$$M'_q \leqslant c_3^q M_{q+k}$$
с постоянной $c_3 > 1$, не зависящей от q (см. (10)). Отсюда имеем
$$(M'_q)^{1/q} \leqslant c_3 (M_{q+k})^{1/q} = c_3 \left(M_{q+k}^{1/(q+k)}\right)^{1+k/q} \qquad (12)$$
Пусть $m > q_0$. Из (12) следует, что
$$\inf_{q \geqslant m} (M'_q)^{1/q} \leqslant a_m^{1+k/m},$$
где $a_m = \inf_{q \geqslant m} (M_{q+k})^{1/(q+k)}$. Предположим, что $\sum_{m>q_0} a_m^{-1-k/m} < +\infty$, тогда $k \geqslant 1$. Пусть $E = \{m > q_0 : a_m^k > 2^m\}$. Тогда
$$\sum_{m>q_0} a_m^{-1} = \sum_{m \in E} a_m^{-1} + \sum_{m \notin E} a_m^{-1} \leqslant \sum_{m \in E} 2_m^{-m/k} + 2 \sum_{m \notin E} a_m^{-1-k/m} < +\infty.$$
Это противоречит (3) и лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *– последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (5). Тогда для любого* $A \geqslant 1$ *существует* $B = B(A) > 0$ *со следующим свойством: для любого отрезка* $[\alpha, \beta]$ *длины* $l > B$ *существует ненулевая неотрицательная функция* $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ *с носителем на* $[\alpha, \beta]$ *такая, что*
$$\|\varphi^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} \leqslant M_q A^{-q}$$
для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Из [6, теорема 1.3.5] следует, что существует ненулевая неотрицательная функция $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем, для которой выполнены неравенства
$$\|\psi^{(q)}\|_{C(\mathbb{R}^1)} \leqslant M_q K^{q+1},\ q \in \mathbb{Z}_+,$$

с положительной постоянной K, не зависящей от q. Пусть $R>0$ такое, что носитель ψ содержится в отрезке $[-R,R]$. Положим $B=2AKR$. Тогда для любого отрезка $[\alpha,\beta]$ длины $l>B$ функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{K}\psi\left(\frac{x-\gamma}{KA}\right), \text{ где } \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

удовлетворяет требованиям леммы 2. □

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Для $T\in\mathbb{R}^1$ положим:

$$E(T,r)=\{z=n_sa_t0\in\mathbb{D}:\ |t-T|<r\},$$

$$G_1(T,r)=\{z=n_sa_t0\in E(T,r):\ |s|\leqslant 1\},$$

$$G_2(T,r)=\{z=n_sa_t0\in E(T,r):\ |s|>1\}.$$

Пусть также $E(T,r)\subset\mathbb{D}_\alpha$ и

$$I(T,r,q)=\int\limits_{E(T,r)}|f(z)|\Big(\frac{|Im\,z|}{|1-z|^2}\Big)^q d\mu(z),\ q\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$I(T,r,q)=I_1(T,r,q)+I_2(T,r,q), \tag{13}$$

где

$$I_1(T,r,q)=\int\limits_{G_1(T,r)}|f(z)|\Big(\frac{|Im\,z|}{|1-z|^2}\Big)^q d\mu(z)\leqslant\int\limits_{G_1(T,r)}|f(z)|d\mu(z), \tag{14}$$

$$I_2(T,r,q)=\int\limits_{G_2(T,r)}|f(z)|\Big(\frac{|Im\,z|}{|1-z|^2}\Big)^q d\mu(z)=$$

$$=\int\limits_{G_2(T,r)}\frac{1}{|s|^2}\frac{|f(z)|}{|1-z|^{q+2}}\Big(\frac{|Im\,z|}{|1-z|}\Big)^{q+2}d\mu(z), \tag{15}$$

(см.(8)). Используя (4) при $q=0$, из (14), (9) и определения $G_1(T,r)$ имеем

$$I_1(T,r,q)\leqslant M_0\int\limits_{G_1(T,r)}d\mu(z)=4re^{2(r-T)}M_0,\ q\in\mathbb{Z}_+. \tag{16}$$

Далее, при любом $z\in\mathbb{C}$ выполнено неравенство $|Im\,z|\leqslant|1-z|$. Как и выше, используя (4), (15) и (9), получаем

$$I_2(T,r,q)\leqslant M_{q+2}\int\limits_{G_2(T,r)}\frac{1}{|s|^2}d\mu(z)\leqslant 4re^{2(r-T)}M_{q+2} \tag{17}$$

