УДК 519.21

©2013. **І. Г. Крикун**

АНАЛОГ ЯВИЩА ПЕАНО ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ЛОКАЛЬНИМ ЧАСОМ

Розглядається послідовність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом та малою дифузією. Отримано умови слабкої збіжності цих мір до міри, зосередженої з певними вагами на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші за умови прямування коефіцієнту дифузії до нуля. Отримані формули для обчислення згаданих вагів.

Ключові слова: *слабка збіжність мір, стохастичні рівняння, локальний час.*

1. Вступ. Задачу про слабку збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з малою дифузією вигляду

$$x_\varepsilon(t) = \int_0^t b(x_\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t), \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$ до міри, що зосереджена на розв'язку відповідної задачі Коші

$$\dot{y}(t) = b(y(t)), \quad y(0) = 0, \tag{2}$$

за умови єдиності цього розв'язку, розглянуто в кількох роботах, серед яких згадаємо [1] та [2]. Випадок неєдиності розв'язку задачі (2) (так зване "явище Пеано") розглядався в роботах – [3]-[8]. В цих роботах досліджуються різні питання, пов'язані з граничною поведінкою розв'язків (1) та розглядаються різні умови на коефіцієнти. На відміну від згаданих робіт, у даній роботі будемо розглядати стохастичне рівняння з локальним часом.

А саме, замість рівняння (1) розглядаємо таке стохастичне рівняння з локальним часом

$$\xi_\varepsilon(t) = \beta L^{\xi_\varepsilon}(t,0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s))ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s))dw(s), \qquad t \in [0,1], \tag{3}$$

та досліджуємо поведінку при $\varepsilon \to 0$ мір, породжених розв'язками цього рівняння. В даній роботі доводиться слабка збіжність цих мір до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках задачі Коші (2).

Робота організована таким чином: у розділі 2 вводяться основні позначення та умови, в розділі 3 наведено результати для звичайних диференціальних рівнянь. Основні результати роботи сформульовані в розділі 4, а доведені – в розділі 5. У розділі 6 наведений модельний приклад.

2. Позначення та умови. Введемо такі позначення: $I_A(x)$ – індикатор множини A; $a^+ = \max(a,0)$; $C[0,\infty)$ – простір неперервних функцій $f(t),\ t \in [0,\infty)$ з метрикою рівномірної збіжності на компактах з $[0,\infty)$:

$$\rho(f,g)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{2^N}\frac{\sup_{t\in[0,N]}|f(t)-g(t)|}{1+\sup_{t\in[0,N]}|f(t)-g(t)|}.$$

Через $\mathfrak{B}$ позначимо σ – алгебру борелівських множин цього простору. Ймовірнісний простір позначатимемо $(\Omega,\Im,\Im_t,\mathsf{P})$, $\Im_t$ – потік σ-алгебр, $t\geq 0$, $(w(t),\Im_t)$ – стандартний одновимірний вінерівський процес.

Позначення $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ буде означати асимптотичну еквівалентність функцій $f(x)$ та $g(x)$ при $x\to x_0$, тобто наявність рівності

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Функція $\mathrm{sgn}x$ визначається так:

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{при } x>0,\\ 0, & \text{при } x=0,\\ -1, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Будемо говорити, що рівняння (3) має *слабкий розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega,\Im,\Im_t,\mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\Im_t$, $t\geq 0$, неперервний семімартингал $(\xi(t),\Im_t)$ і стандартний одновимірний вінерівський процес $(w(t),\Im_t)$ такі, що

$$L^{\xi}(t,0)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_0^t I_{(-\delta,\delta)}(\xi(s))ds \tag{4}$$

існує майже напевно і (3) виконується майже напевно.

Будемо говорити, що рівняння (3) має *сильний розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β співвідношення (3) і (4) виконуються майже напевно на даному ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,\Im_t,\mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\Im_t$, $t\geq 0$ і даним вінерівським процесом $(w(t),\Im_t)$.

Для коефіцієнтів рівняння (3) введемо таку умову (I).

Умова (I):

I_1. Функція $b(x)$ неперервна і точка ноль є її єдиним нулем.

I_2. Існує константа $\Lambda\geq 1$ така, що

$$b^2(x)+\sigma^2(x)\leq\Lambda(1+x^2),\ \sigma^2(x)\geq\Lambda^{-1}.$$

I_3. Функція $\sigma(x)$ не змінює знак і є функцією локально обмеженої варіації: для будь-якого $N<\infty$

$$\sup_{-N=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k=N}\sum_{i=1}^{k}|\sigma(x_i)-\sigma(x_{i-1})|<\infty.$$

I_4. Константа $|\beta| < 1$.

