УДК 517.977.1

©2013. **Н. В. Брадул**

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В статье рассмотрена задача построения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки гауссовского частично наблюдаемого случайного процесса по наблюдениям, содержащим запаздывание. Показано, что решение задачи фильтрации можно свести к решению разностного уравнения типа Винера-Хопфа, называемого основным уравнением фильтрации. Рассмотрены частные случаи основного уравнения фильтрации, в которых его решение можно получить в явном виде. Исследована зависимость ошибки оценивания от величины запаздывания в наблюдениях.

Ключевые слова: *оптимальная оценка, задача фильтрации, ошибка оценивания.*

1. Введение. Задача фильтрации поставлена и решена А.Н. Колмогоровым для стационарных случайных последовательностей и Н. Винером для систем с непрерывным временем. Н. Винер свел решение поставленной задачи к решению так называемого интегрального уравнения Винера-Хопфа. В статье доказано, что решение задачи фильтрации частично наблюдаемым гауссовским случайным процессом по результатам наблюдений, содержащих запаздывание, сводится к решению уравнения типа Винера-Хопфа.

2. Основное уравнение фильтрации. Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{S}$, $i \in Z = \{0, 1, \ldots, N\}$. Обозначим через $\big(x(i), y(i)\big)$ частично наблюдаемый $\mathfrak{F}_i$-измеримый случайный процесс, $x(i)$ – ненаблюдаемая, $y(i)$ – наблюдаемая компоненты, $x(i) \in \mathbf{R}^n$, $y(i) \in \mathbf{R}^k$.

Рассмотрим задачу фильтрации, состоящую в построении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $m_0(N)$ величины $x(N)$ по результатам наблюдений $y(i)$, $0 \le i \le N$. Если $\mathbf{E}\big|x(N)\big|^2 < \infty$, то такой оценкой является условное математическое ожидание [1]

$$m_0(N) = \mathbf{E}\big(x(N)/\mathfrak{F}_N^y\big). \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{F}_i^y$ – минимальная σ-алгебра, порожденная процессом $y(j)$, $0 \le j \le i$.

Предположим, что $x(i)$ – гауссовский случайный процесс, $y(i)$ определяется соотношением

$$y(i+1) = A(i)x(i-h) + \xi(i+1),\ x(j) = 0,\ -h \le j < 0,\ y(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\xi(i) \in \mathbf{R}^k$ $\mathfrak{F}_i$-измеримые гауссовские случайные величины с независимыми значениями, $\mathbf{E}\xi(i) = 0$, $\mathbf{E}\xi(i)\xi'(j) = 0$, $i \ne j$, $\mathbf{E}\xi(i)\xi'(i) = S(i)$, матрица $S(i)$ равномерно положительно определена, неслучайная матрица $A(i)$ размерности $k \times n$, $\mathbf{E}x(i) = 0$, $\mathbf{E}x(i)x'(j) = R(i,j)$, $\mathbf{E}x(i)\xi'(j) = Q(i,j)$, $Q(i,j) = 0$, при $i < j$, матрицы $S(i)$, $R(i,j)$, $Q(i,j)$ имеют соответствующие размерности.

Лемма 1. *Существует неслучайная матрица $u_0(j)$, $j \in Z$, размерности $n \times k$*

такая, что для оценки (1) справедливо представление

$$m_0(N) = \sum_{j=0}^{N-1} u_0(j) y(j+1). \tag{3}$$

Доказательство леммы является следствием из теоремы о нормальной корреляции [1].

Из Леммы 1 следует, что построение оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки (1) сводится к построению некоторой неслучайной матрицы.

Теорема 1. *Матрица $u_0(j)$, определяющая оценку (3), является единственным решением уравнения типа Винера-Хопфа*

$$u_0(j) S(j+1) + \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) Z(i,j) = P(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Здесь

$$P(j) = R(N, j-h) A'(j) + Q(N, j+1), \tag{5}$$

$$Z(i,j) = A(i) R(i-h, j-h) A'(j) + Q'(j-h, i+1) A'(j) + A(i) Q(i-h, j+1). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $m_0(N)$ – оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка величины $x(N)$, определяемая соотношением (3), а $m(N)$ – оценка вида (3) с произвольной функцией $u(j)$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}\big(x(N) - m_0(N)\big) m'(N) = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\big(x(N) - m_0(N)\big)/\mathfrak{F}_N^y\Big] m'(N) =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\big(x(N)/\mathfrak{F}_N^y\big) - m_0(N)\Big] m'(N) = 0. \tag{7}$$

