УДК 517.5

©2013. **Н. П. Волчкова**

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СМИТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

Изучаются векторные поля в евклидовом пространстве с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса. Получено описание таких полей в виде рядов по специальным функциям.

Ключевые словаа: *векторные поля, нулевые сферические средние, сферические гармоники.*

1. Введение. Пусть $\mathcal{P}$ – множество функций $f \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию периодичности

$$f(x-1) - f(x+1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Согласно теории рядов Фурье, f можно разложить в равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \pi m x + b_m \sin \pi m x), \tag{2}$$

т.е. представить f в виде суммы константы $\frac{a_0}{2}$ и последовательности функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, принадлежащих $\mathcal{P}$ и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям $f_m''(x) + \pi^2 m^2 f_m(x) = 0$.

Если рассматривать f как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие (1) означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу единичного радиуса. Таким образом, равенство (2) дает представление для полей с нулевым потоком через все сферы единичного радиуса. Этот факт допускает нетривиальное обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$. При этом, константа $\frac{a_0}{2}$ интерпретируется как соленоидальное векторное поле, а $\{f_m\}$ заменяются на потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению для собственных функций оператора Лапласа ∇^2. Указанное утверждение является частным случаем следующего локального результата Д. Смита [1].

Теорема A. *Пусть* $\mathbf{A} : B_{R+1} \to \mathbb{R}^n$ $(1 < R \leq \infty)$ *– векторное поле в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{n+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$*, имеющее нулевой поток через любую сферу единичного радиуса, лежащую в* B_{R+1}*. Тогда для* $\mathbf{x} \in B_R$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}_m^p(\mathbf{x}), \tag{3}$$

в котором ряд сходится равномерно на компактах из B_R*,* $\mathbf{A}^s$ *– соленоидальное векторное поле класса* $C^{n+\alpha}$ *и* $\mathbf{A}_m^p$ *– потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению* $(\nabla^2 + \nu_m^2)\mathbf{A}_m^p = \mathbf{0}$*, где* $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ *– последовательность всех положительных нулей функции Бесселя* $J_{n/2}$*, занумерованных в порядке возрастания. Указанное разложение является единственным.*

Символ B_R в теореме A и ниже обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле. Класс $C^{n+\alpha}$ определяется как класс таких функций $f \in C^n$, у которых частные производные порядка n удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

Одним из существенных недостатков теоремы A является отсутствие разложения (3) на всей области определения. В данной работе получено полное описание полей $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ $(0 < R \leq \infty)$, имеющих нулевой поток через все сферы фиксированного радиуса r из B_R.

2. Формулировка основного результата. Пусть $r > 0$ фиксировано. При $r < R \leq \infty$ обозначим $\mathbf{V}_r(B_R)$ множество непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через все сферы радиуса r, лежащие в B_R.

Далее, как обычно, S^{n-1} – единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1}. Пространство $L^2(S^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [2, введение, § 3]). Пусть d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Для точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |\mathbf{x}|$, а если $\mathbf{x} \neq 0$, то $\sigma = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в $\mathbb{R}^n$ по формуле $Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R),$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma.$$

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию, определяемую равенством

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{4}$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

(см., например, [3, глава 4]).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ *– векторное поле класса* C^∞. *Тогда* $\mathbf{A}$ *принадлежит* $\mathbf{V}_r(B_R)$ *в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in B_R, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}^s$ *– соленоидальное векторное поле класса* C^∞, B *– скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами*

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l} \rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right),$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ *убывают быстрее любой степени* ν_m *при* $m \to \infty$.

Таким образом, в отличие от теоремы **A**, теорема 1 дает разложение для полей **A** из рассматриваемого класса на всей области определения. Отметим также, что теорема 1 является развитием результатов В.В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса на случай векторных полей (см. [4], а также [5-7]).

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для функции* $h(t) = {}_1F_2(\alpha;\alpha+1,\beta;\gamma t)$ *имеет место соотношение*

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha\Gamma(\beta)\frac{J_{\beta-1}(2\sqrt{-\gamma t})}{\sqrt{-\gamma t}^{\;\beta-1}}.$$

Доказательство. Из (4) и определения h имеем

$$\alpha h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k\alpha}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!}, \tag{6}$$

$$th'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{k(\gamma t)^k}{k!}. \tag{7}$$

Складывая (6) с (7) и учитывая, что

$$\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k}(\alpha+k) = \alpha,$$

получаем

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!}. \tag{8}$$

Используя (8) и разложение

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)_k}\frac{(-z^2/4)^k}{k!}$$

(см. [3, глава 7]), приходим к требуемому утверждению. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = \psi_{m,k}(\rho^2)Y_l^{(k)}(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$, *где*

$$\psi_{m,k}(\rho^2) = {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2};\frac{n+k}{2}+1,\frac{n}{2}+k;-\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right).$$

Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = \zeta_{n,k}\,\mathcal{I}_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m\rho}{r}\right)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}), \tag{9}$$

где

$$\mathcal{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu},$$

$$\zeta_{n,k} = (n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Доказательство. Обозначим через $b^j_{m,k,l}(\mathbf{x})$ компоненты поля $\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x})$. Тогда

$$\frac{\partial b^j_{m,k,l}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \psi_{m,k}(\rho^2)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + 2\psi'_{m,k}(\rho^2)x_j^2 Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) +$$

$$\psi_{m,k}(\rho^2)x_j\frac{\partial Y_l^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = n\psi_{m,k}(\rho^2)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) + 2\psi'_{m,k}(\rho^2)\rho^2 Y_l^{(k)}(\mathbf{x}) +$$

$$\psi_{m,k}(\rho^2)\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial Y_l^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Отсюда по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\operatorname{div}\mathbf{b}_{m,k,l}(\mathbf{x}) = \big(2\psi'_{m,k}(\rho^2)\rho^2 + (n+k)\psi_{m,k}(\rho^2)\big)Y_l^{(k)}(\mathbf{x}).$$

Применяя лемму 1, получаем (9). □

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$, $\overline{B_r}(\mathbf{x})$ – замкнутый шар радиуса r из B_R с центром в точке $\mathbf{x}$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали к границе шара $\overline{B_r}(\mathbf{x})$. По формуле Гаусса-Остроградского имеем

$$\int_{\overline{B_r}(\mathbf{x})}\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{\partial\overline{B_r}(\mathbf{x})}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in B_{R-r}.$$

Отсюда (см. [4, теорема 3])

$$(\operatorname{div}\mathbf{A})_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}c_{m,k,l}J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m\rho}{r}\right), \tag{10}$$

где константы $c_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \to \infty$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{x}$, где

$$B(\mathbf{x}) = \int_0^1 \operatorname{div}\mathbf{A}(t\mathbf{x})t^{n-1}dt.$$

Тогда

$$B_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}}B(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma = \int_{S^{n-1}}\left(\int_0^1\operatorname{div}\mathbf{A}(t\rho\sigma)t^{n-1}dt\right)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{S^{n-1}} \operatorname{div}\mathbf{A}(t\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma\right) t^{n-1}dt = \int_0^1 (\operatorname{div}\mathbf{A})_{k,l}(t\rho)t^{n-1}dt.$$

Теперь в соответствии с (10),

$$B_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{t\nu_m\rho}{r}\right) t^{\frac{n}{2}}dt.$$

Используя формулу

$$\int_0^1 J_\nu(at)t^\lambda dt = \frac{a^\nu}{2^\nu(\lambda+\nu+1)\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$ {}_1F_2\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2};\frac{\lambda+\nu+3}{2},\nu+1;-\frac{a^2}{4}\right), \quad \operatorname{Re}(\lambda+\nu)>-1$$

(см. [8, пункт 1.9.1, формула 1]), получаем

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l}\rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2};\frac{n+k}{2}+1,\frac{n}{2}+k;-\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right), \tag{11}$$

где

$$\gamma_{m,k,l} = \frac{c_{m,k,l}}{\zeta_{n,k}}\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{C}^j(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \int_0^1 \operatorname{div}\mathbf{A}(t\mathbf{x})t^{n-1}dt + x_j\int_0^1 \frac{\partial\,(\operatorname{div}\mathbf{A})}{\partial x_j}(t\mathbf{x})t^n dt.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{C}(\mathbf{x}) = n\int_0^1 \operatorname{div}\mathbf{A}\big(t\mathbf{x})t^{n-1}dt + \int_0^1 \frac{d}{dt}(\operatorname{div}\mathbf{A}\big(t\mathbf{x})\big)t^n dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = \operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{12}$$

Полагая

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{A} - \mathbf{C},$$

из (11) и (12) получаем представление (5).

Обратное утверждение теоремы 1 следует из леммы 2, формулы Гаусса-Остроградского и [4, теорема 3]. Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Smith J.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403-416.
2. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 1, 2. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296 с.
4. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 15-34.
5. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 pp.
7. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser., 2013. – 592 pp.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

N. P. Volchkova

On a theorem of Smith and its generalizations.

Vector fields in Euclidean space which have zero flux through every sphere of fixed radius are studied. For fields in such classes a description in the form of a series in special functions is obtained.

Keywords: *vector fields, zero spherical means, spherical harmonics.*

Н. П. Волчкова

Про одну теорему Сміта та її узагальнення.

Вивчаються векторні поля в евклідовому просторі, які мають нульову течію через сфери фіксованого радіуса. Одержано опис таких полів у вигляді рядів за спеціальними функціями.

Ключові слова: *векторні поля, нульові сферичні середні, сферичні гармоніки.*

Донецкий национальный технический ун-т
`v.volchkov@donnu.edu.ua`

Получено 15.05.13