3. Результати для звичайних диференціальних рівнянь. Наведемо деякі результати для задачі Коші (2). Будемо вважати, що для функції $b(x)$ задачі (2) завжди мають місце умови I_1 та I_2. Тоді задача (2) має принаймні один – нульовий – розв'язок і всі розв'язки цієї задачі проходять через точку $(0;0)$. З існування двох різних розв'язків за теоремою Кнезера [9, теорема III.4.1] випливає, що їх нескінченно багато. Множину інтегральних кривих – яку називають інтегральною воронкою – позначимо через $\mathfrak{R}$. Кожен розв'язок з інтегральної воронки можна розташувати між двома спеціальними розв'язками – які будемо називати *екстремальними* – відповідно верхнім $\overline{y}(t)$ і нижнім $\underline{y}(t)$, де згідно [10, теорема II.1.2] $\overline{y}(t) = \sup\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$, $\underline{y}(t) = \inf\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$.

Відмітимо, що якщо $b(x)x < 0$ для $x \neq 0$, то задача (2) має лише нульовий розв'язок.

Для існування ненульового розв'язку (2) необхідна збіжність хоча б одного з інтегралів [11, теорема 1.2.8]:

$$\int_0^\delta \frac{1}{b(y)}dy, \ \int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)}dy. \tag{5}$$

Таким чином, ненульові розв'язки (2) існують у таких випадках:

A_1. $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і обидва інтеграли в (5) збіжні.

A_2. $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (5) збіжний, а другий - розбіжний.

A_3. $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (5) розбіжний, а другий - збіжний.

A_4. $b(x) > 0$ при $x \neq 0$ і перший з інтегралів в (5) збіжний.

A_5. $b(x) < 0$ при $x \neq 0$ і другий з інтегралів в (5) збіжний.

Позначимо $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{b(y)}dy$ для $x \geq 0$ і $K(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{b(y)}dy$ для $x \leq 0$. За умови виконання I_1 дані функції строго монотонні, тому існують обернені до них, які позначимо через $H^{-1}(x)$ та $K^{-1}(x)$, відповідно.

Лема 1. ***1.*** *У випадку A_1 всі ненульові розв'язки задачі (2) мають вигляд:*

$$y_\lambda(t) = H^{-1}\big((t-\lambda)^+\big), \ \ \lambda \geq 0, \tag{6}$$

$$y_\mu(t) = K^{-1}\big(-(t-\mu)^+\big), \ \ \mu \geq 0. \tag{7}$$

При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

2. *У випадках A_2 і A_4 всі ненульові розв'язки задачі (2) мають вигляд (6). При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = 0$.*

3. *У випадках A_3 і A_5 всі ненульові розв'язки задачі (2) мають вигляд (7). При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = 0$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.*

Твердження леми 1 безпосередньо випливають з [8, лема 2.2] і [8, лема 2.3].

Далі для $|\beta| < 1$ введемо функцію

$$\kappa(x) = \begin{cases} (1-\beta)x, & x \leq 0 \\ (1+\beta)x, & x \geq 0 \end{cases}; \tag{8}$$

і $\varphi(x)$ – обернену до $\kappa(x)$. Будемо позначати для функції $f(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = \frac{f(\kappa(x))}{1+\beta \mathrm{sgn} x}. \tag{9}$$

У подальших дослідженнях важливу роль відіграє така задача Коші:

$$\dot{z}(t) = \widetilde{b}(z(t)), \quad z(0) = 0. \tag{10}$$

За лемою 1 задача (10) має розв'язки одного з двох типів:

$$z_\lambda(t) = \widetilde{H}^{-1}\big((t-\lambda)^+\big), \ \ \lambda \geq 0,$$

$$z_\mu(t) = \widetilde{K}^{-1}\big(-(t-\mu)^+\big), \ \ \mu \geq 0,$$

де $\widetilde{H}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\widetilde{b}(y)}dy$ для $x \geq 0$; $\widetilde{K}(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{\widetilde{b}(y)}dy$ для $x \leq 0$.

Зрозуміло, що $\widetilde{H}^{-1}(t)$ та $\widetilde{K}^{-1}(-t)$ є відповідно верхнім і нижнім екстремальним розв'язком – позначатимемо їх $\overline{z}(t)$, $\underline{z}(t)$.

Встановимо зв'язок між екстремальними розв'язками задач (2) та (10). Має місце такий результат:

Лема 2. $\overline{y}(t) = \kappa(\overline{z}(t))$, $\underline{y}(t) = \kappa(\underline{z}(t))$.