Используя для оценок $m_0(N)$ и $m(N)$ представления вида (3), получим на основании (7)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[\mathbf{E} x(N) y'(j+1) - \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1)\right] u'(j) = 0. \tag{8}$$

Так как функция $u(j)$ произвольна, то выражение в квадратных скобках в (8) должно равняться нулю при каждом $j = 0, \ldots, N-1$. Таким образом, уравнение для определения функции $u_0(i)$ имеет вид

$$\mathbf{E} x(N) y'(j+1) = \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i) \mathbf{E} y(i+1) y'(j+1). \tag{9}$$

Используя (2), получим

$$\mathbf{E} x(N) y'(j+1) = \mathbf{E} x(N) x'(j-h) A'(j) + \mathbf{E} x(N) \xi'(j+1) =$$

$$= R(N, j-h)A'(j) + Q(N, j+1) = P(j), \tag{10}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\mathbf{E}\Big(A(i)x(i-h) + \xi(i+1)\Big)\Big(A(j)x(j-h) + \xi(j+1)\Big)'.$$

Отсюда с помощью (5), (6) следует

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1) = \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)\Big[A(i)R(i-h, j-h)A'(j)+$$

$$+Q'(j-h, i+1)A'(j) + A(i)Q(i-h, j+1)\Big] + u_0(j)S(j+1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} u_0(i)Z(i,j) + u_0(j)S(j+1). \tag{11}$$

Из (9)-(11) следует, что функция $u_0(i)$, определяющая оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку (3), является решением уравнения (4).

Докажем, что полученное решение задачи фильтрации единственно. Предположим, что существует два различных решения задачи (4) $u_1(j)$ и $u_2(j)$. Пусть $\Delta u(j) = u_1(j) - u_2(j)$. Подставляя $u_1(j)$ и $u_2(j)$ в (9) и вычитая одно равенство из другого, имеем $\sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta u(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1) = 0$. Умножая полученное выражение справа на $\Delta u'(j)$ и суммируя по $0 \le j \le N-1$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i)\mathbf{E}y(i+1)y'(j+1)\Delta u'(j) = 0,$$

откуда,

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1} \Delta u(i)y(i+1)\right|^2 = 0.$$

Обозначим

$$x_0(i) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha(i, j+1)\xi(j+1), \quad \alpha(i,j) = Q(i,j)S^{-1}(j),$$

$$\beta(j) = \Delta u(j) + \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i)A(i)\alpha(i-h, j+1).$$

Так как

$$\mathbf{E}[x(i) - x_0(i)]\xi'(j+1) = Q(i, j+1) - \mathbf{E}\sum_{l=0}^{N-1} \alpha(i, l+1)\xi(l+1)\xi'(j+1) =$$

$$= Q(i,j+1) - Q(i,j+1)S^{-1}(j+1)S(j+1) = 0,$$

то, используя (2), получим

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)y(i+1)\right|^2 = \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)\Big[A(i)x(i-h)+\xi(i+1)\Big]\right|^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)\Big[A(i)\Big(x(i-h)-x_0(i-h)\Big)+A(i)x_0(i-h)+\xi(i+1)\Big]\right|^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\left[\Delta u(i)A(i)\Big[x(i-h)-x_0(i-h)\Big]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta u(i)A(i)\sum_{j=0}^{N-1}\alpha(i-h,j+1)\xi(j+1)+\Delta u(i)\xi(i+1)\right]\right|^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\Big[x(i-h)-x_0(i-h)\Big]+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\sum_{j=0}^{N-1}\alpha(i-h,j+1)\xi(j+1)+\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)\xi(i+1)\right|^2.$$

Используя то, что $\alpha(i-h,j)=0$ при $i-h<j$, преобразуем две последние суммы в этом выражении следующим образом:

$$\sum_{i=h}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\sum_{j=0}^{i-h-1}\alpha(i-h,j+1)\xi(j+1)+\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)\xi(i+1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-h-2}\sum_{i=j+h+1}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\alpha(i-h,j+1)\xi(j+1)+\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)\xi(i+1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\left[\Delta u(j)+\sum_{i=j+h+1}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\alpha(i-h,j+1)\right]\xi(j+1) = \sum_{j=0}^{N-1}\beta(j)\xi(j+1).$$

В результате получаем

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)y(i+1)\right|^2 = \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\Big[x(i-h)-x_0(i-h)\Big]+\sum_{j=0}^{N-1}\beta(j)\xi(j+1)\right|^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\Delta u(i)A(i)\Big[x(i-h)-x_0(i-h)\Big]\right|^2 + Tr\left[\sum_{j=0}^{N-1}\beta(j)S(j+1)\beta'(j)\right] = 0.$$