при любом $q \in \mathbb{Z}_+$. Из оценок (16), (17) и равенства (13) делаем вывод, что

$$I_2(T, r, q) \leqslant 4re^{2(r-T)}(M_0 + M_{q+2}) \tag{18}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и всех $T \in \mathbb{R}^1$ таких, что $E(T, r) \subset \mathbb{D}_\alpha$. Из леммы 1 и условия (3) получаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\inf_{q \geqslant m} (M_0 + M_{q+2})^{1/q})^{-1} = +\infty.$$

Отсюда и из (18) следует (см. [13, теорема 1]), что $f = 0$ и теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Для $z \in \mathbb{C}$, $\xi > 0$, $\lambda > 0$ положим

$$g(z, \xi, \lambda) = H^{(1)}_{\frac{i\lambda}{2}}\Big(\frac{i}{2}\xi e^{2t}\Big)\xi^{\frac{-i\lambda}{2}} e^{t+i\xi s}, \tag{19}$$

где $H^{(1)}_{\frac{i\lambda}{2}}$ – функция Ганкеля первого рода (см.(8), а также [14, параграф 3]). Используя асимптотическую формулу для $H^{(1)}_{\frac{i\lambda}{2}}(\frac{i}{2}\xi)$ при $\xi \to +\infty$ (см., например[14, формула (29.2)]), из (19) находим

$$(1 + i)g(0, \xi, \lambda) \sim \sqrt{\frac{8}{\pi}}\xi^{\frac{i\lambda-1}{2}} exp\Big(\frac{\pi}{4}(\lambda - 1) - \frac{\xi}{2}\Big) \text{ при } \xi \to +\infty. \tag{20}$$

Из дифференциального уравнения Бесселя для функции Ганкеля имеем

$$(1 - |z|^2)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)g(z, \xi, \lambda) + (1 + \lambda^2)g(z, \xi, \lambda) = 0. \tag{21}$$

Пусть $r > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\int_{K_r(w)} g(z, \xi, \lambda)\, d\mu(z) = 0 \tag{22}$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Возможность такого выбора λ следует из (21) и [13, параграф 3]. Далее, пусть последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел удовлетворяет условию (5) и пусть $A \geqslant 1$. Поскольку множество

$$\{\xi > 0 : \; cos\Big(\frac{\lambda}{2}ln\xi\Big) > 0\}$$

содержит отрезки сколь угодно большой длины, из (20) и леммы 2 следует, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset (1, +\infty)$ и ненулевая неотрицательная функция $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[\alpha, \beta]$ такие, что

$$Re((1 + r)g(0, \xi, \lambda)) > 0, \text{ при всех } \xi \in [\alpha, \beta] \tag{23}$$

и

$$\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} \leq M_q A^{-q} \quad \text{для любого } q \in \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

Положим теперь

$$f_0(z) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(z,\xi,\lambda)\varphi_A(\xi)\,d\xi. \tag{25}$$

Из (22) получаем, что $f_0 \in V_r(\mathbb{D})$. Кроме того, из (25) и (22) имеем

$$\mathcal{L}f_0 + (\lambda^2+1)f_0 = 0 \text{ в } \mathbb{D}. \tag{26}$$

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ из (26) следует, что f_0 является вещественно-аналитической в $\mathbb{D}$. Покажем, что $f_0(0) \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} Re((1+i)g(0,\xi,\lambda))\varphi_A(\xi)\,d\xi = Re((1+i)f_0(0)) = 0 \tag{27}$$

(см. (25)). Поскольку $\varphi_A \geqslant 0$ и не является тождественным нулем, равенство (27) противоречит условию (23). Следовательно, $f_0(0) \neq 0$. Получим теперь верхнюю оценку для $|f_0(z)|$. Из интегрального представления для функции Ганкеля находим

$$g(z,\xi,\lambda) = m_\lambda \int\limits_1^{\infty} (u^2-1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} \exp\Big((1+i\lambda)t + \xi(is - \frac{u}{2}e^{2t})\Big)du,$$

где

$$m_\lambda = \frac{(1+e^{\pi\lambda})\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2})}{\pi^{3/2}e^{\pi\lambda/4}2^{i\lambda}},$$

(см. [14, формула (19.11)]). Отсюда и из (25) имеем

$$f_0(z) = m_\lambda \int\limits_1^{\infty} (u^2-1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} e^{(1+i\lambda)t} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\Big(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\Big)d\xi\,dt. \tag{28}$$

Интегрирование по частям показывает, что

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\Big(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\Big)d\xi\right| \leqslant (\beta-\alpha)\left|s + \frac{iu}{2}e^{2t}\right|^{-q} \exp\Big(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\Big)\,\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}_+$.