Доведення леми 2. Доведемо для функції $\overline{y}(t)$, для $\underline{y}(t)$ – аналогічно. Нехай функція $y(t)$ - довільний розв'язок задачі (2). Зрозуміло, що $y(t) \leq \overline{y}(t)$. Розглянемо функцію $z(t) = \varphi(y(t))$. Функції з множини $\mathfrak{R}$ не змінюють свого знаку, тому з (2) будемо мати

$$z(t) = \frac{y(t)}{1+\beta \mathrm{sgn} y(t)} = \frac{1}{1+\beta \mathrm{sgn} y(t)} \int_0^t b(\kappa(\varphi(y(s)))ds =$$
$$= \int_0^t \frac{b(\kappa(\varphi(y(s)))}{1+\beta \mathrm{sgn}\varphi(y(s))}ds = \int_0^t \tilde{b}(z(s))ds.$$

Звідси випливає, що функція $z(t) = \varphi(y(t))$ є розв'язком задачі (10). Функція $\varphi(x)$ є строго зростаючою, тому отримуємо

$$z(t) = \varphi(y(t)) \leq \varphi(\overline{y}(t)) = \overline{z}(t). \qquad \square$$

Позначимо

$$A_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp\Big[-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{(1+\beta \mathrm{sgn} s) b\big((1+\beta \mathrm{sgn} s)s\big)}{\sigma^2\big((1+\beta \mathrm{sgn} s)s\big)}ds\Big]dt.$$

Дослідження ваг граничної міри приводить до обчислення виразу

$$\Gamma_K = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-A_\varepsilon(-K)}{A_\varepsilon(K) - A_\varepsilon(-K)}. \tag{11}$$

Для обчислення Γ_K покладемо

$$L(x) = \int_0^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy. \tag{12}$$

Лема 3. *Нехай $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$, для деяких констант d, γ та $\delta > 0$ при $x \to 0+$ має місце асимптотична еквівалентність*

$$L(x)\ln^{\gamma} L(x) \sim dx^{\delta} \tag{13}$$

та для деяких констант k, θ та $\mu > 0$ при $x \to 0-$ має місце асимптотична еквівалентність

$$L(x)\ln^{\theta} L(x) \sim k|x|^{\mu}. \tag{14}$$

Тоді величина Γ_K не залежить від K (то ж будемо позначати її просто Γ) і мають місце такі твердження:

1. Якщо $\delta = \mu$ і $\gamma = \theta$, то

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta}\left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{1}{\delta}}}.$$

2. Якщо $\delta < \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma < \theta$, то $\Gamma = 1$.

3. Якщо $\delta > \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma > \theta$, то $\Gamma = 0$.

Доведення леми 3. Позначимо

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1+\beta\mathrm{sgn}y)b\big((1+\beta\mathrm{sgn}y)y\big)}{\sigma^2\big((1+\beta\mathrm{sgn}y)y\big)}dy.$$

Розглянемо випадок $x > 0$. Будемо мати:

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1+\beta)b\big((1+\beta)y\big)}{\sigma^2\big((1+\beta)y\big)}dy = \int_0^{(1+\beta)x} \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy = L\big((1+\beta)x\big),$$

де функція $L(x)$ визначена в (12). Тоді з умови (13) маємо

$$L^*(x)|\ln L^*(x)|^{\gamma} \sim d(1+\beta)^{\delta}x^{\delta} = d(1+\beta)^{\delta}x^{\delta}.$$

При $x < 0$ з умови (14) аналогічно отримуємо

$$L^*(x)|\ln L^*(x)|^{\gamma} \sim k(1-\beta)^{\mu}|x|^{\mu}.$$

Скориставшись тепер [8, лема 2.8] для функції $A_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_0^x \exp\Big[-\frac{2}{\varepsilon^2}L^*(t)\Big]dt$ отримаємо твердження даної леми. □

4. Основні результати. Розглядаємо рівняння (3). Відомо, що за умов I_2 і I_4 існує єдиний слабкий розв'язок цього рівняння – [12, теорема 4.35]. З результату роботи [13] і [8, теорема 3.2] випливає така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I_2, I_3, I_4. Тоді рівняння (3) має єдиний сильний розв'язок.*

Позначимо через μ_ε міру, породжену процесом $\xi_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(C[0,\infty), \mathfrak{B})$. Основними результатами роботи є такі дві теореми.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (3) мають місце умови* I_1, I_2, I_4, A_1, *(13), (14). Тоді для мір* $\{\mu_\varepsilon\}$ *і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала* F, *заданого на просторі* $C[0,\infty)$, *має місце рівність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C[0,\infty)} F(f)\mu_\varepsilon(df) = \Gamma F(\overline{y}) + \big(1-\Gamma\big)F(\underline{y}), \tag{15}$$