Так как это выражение равно нулю, то, для любого $0 \le j \le N-1$,

$$Tr\big[\beta(j)S(j+1)\beta'(j)\big] = \sum_{l=1}^{m} \big[\beta_l(j)S(j+1)\beta_l'(j)\big] = 0,$$

где $\beta_l(j)$, $1 \le l \le m$ – строки матрицы $\beta(j)$. Из положительной определенности матрицы $S(j)$ вытекает $\beta_l(j) = 0$, для любого $1 \le l \le m$, следовательно, $\beta(j) = 0$, то есть,

$$\Delta u(j) + \sum_{i=j+h+1}^{N-1} \Delta u(i)A(i)\alpha(i-h, j+1) = 0. \tag{12}$$

Из уравнения (12) вытекает, что $\Delta u(j) = 0$ при $N-h-1 \le j \le N-1$. Пусть $j = N-h-2$, тогда (12) представимо в виде

$$\Delta u(N-h-2) + \Delta u(N-1)A(N-1)\alpha(N-h-1, N-h-1) = 0.$$

Отсюда $\Delta u(N-h-2) = 0$. Аналогично, при $j = N-h-3$ (12) имеет вид

$$\Delta u(N-h-3) + \sum_{i=N-2}^{N-1} \Delta u(i)A(i)\alpha(i-h, N-h-2) = 0,$$

то есть, $\Delta u(N-h-3) = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что $\Delta u(j) = 0$ при $0 \le j \le N-1$. Следовательно, два решения $u_1(j)$ и $u_2(j)$ совпадают для любого j, то есть, решение задачи фильтрации единственно. $\Box$

Вычислим ошибку оценивания $J(u_0)$ величины $x(N)$. С учетом (3), (5)

$$J(u_0) = \mathbf{E}\big|x(N) - m_0(N)\big|^2 = \mathbf{E}Tr\Big[x(N)\big(x(N) - m_0(N)\big)'\Big] =$$

$$= Tr\left[R(N,N) - \sum_{j=0}^{N-1} P(j)u_0'(j)\right]. \tag{13}$$

3. Частные случаи. В некоторых случаях решение уравнения (4) можно получить в явном виде. В частности, если $h \ge N$, то $R(N, j-h) = 0$ и из (4)–(6), (13) следует

$$u_0(j) = Q(N, j+1)S^{-1}(j+1),$$

$$J(u_0) = Tr\left[R(N,N) - \sum_{j=0}^{N-1} Q(N,j+1)S^{-1}(j+1)Q'(N,j+1)\right].$$

Пусть теперь $h < N$, ненаблюдаемый процесс $x(i) = \psi(i)x_0$, где $\psi(i)$ – неслучайная матрица, $\psi(0) = I$, x_0 – не зависящая от $\xi(i)$ гауссовская случайная величина, $\mathbf{E}x_0 = 0$, $\mathbf{E}x_0x_0' = D_0$. Тогда $Q(i,j) = 0$, а корреляционная матрица $R(i,j)$ имеет вид

$$R(i,j) = \psi(i)D_0\psi'(j). \tag{14}$$

В этом случае матрица $u_0(j) \equiv 0$ при $0 \le j < h$, а при $h \le j \le N$ определяется уравнением

$$u_0(j)S(j+1) + \sum_{i=h}^{N-1} u_0(i)A(i)\psi(i-h)D_0\psi'(j-h)A'(j) = \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j),$$

которое можно переписать в виде уравнения Фредгольма

$$u_0(j) = \left[\psi(N) - \sum_{i=h}^{N-1} u_0(i)A(i)\psi(i-h)\right] D_0\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1). \tag{15}$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$u_0(j) = \psi(N)F\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1), \tag{16}$$