Отсюда и из (28), (24) следует, что

$$|f_0(z)| \leqslant m_\lambda(\beta-\alpha)\Big|s + \frac{i}{2}e^{2t}\Big|^{-q}\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}\, e^t \int\limits_1^{\infty} u \exp\Big(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\Big)du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2m_\lambda(\beta-\alpha)}{\alpha e^t}\Big(1+\frac{2e^{-2t}}{\alpha}\Big)\exp\Big(-\frac{\alpha}{2}e^{2t}\Big)\Big|s+\frac{iu}{2}e^{2t}\Big|^{-q}M_qA^{-q} \tag{29}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_\alpha$. Тогда из (8) и определения $\mathbb{D}_\alpha$ имеем $th\, t > 2a-1$, откуда

$$e^{-2t} < \frac{1}{a}-1 \tag{30}$$

и

$$x > 2a-1. \tag{31}$$

Полагая

$$c_0(a) = \frac{2m_\lambda(\beta-\alpha)}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a}-1}\left(1+\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{a}-1\right)\right), \tag{32}$$

из (29) и (30) получаем, что

$$|f_0(z)| \leqslant c_0(a)\Big|s+\frac{i}{2}e^{2t}\Big|^{-q}\frac{M_q}{A_q},\ z\in\mathbb{D}_\alpha,\ q\in\mathbb{Z}_+. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$|y| < \frac{\sqrt{a}}{2}|1-z|,\ z\in\mathbb{D}_\alpha. \tag{34}$$

Из (34) имеем $y^2 < \frac{a}{4}|1-z|^2 = \frac{a}{4}((1-x)^2+y^2)$, откуда

$$|y| < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4-a}}(1-x) < 1-x. \tag{35}$$

Используя (31), (34) и (35), получаем

$$\frac{1-|z|^2}{|1-z|} = \frac{1-x^2}{|1-z|}-\frac{y^2}{|1-z|} > 2a\frac{(1-x)}{|1-z|}-\frac{a}{4}|1-z| > 2a\frac{1-x}{1-x+|y|}-\frac{a}{2} > \frac{a}{2}.$$

Учитывая (8), отсюда имеем

$$\Big|s+\frac{i}{2}e^{2t}\Big|^{-q} \leqslant 2^qe^{-2qt} = 2^q\left(\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\right)^q =$$

$$= |1-z|^qz^q\left(\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\right)^{-q} < \left(\frac{4}{a}\right)^q|1-z|^q. \tag{36}$$

Предположим теперь, что $|y| \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}|1-z|,\ z\in\mathbb{D}_\alpha$. Тогда из (8) получаем

$$\Big|s+\frac{i}{2}e^{2t}\Big|^{-q} \leqslant |s|^{-q} = \left(\frac{|1-z|^2}{|y|}\right)^q \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)|1-z|^q < \left(\frac{4}{a}\right)^q|1-z|^q. \tag{37}$$

Таким образом, из (36), (37) и (33) следует, что

$$|f_0(z)| \leqslant c_0(a)\frac{M_q}{A_q}\left(\frac{4}{a}\right)^q|1-z|^q,\ z\in\mathbb{D}_\alpha,\ q\in\mathbb{Z}_+. \tag{38}$$

Выберем теперь $A > \frac{4}{a}$ и положим $f(z) = f_0(z)/c_0(a)$. Тогда $f \in V_r(\mathbb{D})$, является вещественно-аналитической и не обращается в нуль тождественно. Кроме того, из (38) следует, что f удовлетворяет (4) при всех $z \in \mathbb{D}_\alpha$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, теорема 2 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 3. Пусть последовательность $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел удовлетворяет условию (5). Рассмотрим функцию φ_A из доказательства теоремы 2 при $A = 1$. Тогда функция f_0, определенная (25), удовлетворяет условию

$$|f_0(z)| \leqslant c_0(a)\frac{M_q}{A_q}\left(\frac{4}{a}\right)^q |1-z|^q,\ z \in \mathbb{D}_\alpha,\ q \in \mathbb{Z}_+. \tag{39}$$

