УДК 517.926(07)

©2013. **М. Б. Віра**

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖУВАНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, знайдено умови існування і єдиності розв'язку двоточкової крайової задачі для систем даного типу та побудовано його асимптотику в критичному випадку, коли гранична в'язка матриць має нульове власне значення.

Ключові слова: *асимптотика, сингулярні збурення, гранична в'язка матриць.*

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

де $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]-$ малий дійсний параметр, $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ – шуканий та задані $n-$вимірні вектори, відповідно; $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ – дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n-го порядку; M, N – квадратні матриці зі сталими елементами n-го порядку.

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1° матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{3}$$

2° коефіцієнти розвинень $A_k(t)$, $B_k(t)$, $f_k(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку [0;T];

3° $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0;T]$;

4° $(B_1(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ – власні вектори матриці $B_0(t)$ та спряженої з нею матриці $B_0^*(t)$, відповідно;

5° $\det A_0(t) = 0, \forall t \in [0;T]$;

6° $rank A_0(t) = rank B_0(t) = n-1$;

7° гранична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t) \tag{4}$$

при всіх $t \in [0;T]$ має прості елементарні дільники: $n-1$ скінченних $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ і один нескінченний.

8° вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k.$$

Крайова задача (1), (2) розглядалась у роботах $[1-3]$ у так званому некритичному випадку [4], коли матриця $A_0(t)$ невироджена, і, отже, серед власних значень відсутнє нульове. У даній роботі розглядається більш складний критичний випадок, коли гранична в'язка матриць (4) має нульове власне значення, наявність якого значно ускладнює процес побудови асимптотики розв'язку крайової задачі (1), (2).

Припустимо для визначеності, що $\lambda_1(t) \equiv 0$. Власні вектори, які відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$ в'язки матриць (4), позначимо $\varphi_i(t)$, відповідні власні вектори спряженої їй в'язки – через $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, та визначимо їх так, щоб вони були нескінченно диференційовними і виконувалися рівності

$$(B_0(t)\varphi_i(t), \psi_i(t)) = 1, \; i = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

де (x, y) – скалярний добуток в унітарному $n-$вимірному просторі, в якому розглядається дана задача [5]. Вектори $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$, які фігурують в умові 4°, визначимо так, щоб виконувалась рівність

$$(A_0(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) = 1. \tag{6}$$

2. Побудова формальних розв'язків однорідної системи. Розв'язок крайової задачі (1), (2) побудуємо, виходячи з результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку однорідної системи

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \tag{7}$$

проведеного в [5]. Як показано в [5], за виконання умови 4° загальний розв'язок однорідної системи (7) являє собою лінійну комбінацію $n-1$ лінійно незалежних формальних розв'язків, що відповідають простим скінченним елементарним дільникам, і одного розв'язку, що відповідає нескінченному елементарному дільнику. Причому розв'язок, що відповідає елементарному дільнику λ, побудуємо у вигляді ряду

$$x_1(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(1)}(t), \tag{8}$$

розв'язки, що відповідають елементарним дільникам $\lambda - \lambda_i(t), i = \overline{2, n-1}$ – у вигляді

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{\alpha_i}^{t} \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \; i = \overline{2, n-1}, \tag{9}$$

а розв'язок, що відповідає нескінченному елементарному дільнику – у вигляді

$$x_n(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-2} \int_{\alpha_n}^{t} \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \tag{10}$$

де $u_i(t,\varepsilon), i = \overline{1, n-1}, v(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, а $\lambda_i(t,\varepsilon), i = \overline{2, n-1}$, $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, які зображаються формальними розвиненнями за степенями ε:

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t),\ i = \overline{2, n-1}, \tag{11}$$

$$v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \xi(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t), \tag{12}$$

$\alpha_i, i = \overline{1, n}$ – сталі, які буде визначено нижче.