где матрица F подлежит определению. Подставив (16) в (15) и положив

$$G = \sum_{i=h}^{N-1} \psi'(i-h)A_1(i)\psi(i-h) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi'(i)A_1(i+h)\psi(i),$$

$$A_1(i) = A'(i)S^{-1}(i+1)A(i), \tag{17}$$

получим $F = (I - FG)D_0 = D_0 - FGD_0$ или

$$F = \left(D_0^{-1} + G\right)^{-1}. \tag{18}$$

Таким образом, при указанных предположениях оптимальная оценка определяется формулами (3), (16)-(18). Из (13), (14), (16)-(18) вытекает, что соответствующая ошибка оценивания равна

$$J(u_0) = Tr\left[R(N,N) - \sum_{j=0}^{N-1} P(j)u_0'(j)\right] = Tr\left[\psi(N)D_0\psi'(N) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{N-1} \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j)\Big(\psi(N)F\psi'(j-h)A'(j)S^{-1}(j+1)\Big)'\right] =$$

$$= Tr\left[\psi(N)D_0\psi'(N) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{N-1} \psi(N)D_0\psi'(j-h)A'(j)\big(S^{-1}(j+1)\big)'A(j)\psi(j-h)F'\psi'(N)\right] =$$

$$= Tr\left(\psi(N)\left[D_0 - \sum_{j=0}^{N-1} D_0\psi'(j-h)A'(j)\big(S^{-1}(j+1)\big)'A(j)\psi(j-h)F'\right]\psi'(N)\right).$$

Так как

$$D_0 - \sum_{j=0}^{N-1} D_0\psi'(j-h)A'(j)\big(S^{-1}(j+1)\big)'A(j)\psi(j-h)F' = D_0 - D_0G'F' = F,$$

то окончательно получаем

$$J(u_0) = Tr\big[\psi(N)F\psi'(N)\big]. \tag{19}$$

4. Зависимость ошибки оценивания от величины запаздывания. Так как $x(i)$ и $\xi(i)$ независимы и $x(j)=0$ при $j \le 0$, то наблюдения (2) до момента h не несут никакой информации о процессе $x(i)$. Поэтому, общее время наблюдения за процессом $x(i)$ равно $N-h$ и убывает с ростом h. Рассмотрим два скалярных примера, показывающих, что увеличение запаздывания может приводить как к увеличению ошибки оценивания, так и к ее уменьшению.

Покажем, сначала, что при постоянном A_1, определенном в (17), ошибка оценивания, как функция от h не убывает с ростом h при $0 \le h < N$ и постоянна по h при $h \ge N$. Рассматривая $J(u_0)$ как функцию от h, при $0 \le h < N$ из (19), получим $J(h+1) - J(h) = \psi^2(N)\big(F(h+1) - F(h)\big)$. Из (18) следует, что

$$F(h+1) - F(h) = \big(D_0^{-1} + G(h+1)\big)^{-1} - \big(D_0^{-1} + G(h)\big)^{-1} =$$

$$= \frac{G(h) - G(h+1)}{\big(D_0^{-1} + G(h+1)\big)\big(D_0^{-1} + G(h)\big)}. \tag{20}$$

Учитывая (17),

$$G(h) - G(h+1) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i)A_1 - \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i)A_1 = \psi^2(N-h-1)A_1 > 0.$$

То есть, ошибка оценивания, как функция от h, увеличивается с ростом запаздывания.

Рассмотрим теперь случай, когда увеличение запаздывания h в канале наблюдения может привести к уменьшению $J(u_0)$, то есть, к увеличению точности оценивания. Пусть ненаблюдаемый процесс $x(i)$ имеет вид

$$x(i) = \psi(i)x_0, \qquad \psi(0) = 1, \tag{21}$$

где x_0 – гауссовская случайная величина, $\mathbf{E}x_0 = 0$, $\mathbf{E}x_0^2 = \sigma_0^2$. Наблюдаемый процесс $y(i)$ задан соотношениями

$$y(i+1) = A(i)x(i-h) + \xi(i+1), \quad x(j) = 0, \quad -h \le j < 0, \quad y(0) = 0. \tag{22}$$

Здесь $\xi(i)$ – гауссовский случайный процесс с независимыми значениями, не зависящими от x_0, $\mathbf{E}\xi(i) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(i) = \sigma^2(i)$. Требуется по результатам наблюдений (22) оценить величину $x(N)$.

Решение этой задачи имеет вид

$$m(N) = \sum_{j=h}^{N-1} u_0(j) y(j+1).$$

Здесь, учитывая (16)-(19),

$$u_0(j) = \psi(N) F(h) \psi'(j-h) \frac{A(j)}{\sigma^2(j+1)}, \quad F(h) = \bigl(\sigma_0^{-2} + G(h)\bigr)^{-1},$$

$$G(h) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i) A_1(i+h), \qquad A_1(i) = \frac{A^2(i)}{\sigma^2(i+1)},$$

а ошибка оценивания как функция от h имеет вид $J(h) = \psi^2(N)F(h)$. Из (20) следует, что для того, чтобы $J(h+1) - J(h) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$G(h) - G(h+1) = \sum_{i=0}^{N-h-1} \psi^2(i) A_1(i+h) - \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i) A_1(i+h+1) =$$

$$= \psi^2(N-h-1) A_1(N-1) + \sum_{i=0}^{N-h-2} \psi^2(i) \Bigl[A_1(i+h) - A_1(i+h+1)\Bigr] < 0. \tag{23}$$

Замечание 1. Если предположить, что матрица A_1 постоянна, то очевидно, что неравенство (23) не выполнено, то есть, $J(h+1) - J(h) > 0$ и $J(h)$ возрастает с ростом h.

