УДК 517.5

©2013. **А. В. Делюкина, Вит. В. Волчков**

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ НЕИНВАРИАНТНЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Изучаются искаженные сферические средние на гиперболической плоскости и их обобщения. Получены теоремы о среднем для собственных функций возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами.

Ключевые слова: *сферические средние, свертка, теоремы о среднем.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – группа Мёбиуса конформных автоморфизмов $\mathbb{D}$, r – фиксированное положительное число. Существует ли неголоморфная функция $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{|z|=\operatorname{th} r} (f \circ g)(z)dz = 0 \quad \text{для любого} \qquad g \in G? \tag{1}$$

Более общо, что можно сказать о функции f, если увеличить число радиусов r в уравнении (1)?

Вопросы такого типа начали изучаться К.А. Беренстейном и Д. Паскуасом в работе [1]. В частности, были доказаны теоремы типа Мореры, характеризующие голоморфные функции в терминах указанных интегральных средних. Отметим, что мера dz в (1) неинвариантна относительно группы G, что существенно отличает рассматриваемые задачи от ряда других подобных вопросов, связанных с преобразованием Помпейю (см.[2-4] и имеющуюся там библиографию).

Особый интерес представляют локальные варианты уравнения (1), например, когда функция f задана в круге $B_R = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \operatorname{th} R\}, R > r$, а (1) выполнено при всех $g \in G$ таких, что $g\overline{B_r} \subset B_R$. Применение формулы Грина сводит (1) к уравнению вида

$$\int\limits_{gB_r} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)(1-|z|^2)^2(1-z\cdot\overline{g0})^{-2}d\mu(z) = 0, \tag{2}$$

где $g0$ – образ точки 0 под действием g,

$$d\mu(z) = \frac{i}{2}\frac{dz\wedge\overline{dz}}{(1-|z|^2)^2}.$$

Для изучения этого уравнения важно иметь подходящий аналог классической теоремы о среднем для собственных функций лапласиана (см., например, [2, часть 1, глава 7]). В данной работе получено решение этой задачи.

2. Формулировка основного результата. Пусть $i, j \in \{1, 2\}, \delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$g_{i,j}(z) = \frac{\delta_{i,j}}{(1-|z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Круг $\mathbb{D}$ с метрическим тензором $\{g_{i,j}\}$ является моделью Пуанкаре вещественной гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ постоянной секционной кривизны -4 (см.[5, введение]). Группа G действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$g(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad \text{где} \quad a,b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{3}$$

Как обычно, считаем, что мера Хаара dg на G нормирована соотношением

$$\int\limits_G f(g0)dg = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z), \quad f \in L^1(\mathbb{D}; d\mu) \tag{4}$$

(см.[5, введение, §4.3]).

Круг B_R является геодезическим шаром на $\mathbb{H}^2$ радиуса R с центром в нуле, т.е.

$$B_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0,z) < R\},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ – функция расстояния на $\mathbb{H}^2$. Нам потребуются следующие классы функций и распределений в B_R: $L^{1,loc}(B_R)$ – совокупность локально интегрируемых функций в B_R; $RA(B_R)$ – класс вещественно-аналитических функций; $\mathcal{D}'(B_R)$ – пространство распределений на B_R; $\mathcal{E}'(B_R)$ – пространство распределений с компактным носителем; $\mathcal{E}'_\natural(B)_R$ – множество радиальных (т.е. инвариантных относительно поворотов) распределений из $\mathcal{E}'(B_R)$.

Пространство $L^{1,loc}(B_R)$ будет вкладываться в $\mathcal{D}'(B_R)$ с помощью отождествления функции $f \in L^{1,loc}(B_R)$ с распределением

$$\psi \to \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)\psi(z)d\mu(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R),$$

где $\mathcal{D}(B_R)$ – пространство бесконечно-дифференцируемых финитных функций на B_R.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R), s \in \mathbb{Z}$. Введем четную целую функцию

$$\mathcal{F}_s(T)(\lambda) = \langle T, \mathcal{B}^s_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где

$$\mathcal{B}^s_\lambda(z) = (1-|z|^2)^s F\left(\frac{1-s+i\lambda}{2}, \frac{1-s-i\lambda}{2}; 1; \frac{|z|^2}{|z|^2-1}\right),$$