Коефіцієнти розвинень (8), (11), (12) визначимо так, щоб вектори (8)-(10) формально задовольняли систему (7). Для цього підставимо ці вектори в систему (7) і в одержаній тотожності прирівняємо вирази при однакових експонентах і без них. Дістанемо:

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)(u_1(t,\varepsilon))' = A(t,\varepsilon)u_1(t,\varepsilon), \tag{13}$$

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)(u_i(t,\varepsilon))' + \lambda_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon), i = \overline{2, n-1}, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2 \xi(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)(v(t,\varepsilon))' + B(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) = \varepsilon\xi(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon). \tag{15}$$

Підставивши в (13) розвинення (8) і (3) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, отримаємо нескінченну систему рівнянь:

$$A_0(t)u_0^{(1)}(t) = 0, \tag{16}$$

$$A_0(t)u_k^{(1)}(t) = b_k^{(1)}(t), \tag{17}$$

де

$$b_k^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_i(t)(u_{k-1-i}^{(1)}(t))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)u_{k-i}^{(1)}(t).$$

Із рівняння (16) знайдемо

$$u_0^{(1)}(t) = \alpha_0(t)\varphi_1(t), \tag{18}$$

де $\alpha_0(t)$ – поки що невідома функція.

Враховуючи (18) і ввівши до розгляду оператор

$$\Gamma_1 = B_0 \frac{d}{dt} - A_1, \tag{19}$$

розглянемо рівняння (17) при $k = 1$:

$$A_0(t)u_1^{(1)}(t) = (\alpha_0(t))' B_0(t)\varphi_1(t) + \alpha_0(t)\Gamma_1\varphi_1. \tag{20}$$

Згідно з (5) умова розв'язності рівняння (20) відносно вектора $u_1^{(1)}(t)$ – ортогональність його правої частини до вектора $\psi_1(t)$ – запишеться у вигляді лінійного однорідного диференціального рівняння

$$(\alpha_0(t))' + (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)\alpha_0(t) = 0,$$

розв'язавши яке, визначимо функцію $\alpha_0(t)$:

$$\alpha_0(t) = \exp\left(-\int_0^t (\Gamma_1\varphi_1(\tau), \psi_1(\tau))d\tau\right). \tag{21}$$

Тоді рівняння (20) має розв'язок

$$u_1^{(1)}(t) = H_1\Gamma_1(\alpha_0(t)\varphi_1(t)) + \alpha_1(t)\varphi_1(t),$$

де $H_1(t)$ – напівобернена матриця для матриці $A_0(t)$, а $\alpha_1(t)$ – функція, яка підлягає визначенню.

Продовжуючи так і далі, із умови розв'язності рівняння (17) на k-у кроці дістанемо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $\alpha_{k-1}(t)$:

$$(\alpha_{k-1}(t))' + (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)\alpha_{k-1}(t) + \left(\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-j}\widetilde{P}_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\alpha_j\varphi_1), \psi_1\right) = 0. \tag{22}$$

Символом $\widetilde{P}_k^j(H_1\Gamma)$ позначено оператор, який являє собою суму всіх можливих добутків k "множників"$H_1\Gamma_{i_1}, ..., H_1\Gamma_{i_k}$ з натуральними індексами $i_1, ..., i_k$, сума яких дорівнює j, де $\Gamma_i = B_{i-1}\frac{d}{dt} - A_i$, $i = 1, 2, ...$ При цьому перший множник H_1 у всіх доданках "відбирається". Наприклад, $\widetilde{P}_2^3(H_1\Gamma) = \Gamma_1 H_1\Gamma_2 + \Gamma_2 H_1\Gamma_1$.

Знайшовши $\alpha_{k-1}(t)$ з рівняння (22), вектор $u_k^{(1)}(t)$ визначимо за формулою

$$u_k^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} P_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\alpha_j\varphi_1) + \alpha_k(t)\varphi_1(t), \tag{23}$$

де $P_k^j(H_1\Gamma) = H_1\widetilde{P}_k^j(H_1\Gamma)$, $\alpha_k(t)$ – невідома функція, яка аналогічним чином визначається на наступному кроці.