де $\overline{y}, \underline{y}$ *– екстремальні розв'язки задачі (2), а величина* Γ *визначена лемою 3.*

При дослідженні випадків $A_2 - A_5$ буде застосовано теорему порівняння. Тому тут потрібні сильні розв'язки стохастичних рівнянь.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (3) має місце умова (I).*
У випадках A_2 *і* A_4 *за умови (13) гранична міра для послідовності* $\{\mu_\varepsilon\}$ *зосереджена лише на верхньому екстремальному розв'язку задачі (2).*
У випадках A_3 *і* A_5 *за умови (14) гранична міра для послідовності* $\{\mu_\varepsilon\}$ *зосереджена лише на нижньому екстремальному розв'язку задачі (2).*

5. Доведення основних результатів. За формулами (8)-(9) введемо функції $\kappa(x)$, $\varphi(x)$, $\widetilde{b}(x)$, $\widetilde{\sigma}(x)$, та розглянемо таке стохастичне рівняння Іто

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \widetilde{b}(\eta_\varepsilon(s))ds + \varepsilon\int_0^t \widetilde{\sigma}(\eta_\varepsilon(s))dw(s), \qquad t\in[0,1]. \tag{16}$$

Зауважимо, що для функцій $\widetilde{b}(t)$, $\widetilde{\sigma}(t)$ так само мають місце умова (I) і та ж умова з A_1-A_5, що й для $b(t)$, $\sigma(t)$. Рівняння (16) має єдиний слабкий розв'язок згідно з [14] і з [13] маємо $\eta_\varepsilon(t) = \varphi(\xi_\varepsilon(t))$ або ж $\xi_\varepsilon(t) = \kappa(\eta_\varepsilon(t))$.

Рівнянню (16) відповідає задача Коші (10).

Позначимо через ν_ε міру, породжену процесом $\eta_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(C[0,\infty),\mathfrak{B})$.

Доведення теореми 2. З умов теореми 2 випливає, що для коефіцієнтів процесу $\eta_\varepsilon(t)$ мають місце умови [8, теорема 4.1]. Тому міри $\{\nu_\varepsilon\}_\varepsilon$ слабко збігаються і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F, заданого на просторі $C[0,\infty)$, має місце рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C[0,\infty)} F(f)\nu_\varepsilon(df) = \widetilde{\Gamma} F(\overline{z}) + \big(1-\widetilde{\Gamma}\big)F(\underline{z}). \tag{17}$$

Гранична міра ν задається правою частиною рівності (17), тобто

$$\nu(A) = \widetilde{\Gamma} I_{\{\overline{z}(\cdot)\in A\}} + (1-\widetilde{\Gamma}) I_{\{\underline{z}(\cdot)\in A\}};$$

$\overline{z}, \underline{z}$ - екстремальні розв'язки задачі (10); величина $\widetilde{\Gamma}$ за [8, формула (2.11)] дорівнює

$$\widetilde{\Gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\int_0^{-K}\exp\Big[-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{\sigma}^2(s)}ds\Big]dt}{\int_0^K \exp\Big[-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{\sigma}^2(s)}ds\Big]dt - \int_0^{-K}\exp\Big[-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{\sigma}^2(s)}ds\Big]dt} = \Gamma,$$

де величина Γ визначена в (11).

Далі, з означення міри, породженої процесом, маємо:

$$\mu_\varepsilon\{A\} = \mathsf{P}\{\xi_\varepsilon(\cdot) \in A\} = \mathsf{P}\{\kappa(\eta_\varepsilon(\cdot)) \in A\} = \mathsf{P}\{\eta_\varepsilon(\cdot) \in \varphi(A)\} = \nu_\varepsilon\{\varphi(A)\}.$$

З (17) та леми 2 можемо отримати

$$\nu(\varphi(A)) = \widetilde{\Gamma} I_{\{\overline{z}(\cdot)\in\varphi(A)\}} + (1-\widetilde{\Gamma}) I_{\{\underline{z}(\cdot)\in\varphi(A)\}} =$$

$$= \widetilde{\Gamma} I_{\{\kappa(\overline{z}(\cdot))\in A\}} + (1-\widetilde{\Gamma}) I_{\{\kappa(\underline{z}(\cdot))\in A\}} = \Gamma I_{\{\overline{y}(\cdot)\in A\}} + (1-\Gamma) I_{\{\underline{y}(\cdot)\in A\}} = \mu(A),$$