$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ – аналитическое продолжение на $\mathbb{C}\backslash[1;\infty)$ гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k} z^k, \quad |z|<1 \quad ((\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1), ...).$$

Кроме того, положим

$$r(T) = inf\{r > 0 : suppT \subset B_r\},$$

где $suppT$ – носитель распределения T. Для $f \in C^{\infty}(B_R)$ определим свертку

$$(f \times^s T)(g^{-1}0) = \langle T, z \to f(g^{-1}z)(1 - z \cdot \overline{g0})^s \rangle, \quad g^{-1}0 \in B_{R-r(T)}. \tag{5}$$

Лемма 1 ниже показывает, что данное определение корректно и дает формулу для свертки в случае, когда T – регулярное распределение.

Наконец, положим

$$\mathcal{L}_s = (1 - |z|^2)^2 \triangle + 4s(1 - |z|^2)\overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^2$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{D}), \quad R \in (r(T), +\infty]$ *и*

$$\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f \quad \text{в} \quad B_R$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$(f \times^s T) = \mathcal{F}_s(T)(\lambda) f \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}. \tag{6}$$

Отметим, что при $s = 0$ утверждение теоремы 1 совпадает с известной теоремой о среднем для собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ [5, гл.4, §2]. Относительно других результатов в этом направлении см.[2-5].

3. Вспомогательные утверждения. Пусть $SO(2)$ – группа вращений $\mathbb{R}^2$. Следующее утверждение показывает корректность определения (5).

Лемма 1. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(B_R), \quad f \in C^{\infty}(B_R)$. *Тогда функция*

$$\Theta(g) = \langle T, z \to f(g^{-1}z)(1 - \overline{g0} \cdot z)^s \rangle, \quad g \in G : g^{-1}0 \in B_{R-r(T)}$$

постоянна на правых классах смежности группы G *по подгруппе* $SO(2)$ *и является, таким образом, функцией от* $g^{-1}0$. *Кроме того, если* $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_{\natural})(B_R)$, *то*

$$(f \times^s T)(z) = \int\limits_G f(g0) T(g^{-1}z) \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - \overline{z} \cdot g0} \right)^2 dg, \quad z \in B_{R-r(T)}. \tag{7}$$

Доказательство. Для $\tau \in SO(2)$ имеем

$$\Theta(\tau g) = \langle T, z \to f(g^{-1}\tau^{-1}z)(1 - z \cdot \overline{\tau g0})^s \rangle = \langle T, z \to f(g^{-1}\tau^{-1}z)(1 - \tau^{-1}z \cdot \overline{g0})^s \rangle.$$

Отсюда и из радиальности T получаем $\Theta(\tau g) = \Theta(g)$, что доказывает первое утверждение. Далее, пусть $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_{\natural})(B_R)$. Тогда

$$(f \times^s T)(g^{-1}0) = \int\limits_{\mathbb{D}} T(z) f(g^{-1}z)(1 - \overline{g0} \cdot z)^s d\mu(z). \tag{8}$$

Прямое вычисление показывает (см.(3)), что

$$\frac{1-|g0|^2}{1-g0\cdot\overline{z}} = 1 - g^{-1}0\cdot\overline{g^{-1}z}. \tag{9}$$

Используя (8), (9), инвариантность $d\mu$ относительно G и (4), получаем

$$\begin{aligned}(f\times^s T)(g^{-1}0) &= \int\limits_{\mathbb{D}} T(z)f(g^{-1}z)\left(\frac{1-|g^{-1}0|^2}{1-\overline{g^{-1}0}\cdot g^{-1}z}\right)^s d\mu(z) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} T(gw)f(w)\left(\frac{1-|g^{-1}0|^2}{1-\overline{g^{-1}0}\cdot w}\right)^s d\mu(w) = \\ &= \int\limits_{G} T(gh0)f(h0)\left(\frac{1-|g^{-1}0|^2}{1-\overline{g^{-1}0}\cdot h0}\right)^s dh.\end{aligned}$$