Підставивши в (14) розвинення (3), (11) і прирівнявши коефіцієнти при k-х степенях ε, дістанемо:

$$(A_0(t) - \lambda_i B_0(t))u_k^{(i)}(t) = b_k^{(i)}(t),\ k = 1, 2, ...,\ i = \overline{2, n-1} \tag{24}$$

де

$$b_k^{(i)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t)B_0(t)\varphi_i(t) + g_k^{(i)}(t),$$

$$g_k^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-l}\lambda_l^{(i)}B_j u_{k-l-j}^{(i)} + \lambda_i\sum_{j=1}^{k}B_j u_{k-j}^{(i)} - \sum_{l=1}^{k}A_l u_{k-l}^{(i)} + \sum_{l=0}^{k-1}B_l(u_{k-1-l}^{(i)})'.$$

Із умови розв'язності рівнянь (24) знайдемо

$$\lambda_k^{(i)}(t) = -(g_k^{(i)}(t), \psi_i(t)), k \geq 1, \tag{25}$$

а вектори $u_k^{(i)}(t)$ виразимо формулою

$$u_k^{(i)}(t) = H_i(t) b_k^{(i)}(t), i = \overline{2, n-1}, k \geq 1, \tag{26}$$

де $H_i(t)$ – напівобернена матриця для матриці $A_0(t) - \lambda_i(t) B_0(t)$.

Аналогічно, підставивши в (15) розвинення (3), (12) та прирівнявши вирази при однакових степенях ε, маємо

$$B_0(t) v_k(t) = a_k(t),\ k = 1, 2, ..., \tag{27}$$

де

$$a_k = \xi_{k-1} A_0 \widetilde{\varphi} + l_k, k = 1, 2, ...,$$

$$l_k = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-i} \xi_i A_j v_{k-1-i-j} - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \xi_i B_j v'_{k-2-i-j} - \sum_{i=1}^{k} B_i v_{k-i}, k = 1, 2, ... \tag{28}$$

Врахувавши 4°, (6), із умови розв'язності рівнянь (27) – ортогональності векторів $a_k(t)$ до вектора $\psi(t)$ – знайдемо

$$\xi_0(t) = (B_1(t) \widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)), \tag{29}$$

$$\xi_k(t) = -(l_{k+1}(t), \widetilde{\psi}(t)), k = 2, 3, ... \tag{30}$$

Після цього вектори $v_k(t)$ визначимо за формулою

$$v_k(t) = G(t) a_k(t), k \geq 1, \tag{31}$$

де $G(t)$ – напівобернена матриця до $B_0(t)$.

За рекурентними формулами (23), (25), (26), (29)-(31) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (8), (11), (12).

3. Побудова формального частинного розв'язку неоднорідної системи. Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) побудуємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \widetilde{v}(t, \varepsilon), \tag{32}$$

де $\widetilde{v}(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображається формальним розвиненням

$$\widetilde{v}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t). \tag{33}$$

Для визначення коефіцієнтів $\widetilde{v}_k(t)$ підставимо (33) у систему (1) і прирівняємо вирази при однакових степенях малого параметра. Дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=0}^{k} B_i \widetilde{v}'_{k-1-i} = \sum_{i=0}^{k} A_i \widetilde{v}_{k-i} + f_{k-1}, k = 0, 1, ... \tag{34}$$

При $k = 0$ маємо

$$A_0(t) \widetilde{v}_0(t) = 0,$$

звідки
$$\widetilde{v}_0(t) = \beta_0(t)\varphi_1(t), \tag{35}$$
де $\beta_0(t)$ – деяка достатньо гладка функція, яка підлягає визначенню.

На наступному кроці рівняння (34) запишеться у вигляді
$$A_0(t)\widetilde{v}_1(t) = B_0(t)(\widetilde{v}_0(t))' - A_1(t)\widetilde{v}_0(t) - f_0(t),$$
або, враховуючи (19):
$$A_0(t)\widetilde{v}_1(t) = \Gamma_1\widetilde{v}_0(t) - f_0(t). \tag{36}$$
Для його сумісності необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність
$$(\Gamma_1\widetilde{v}_0(t) - f_0(t), \psi_1(t)) = 0,$$
яку, враховуючи (35) і (5), запишемо у вигляді
$$(\beta_0(t))' + (\Gamma_1\varphi_1(t), \psi_1(t))\beta_0(t) - (f_0(t), \psi_1(t)) = 0. \tag{37}$$
Розв'язавши одержане диференціальне рівняння, дістанемо функцію $\beta_0(t)$.