де міра μ визначається правою частиною рівності (15), тобто

$$\mu(A) = \Gamma I_{\{\overline{y}\in A\}} + (1-\Gamma) I_{\{\underline{y}\in A\}}.$$

Використовуючи все це, для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F, заданого на просторі $C[0,\infty)$, будемо мати

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C[0,\infty)} F(y)\mu_\varepsilon\{dy\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C[0,\infty)} F(y)\nu_\varepsilon\{\varphi(dy)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C[0,\infty)} F(\kappa(y))\nu_\varepsilon\{dy\} =$$

$$= \int_{C[0,\infty)} F(\kappa(y))\nu\{dy\} = \int_{C[0,\infty)} F(y)\nu\{\varphi(dy)\} = \int_{C[0,\infty)} F(y)\mu\{dy\}.$$

□

Доведення теореми 3. Теорема 3 доводиться аналогічно теоремі 2 з використанням [8, теорема 4.3] замість [8, теорема 4.1]. □

6. Приклад. Нехай в рівнянні (3) коефіцієнти мають вигляд

$$b(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \ge 0, \\ -|x|^\alpha, & x \le 0, \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1.$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2-\cos x, & x \ge 0, \\ 2+\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

В цьому випадку будемо мати асимптотичну еквівалентність: при $x \to 0+$

$$L(x) \sim \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1},$$

а при $x \to 0-$

$$L(x) \sim \frac{1}{9(\alpha+1)} |x|^{\alpha+1}.$$

Тобто мають місце умови (13) і (14) з константами

$$\gamma = 0, d = \frac{1}{\alpha+1}, \delta = \alpha+1; \;\; \theta = 0, k = \frac{1}{9(\alpha+1)}, \mu = \alpha+1.$$

Крім того, має місце умова A_1. Таким чином, виконуються умови теореми 2, отже має місце слабка збіжність мір. Границю (11) можна обчислити за допомогою леми 3:

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} 9^{\frac{1}{\alpha+1}}},$$

і гранична міра зосереджена із вказаною вагою Γ на верхньому екстремальному розв'язку та з вагою $1-\Gamma$ на нижньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (2).

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
2. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional Diffusion Processes. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979. – 334 p.
3. *Baldi P.* Petites perturbations d'un phenomene Peano // Annales scientifiques de l'Universite de Clermont-Ferrand 2. – 1982. – V. 71, № 20. – P. 41-52.
4. *Baldi P., Bafico R.* Small Random Perturbations of Peano Phenomena // Stochastics. – 1982. – V. 6. – P.279-292.
5. *Веретенников А.Ю.* О приближении обыкновенных дифференциальных уравнений стохастическими // Математические заметки. – 1983. – Т. 33, № 6. – С. 929-932.
6. *Gradinaru M., Herrmann S., Roynette B.* A singular large deviations phenomenon // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 2001. – V. 37. – P. 555-580.
7. *Buckdahn R., Quincampoix M., Ouknine Y.* On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero // Bulletin des sciences mathematiques. – 2009. – V. 133. – P. 229-237.
8. *Крыкун И.Г., Махно С.Я.* Явление Пеано для уравнений Ито // Український математичний вісник. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 87-109.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
10. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Иностранная литература, 1958. – 472 с.
11. *Agarwal R.P., Lakshmikantham V.* Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1993. – 312 p.
12. *Engelbert H.J., Schmidt W.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III // Math. Nachr. – 1991. – V. 151, № 1. – P. 149-197.
13. *Махно С.Я.* Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем // Теория вероятностей и математическая статистика. – 2001. – Т. 64. – С. 106-109.
14. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Т. 24, № 2. – С. 354-366.

I. H. Krykun

Analogue of Peano phenomenon for stochastic equations with local time.

We consider sequence of measures generated by solutions of stochastic equations with local time and small diffusion. The conditions of weak convergence of these measures to measure, generated by extreme solutions of the corresponding Cauchy problem, when diffusion coefficient tends to 0 is obtained. Formulae for weights of extreme solutions is obtained.

Keywords: *weak convergence of measures, stochastic equations, local time.*

И. Г. Крыкун

Аналог явления Пеано для стохастических уравнений с локальным временем.

Рассматривается последовательность мер, порожденных решениями стохастических уравнений с локальным временем и малой диффузией. Получены условия слабой сходимости этих мер к мере, сосредоточенной с некоторыми весами на экстремальных решениях соответствующей задачи Коши при стремления коэффициента диффузии к нулю. Получены формулы для вычисления упомянутых весов.

Ключевые слова: *слабая сходимость мер, стохастические уравнения, локальное время.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк *Получено 14.05.13*
iwanko@i.ua