Теперь учитывая, что $T(gh0) = T(h^{-1}g^{-1}0)$, приходим к (7). $\square$

Наша дальнейшая цель – установить инвариантность $\mathcal{L}_s$ относительно "сдвигов"

$$f(z)\to f(g^{-1}z)(1-z\cdot\overline{g0})^s, \quad g\in G. \tag{10}$$

Для краткости положим

$$\mathbf{g}z = g^{-1}z = \frac{\overline{a}z-b}{a-\overline{b}z}, \quad u_s(z) = (1-z\cdot\overline{g0})^s,$$

$$A_1 = (1-|z|^2)^2\triangle = 4(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}, \qquad A_2 = 4s(1-|z|^2)\overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}.$$

Нетрудно видеть, что для $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{D})$

$$A_1(f_1f_2) = f_1A_1f_2 + f_2A_1f_1 + 4(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial\overline{z}}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right). \tag{11}$$

Кроме того, очевидно, что

$$A_1u_s = 0, \quad A_2u_s = 0. \tag{12}$$

Лемма 2. *Пусть* $\Phi(z) = f(\mathbf{g}z)u_s(z)$. *Тогда*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{u_s(z)}{(a-\overline{b}z)^2} - \frac{s\overline{b}}{a}f(\mathbf{g}z)u_{s-1}(z), \tag{13}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{u_s(z)}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{g}$ - голоморфное отображение,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ\mathbf{g})=\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{1}{(a-\overline{b}z)^2},\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f\circ\mathbf{g})=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{\partial\overline{\mathbf{g}}}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{1}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}.\tag{16}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial u_s}{\partial z}=-\frac{s\overline{b}}{a}u_{s-1},\quad \frac{\partial u_s}{\partial \overline{z}}=0,\tag{17}$$

из (15), (16) получаем (13) и (14). □

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{L}_s$ инвариантен относительно "сдвигов"(10), т.е.*

$$\mathcal{L}_s(f(\mathbf{g}z)u_s(z))=(\mathcal{L}_s f)(\mathbf{g}z)u_s(z).\tag{18}$$

Доказательство. Согласно (11) и (17),

$$A_1((f\circ\mathbf{g})u_s)=(f\circ\mathbf{g})A_1(u_s)+u_sA_1(f\circ\mathbf{g})-\frac{4s\overline{b}}{a}\cdot(1-|z|^2)^2\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(f\circ\mathbf{g})u_{s-1}.$$

Поскольку $\mathbf{g}$ является движением гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, а оператор A_1 совпадает с оператором Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{H}^2$ (см.[5, введение]), то

$$A_1(f\circ\overline{\mathbf{g}})=(A_1 f)\circ\mathbf{g}.$$

Тогда (см.(16) и (12))

$$A_1((f\circ\mathbf{g})u_s)=u_s(A_1 f)\circ\mathbf{g}-\frac{4s\overline{b}}{a}\frac{(1-|z|^2)^2}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z)u_{s-1}.$$

Далее,

$$A_2((f\circ\mathbf{g})u_s)=\frac{4s(1-|z|^2)\overline{z}u_s(z)}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z),$$

т.е.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s(f(\mathbf{g}z)u_s(z))&=u_s(A_1 f)\circ\mathbf{g}+\frac{4s(1-|z|^2)}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z)(\overline{z}u_s(z)-\frac{\overline{b}}{a}u_{s-1}(z)(1-|z|^2))=\\&=u_s(A_1 f)\circ\mathbf{g}+\frac{4s}{a}\frac{(1-|z|^2)}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z)u_{s-1}(z)(a\overline{z}-\overline{b}).\end{aligned}\tag{19}$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{L}_s f)(\mathbf{g}z)u_s(z)=(A_1 f)(\mathbf{g}z)u_s(z)+4s(1-|\mathbf{g}z|^2)\overline{\mathbf{g}z}u_s(z)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z).\tag{20}$$

Сравнивая (19) и (20) с использованием равенства

$$1 - |\mathbf{g}z|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|a - \bar{b}z|^2},$$

получаем (18). $\square$

Лемма 4. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и радиальная функция $f \in C^2(\mathbb{D})$ удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f. \tag{21}$$

Тогда

$$f(z) = f(0)\mathcal{B}_\lambda^s(z). \tag{22}$$

Доказательство. Полагая $f(z) = \varphi(\rho)$, где $\rho = |z|$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\overline{z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}z,$$

$$(A_1 f)(z) = (1-\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$(\mathcal{L}_s f)(z) = (1-\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right) + 2s\rho(1-\rho^2)\varphi'(\rho).$$