У свою чергу з рівняння (36) знайдемо:
$$\widetilde{v}_1(t) = H_1\Gamma_1(\beta_0(t)\varphi_1(t)) - H_1(t)f_0(t) + \beta_1(t)\varphi_1(t),$$
де $\beta_1(t)$ – поки що невідома функція, яка визначається на наступному кроці.

Використавши умову сумісності рівняння (34) на k-у кроці, дістанемо лінійне диференціальне рівняння для визначення $\beta_{k-1}(t)$:
$$(\beta_{k-1}(t))' + (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1)\beta_{k-1}(t)+$$
$$+\left(\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-j}\widetilde{P}_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\beta_j\varphi_1) - \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-1-j}\widetilde{P}_l^{k-1-j}(H_1\Gamma)H_1f_j - f_{k-1}, \psi_1\right) = 0. \tag{38}$$

У свою чергу вектор $\widetilde{v}_k(t)$ визначимо за формулою
$$\widetilde{v}_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-j}P_l^{k-j}(H_1\Gamma)(\beta_j\varphi_1) - \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-1-j}P_l^{k-1-j}(H_1\Gamma)H_1f_j -$$
$$-H_1f_{k-1} + \beta_k(t)\varphi_1(t). \tag{39}$$

4. Побудова асимптотики розв'язку крайової задачі. Перейдемо тепер до побудови розв'язку крайової задачі (1), (2). Розглянемо випадок, коли виконується умова
$$9^\circ Re\lambda_i(t) < 0,\ i = \overline{2,l},\ Re\lambda_j(t) > 0,\ j = \overline{l+1, n-1},\ Re\xi_0(t) > 0, \forall t \in [0;T].$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}u_1(t,\varepsilon)\cdot c_1(\varepsilon)+\varepsilon^{-1}\sum_{i=2}^{l}u_i(t,\varepsilon)\cdot c_i(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\sum_{j=l+1}^{n-1}u_j(t,\varepsilon)\cdot c_j(\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_t^T\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+\varepsilon^{-1}v(t,\varepsilon)\cdot c_n(\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-2}\int_t^T\xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+\widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{40}$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$ – шукані скалярні множники, які зображаються розвиненнями

$$c_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k c_k^{(i)},\ i=\overline{1,n}, \tag{41}$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,...$ визначимо з крайової умови (2). Підставивши вектор (40) у крайову умову (2), дістанемо рівняння

$$Mu_1(0,\varepsilon)\cdot c_1(\varepsilon)+\sum_{i=2}^{l}Mu_i(0,\varepsilon)\cdot c_i(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j=l+1}^{n-1}Mu_j(0,\varepsilon)\cdot c_j(\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_0^T\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+Mv(0,\varepsilon)\cdot c_n(\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-2}\int_0^T\xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+M\widetilde{v}(0,\varepsilon)+Nu_1(T,\varepsilon)\cdot c_1(\varepsilon)+\sum_{i=2}^{l}Nu_i(T,\varepsilon)\cdot c_i(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^T\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{j=l+1}^{n-1}Nu_j(T,\varepsilon)\cdot c_j(\varepsilon)+Nv(T,\varepsilon)\cdot c_n(\varepsilon)+N\widetilde{v}(T,\varepsilon)=d(\varepsilon).$$

Знехтувавши експоненціально малими доданками і прирівнявши вирази при однакових степенях малого параметра, маємо

$$\sum_{j=0}^{k}[Mu_j^{(1)}(0)+Nu_j^{(1)}(T)]c_{k-j}^{(1)}+\sum_{i=2}^{l}\sum_{j=0}^{k}Mu_j^{(i)}(0)\cdot c_{k-j}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}Nu_j^{(i)}(T)\cdot c_{k-j}^{(i)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{k}Nv_j(T)\cdot c_{k-j}^{(n)}=d_{k-1}-M\widetilde{v}_k(0)-N\widetilde{v}_k(T).$$