для любого $a \in (0,1)$ (см.(38)). Это означает, что f_0 удовлетворяет условию (6) при $c_1 = 4/a$. Кроме того, из доказательства теоремы 2 видно, что $f_0 \in V_r(\mathbb{D})$, является вещественно-аналитической и $f_0(0) \neq 0$. Таким образом, функция f_0 удовлетворяет всем требованиям теоремы 3. □

Доказательство теоремы 4. Положим

$$\lambda = \sqrt{\frac{b}{(1-a)^2} - 1}.$$

Тогда, если $f \in C^2(\mathbb{D})$ является решением уравнения (7) в $\mathbb{D}$, то функция $h(z) = f\left(\frac{z-a}{1-a}\right)$ является решением уравнения

$$\mathcal{L}h + (\lambda^2+1)h = 0 \text{ в } \mathbb{D}_\alpha. \tag{40}$$

Тогда $h \in V_r(\mathbb{D}_\alpha)$ при некотором $r > 0$ (см. [15, параграф 4]). Кроме того,

$$\frac{|h(z)|}{|1-z|^q} = \left| f\left(\frac{z-a}{1-a}\right)\left(1 - \frac{z-a}{1-a}\right)\right| (1-a)^{-q},\ z \in \mathbb{D}_\alpha. \tag{41}$$

Отсюда и из теоремы 1 следует первое утверждение теоремы 4.

Докажем второе утверждение. Из доказательства теоремы 2 видно, что существует ненулевая вещественно-аналитическая функция h, удовлетворяющая (39), такая, что

$$|h(z)| \leqslant M_q(1-a)^q\,|1-z|^q$$

для всех $z \in \mathbb{D}_\alpha$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $f(z) = h(a + z(1-a))$ является решением уравнения (7) и удовлетворяет условию (4) при всех $z \in \mathbb{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым теорема 4 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 5. Поскольку всякая голоморфная в $\mathbb{D}$ функция содержится в $U_r(\mathbb{D})$, необходимость следует из теоремы Карлемана. Для доказательства достаточности заметим, что если $f \in U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$, то $f(gz) \in U_r^{\mathcal{M}}(\mathbb{D})$ для любого $g \in \mathcal{NA}$ (см. (6) и (8)). Применяя гиперболическое сглаживание (см.[9, часть 5, глава 4.2]) и формулу Грина, из теоремы 1 получаем достаточность в теореме 5. □

1. *Watson G.N.* The transformation of on asymptotic series into a convergent series of invers faktorials. – Rend. Circ. mat., 1912. – T. XXXIV.
2. *Carleman T.* Les fonctions quasianalytiques. – Paris, 1926.
3. *Ostrowski A.* Über quasianalytische Funktionen und Bestimheit asymptotischer Entwicklungen // Acta Math. – 1930. – V. 53. – P. 181.
4. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: ИЛ, 1955.
5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1986.
Maliavin P. Sur quelques procedes d'extrapolation // Acta Math. – 1955. – V. 93. – P. 179-222.
6. *Альфорс Л.* Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве, – М.: Мир, 1986.
7. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003.
8. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009.
9. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Birkhäuser, 2013.
10. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987.
11. *Очаковская О.А.* Граничные теоремы единственности для функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам // Мат. сборник. – 2013. – Т. 204. – № 2. – С. 117-132.
12. *Коренев Б.Г.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций, – М.: Наука, 1990.
13. *Волчков В.В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192. – № 9. – С. 17-38.

O. A. Ochakovskaya

An analog of Watson's problem for functions with zero integrals over hyperbolic disks.

Uniqueness theorems for the class of functions having zero integrals over all hyperbolic dicks of fixed radius are obtained. The case of a boundary behavior of a function near a unique point is established.

Keywords: *Watson's problem, Karleman's theorem.*

О. О. Очаковська

Аналог проблеми Ватсона для функцій з нульовими інтегралами по гіперболічних кулях.

Отримано теореми єдиності для класу функцій з нульовими інтегралами по усіх гіперболічних колах фіксованого радіуса. Вивчається випадок, коли гранична поведінка- функції розглядається в околі єдиної точки.

Ключові слова: *проблема Ватсона, теорема Карлемана.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovskaja@yandex.ua

Получено 25.05.13