Поэтому уравнение (21) можно переписать в виде

$$(1-\rho^2)^2\varphi''(\rho) + \frac{1-\rho^2}{\rho}\varphi'(\rho)(1 + (2s-1)\rho^2) + (\lambda^2 + (s+1)^2)\varphi(\rho) = 0. \tag{23}$$

Обозначим $\nu = \frac{1+s+i\lambda}{2}$. Из (23) для функции $\psi(\rho) = (1-\rho^2)^{-\nu}\varphi(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1-\rho^2)\psi''(\rho) + \psi'(\rho)(1 - \rho^2(4\nu - 2s + 1)) + 4\nu(s-\nu)\psi(\rho)\rho = 0. \tag{24}$$

С другой стороны, гипергеометрическая функция $h(\rho) = F(\alpha, \beta; \gamma; \rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1-\rho^2)h''(\rho) + h'(\rho)(2\gamma - 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)\rho^2) - 4\alpha\beta\rho h(\rho) = 0 \tag{25}$$

(см.[6, глава 2, формула 2.1(1)]). Сравнивая (24) с (25) и учитывая гладкость ψ в нуле, заключаем, что

$$f(z) = f(0)(1-\rho^2)^\nu F(\nu - s, \nu; 1; \rho^2).$$

Это равенство и формула

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

(см.[6, глава 2, формула 2.9(3)]) влекут (22). □

4. Доказательство теоремы 1. Поскольку $\mathcal{L}_s$ является эллиптическим оператором, то $f \in RA(B_R)$. Возьмем $g \in G$ такое, что $g\overline{B_{r(T)}} \subset B_R$. Пусть $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0 : g\overline{B_{r(T)}} \subset B_{R-\varepsilon}\}$. Для $z \in B_{r(T)+\varepsilon_0}$ положим

$$f_g(z) = \int\limits_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z)(1 - \tau z \cdot \overline{g0})^s d\tau, \tag{26}$$

где $d\tau$ – мера Хаара на $SO(2)$, нормированная соотношением

$$\int\limits_{SO(2)} d\tau = 1.$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g \in RA_\natural(B_{r(T)+\varepsilon_0}) \quad \text{и} \quad f_g(0) = f(g^{-1}0). \tag{27}$$

Кроме того,

$$f_g(z) = \int\limits_{SO(2)} f(g^{-1}\tau z)(1 - z \cdot \overline{\tau^{-1}g0})^s d\tau.$$

Отсюда и из леммы (3) имеем

$$(\mathcal{L}_s f_g)(z) = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f_g(z).$$

Тогда (см. (27) и лемму (4)) $f_g(z) = f(g^{-1}0)\mathcal{B}_\lambda^s(z)$ и $\langle T, f_g\rangle = f(g^{-1}0)\mathcal{F}_s(T)(\lambda)$. Теперь из (26), (5) и радиальности T следует утверждение теоремы 1.

5. Случай шаровых и сферических средних. Положим

$$S_r(w) = \{z \in \mathbb{D} : d(z,w) = r\}, \quad B_r(w) = \{z \in \mathbb{D} : d(z,w) < r\},$$

$$d\mu_0(z) = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C(\mathbb{D})$ *и* $\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f$ *при некотором* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\int\limits_{S_{r(w)}} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}}\right)^s d\mu_0(z) = \pi \operatorname{sh}(2r)\mathcal{B}_\lambda^s(\operatorname{th} r) f(w). \tag{28}$$

Доказательство. Обозначим через σ_r радиальное распределение на $\mathbb{H}^2$, действующее по правилу

$$\langle \sigma_r, \psi\rangle = \int\limits_{S_r} \psi(z) d\mu_0(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{D}),$$

где $S_r = S_r(0)$. Тогда (см. (9))

$$(f \times^s \sigma_r)(g0) = \langle \sigma_r, f(gz)(1 - z \cdot \overline{g^{-1}0})^s \rangle = \int\limits_{S_r} f(gz)(1 - z \cdot \overline{g^{-1}0})^s d\mu_0(z) =$$

$$= \int\limits_{S_r(g0)} f(\varsigma)(1 - g^{-1}\varsigma \cdot \overline{g^{-1}0})^s d\mu_0(\varsigma) =$$

$$= \int\limits_{S_r(g0)} f(\varsigma) \left(\frac{1 - |g0|^2}{1 - \varsigma \cdot \overline{g0}} \right)^s d\mu_0(\varsigma).$$