Ввівши позначення

$$c_k = col(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, ..., c_0^{(l)}, c_0^{(l+1)}, ..., c_0^{(n-1)}, c_0^{(n)}),$$

$$U_k = [Mu_k^{(1)}(0) + Nu_k^{(1)}(T); Mu_k^{(2)}(0), ...,$$

$$Mu_k^{(l)}(0), Nu_k^{(l+1)}(T), ..., Nu_k^{(n-1)}(T), Nv_k(T)],\ k = 0, 1, ...,$$

останнє рівняння запишемо у векторно-матричному вигляді

$$U_0 c_k + \sum_{i=1}^{k} U_i c_{k-i} = d_{k-1} - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(T),\ k = 0, 1, ... \tag{42}$$

Згідно з (8), (11), (12), матриця $U_0(t)$ має вигляд

$$U_0 = \left[M\varphi_1(0) + \exp\left(-\int_0^T (\Gamma_1\varphi_1, \psi_1) d\tau\right) N\varphi_1(T); M\varphi_2(0), ..., M\varphi_l(0),\right.$$

$$\left. N\varphi_{l+1}(T), ..., N\varphi_{n-1}(T), N\widetilde{\varphi}(T)\right].$$

Припустимо виконання умови

10° $\det U_0 \neq 0$.

Тоді із рівняння (42) однозначно визначається вектор сталих c_k:

$$c_k = U_0^{-1}[d_{k-1} - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(T) - \sum_{i=1}^{k} U_i c_{k-i}],\ k = 0, 1, ... \tag{43}$$

Підставивши одержані сталі у вектор (40), дістанемо формальний розв'язок крайової задачі.

Методами роботи [1] можна показати, що за виконання накладених умов побудований у такий спосіб вираз (40) є асимптотичним зображенням єдиного точного розв'язку крайової задачі (1), (2).

Справджується така теорема.

Теорема. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 10^\circ$, *то при досить малих* ε *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k} u_j^{(1)}(t) c_{k-j}^{(1)} +$$

$$+\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{i=2}^{l} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) +$$

$$+\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(-\varepsilon^{-1} \int_t^T \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) +$$

$$+\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k} v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp\left(-\varepsilon^{-2} \int_t^T \xi_m^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t) + O(\varepsilon^{m-3}),$$

де $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_k(t)$, $\widetilde{v}_k(t)$ *– n−вимірні вектор-функції, які визначаються рекурентними формулами (23), (26), (31), (39);* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{2, n-1}$, $\xi_m(t,\varepsilon)$ *– скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень*

$$\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t),\ i = \overline{2, n-1},\ \xi_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \xi_k(t),$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами (25), (29), (30), $c_k^{(i)}$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$ *– сталі множники, які визначаються за формулами (43).*

1. *Яковец В.П.* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. – 2008. – Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 319-332.
2. *Яковець В.П.* Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 272-286.
3. *Віра М.Б.* Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи // Динамические системы: межведомственный научный сборник. – 2009. – Вып. 26. – С. 13-24.
4. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
5. *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

M. B. Vira

On constructing of asymptotic solution of the boundary-value problem for the linear degenerated singularly perturbed system of differential equations in critical case.

Using the theory of the asymptotic integration of singularly perturbed systems of differential equations with degenerations, the existence and uniqueness conditions for the solution of the two-pointed boundary-value problem for the given system have been found. The asymptotics of the solution in critical case is constructed. It is considered that the boundary bundle of matrices has one eigenvalue which is identically equal to zero.

Keywords: *asymptotics, singular perturbations, boundary bundle of matrices.*

М. Б. Вира

О построении асимптотического решения краевой задачи для линейной вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений в критическом случае.

Исходя из результатов асимптотического анализа общего решения линейных сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений с вырождаемой матрицей при производной, определены условия существования и единственности решения двухточечной краевой задачи для систем данного типа и построена его асимптотика в критическом случае, когда предельный пучок матриц имеет нулевое собственное значение.

Ключевые слова: *асимптотика, сингулярные возмущения, предельный пучок матриц.*

Ніжинський державний ун-т ім. М. Гоголя
`VyraMaryna@mail.ru`

Получено 11.04.13