Кроме того,

$$\mathcal{F}_s(\sigma_r)(\lambda) = \langle \sigma_r, \mathcal{B}^s_\lambda \rangle = \int\limits_{|z| = \operatorname{th} r} \mathcal{B}^s_\lambda(z) d\mu_0(z) = \pi \operatorname{sh}(2r) \mathcal{B}^s_\lambda(\operatorname{th} r).$$

Отсюда и из (6) получаем (28). $\square$

Для изучения случая шаровых средних нам потребуется функция Якоби первого рода:

$$\varphi^{(\alpha,\beta)}_\lambda(t) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\operatorname{sh}^2 t \right).$$

Отметим следующую формулу дифференцирования (см. [3, предложение 7.2]):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2t} \triangle_{\alpha+1,\beta+1}(t) \varphi^{(\alpha+1,\beta+1)}_\lambda(t) \right) = \frac{16}{\Gamma(\alpha + 1)} \triangle_{\alpha,\beta}(t) \varphi^{(\alpha,\beta)}_\lambda(t), \qquad (29)$$

где $\triangle_{\alpha,\beta}(t) = 2^{2\alpha+2\beta+2}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}$, Γ – гамма-функция.

Теорема 3. *Пусть $f \in C(\mathbb{D})$ и $\mathcal{L}_s f = -(\lambda^2 + (s+1)^2) f$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\int\limits_{B_{r(w)}} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}} \right)^s d\mu(z) = \pi (\operatorname{sh} r)^2 (\operatorname{ch} r)^{2-2s} \varphi^{(1,1-s)}_\lambda(r) f(w).$$

Доказательство. Обозначим через χ_r индикатор шара B_r. Как и в доказательстве теоремы 2, получаем

$$(f \times^s \chi_r)(w) = \int\limits_{B_{r(w)}} f(z) \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\overline{w}} \right)^s d\mu(z). \qquad (30)$$

Далее, учитывая, что $\mathcal{B}^s_\lambda(\operatorname{th} t) = (\operatorname{ch} t)^{-2s}\varphi_\lambda^{(0,-s)}(t)$ и используя (29), имеем

$$\mathcal{F}_s(\chi_r)(\lambda) = \int\limits_{B_r} \mathcal{B}^s_\lambda(z)d\mu(z) = 2\pi \int\limits_0^{\operatorname{th} r} \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\mathcal{B}^s_\lambda(\rho)d\rho =$$

$$= \pi \int\limits_0^r \operatorname{sh}(2t)\mathcal{B}^s_\lambda(\operatorname{th} t)dt = 2^{2s-1}\pi \int\limits_0^r \triangle_{0,-s}(t)\varphi_\lambda^{(0,-s)}(t)dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^r \frac{d}{dt}\left((\operatorname{sh} t)^2(cht)^{2-2s}\varphi_\lambda^{(1,1-s)}(t)\right)dt =$$

$$= \pi(\operatorname{sh} r)^2(chr)^{2-2s}\varphi_\lambda^{(1,1-s)}(r).$$

Теперь требуемое утверждение следует из (30) и теоремы 1. □

1. *Berenstein C.A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyberbolic disc. // Israel.J.Math, 1994. – Vol. 86, 61-106 p.
2. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equastion. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Birkhäuser: Basel. – 2013. – 592 p.
5. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.

A. V. Delukina, Vit. V. Volchkov

The mean value theorem for non-problems in the theory of analytic functions.

We study distorted spherical means on the hyperbolic plane and their generalizations. We obtain the mean value theorems for eigenfunctions of the perturbed Laplace-Beltrami operator.

Keywords: *spherical means, convolution, mean value theorems .*

А. В. Делюкіна, Віт. В. Волчков

Теореми про середнє для неінваріантних задач у теорії аналітичних функцій.

Вивчаються викривлені сферичні середні на гіперболічній площині та їх узагальнення. Отримано теореми про середнє для власних функцій оператора Лапласа-Бельтрамі.

Ключові слова: *сферичні середні, згортка, теореми про середнє.*

Донецкий национальный ун-т
delux_math89@mail.ru

Получено 14.05.13