Замечание 2. Пусть $\psi(i) \equiv 1$, то есть, $x(i) \equiv x_0$. Тогда, при $0 \le h \le N$, $J(h)$ возрастает по h, так как

$$G(h) - G(h+1) = \sum_{i=0}^{N-h-1} A_1(i+h) - \sum_{i=0}^{N-h-2} A_1(i+h+1) = A_1(h) > 0.$$

5. Примеры. Приведем примеры, в которых при помощи неравенства (23) найдены интервалы убывания функционала $J(h)$.

Пример 1. Рассмотрим задачу фильтрации (21), (22) при

$$\psi(i) = e^{-\alpha i}, \quad A(i) = e^{\beta i}, \quad \beta > \alpha > 1/2N, \quad \sigma^2(i) = \sigma_0^2 = 1.$$

Тогда

$$A_1(i) = A^2(i) \sigma^{-2}(i+1) = e^{2\beta i},$$

$$J(h) = \psi^2(N) \bigl(1 + G(h)\bigr)^{-1} = e^{2\alpha N} \left(1 + e^{2\beta h} \sum_{i=0}^{N-h-1} e^{2(\beta-\alpha)i}\right)^{-1} =$$

$$= e^{2\alpha N}\left(1 + e^{2\beta h}\frac{e^{2(N-h)(\beta-\alpha)} - 1}{e^{2(\beta-\alpha)} - 1}\right)^{-1}.$$

Неравенство (23) принимает вид

$$e^{2(N-h)(\beta-\alpha)}\big(1 - e^{2\alpha}\big) < 1 - e^{2\beta}.$$

Решая это неравенство относительно h, получим

$$0 \le h < h_0, \quad \text{где} \quad h_0 = N - \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\ln\frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Таким образом, на интервале $[0, h_0)$ функционал $J(h)$ как функция от h убывает.

Пример 2. Рассмотрим задачу фильтрации (21), (22) при

$$\psi(i) = \sqrt{1 - \alpha\frac{i}{N-1}},$$

$$A(i) = \sqrt{i}, \quad \sigma^2(i) = \sigma_0^2 = 1, \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}, \quad A_1(i) = i.$$

При помощи неравенства (23) найдем интервал, в котором функционал

$$J(h) = \left(1 - \frac{\alpha N}{N-1}\right)\left(1 + \sum_{i=0}^{N-h-1}\left(1 - \frac{\alpha i}{N-1}\right)(i+h)\right)^{-1}$$

убывает по h.

Неравенство (23) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\alpha h^2 + h\big(\alpha + 2(N-1)\big) - \alpha N(N-1) < 0.$$

Следовательно, при

$$0 \le h < h_0, \text{ где } h_0 = \frac{1}{2\alpha}\left(-\alpha - 2(N-1) + \sqrt{\big(\alpha + 2(N-1)\big)^2 + 4\alpha^2 N(N-1)}\right)$$

функционал $J(h)$ убывает как функция от h.

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. *Kolmanovskii V. B.,Shaikhet L.E.* Control of Systems with Aftereffect: Translations of mathematical monographs. – Providence (RI): American Mathematical Society, 1996. – Vol. 157. – 336 p.

N. V. Bradul

The optimal filtering problem.

In this paper we consider the problem of constructing an optimal mean-square estimation of a Gaussian partially observable random process observed with delay. It is shown that the solution of filtration problem can be reduced to the solution of the difference equation of the type of Wiener-Hopf, called the fundamental equation of filtration. Special cases of the fundamental equation of filtration, in which his solution can be obtained explicitly are considered. The dependence of the error of estimation of the time lag in the observations is investigated.

Keywords: *optimal estimate, filtering problem, estimation error.*

Н. В. Брадул

Задача оптимальної фільтрації.

У статті розглянуто задачу побудови оптимальної в середньоквадратичному розумінні оцінки гауссівського частково спостережуваного випадкового процесу за спостереженнями, що містять запізнення. Показано, що розв'язок задачі фільтрації можна звести до розв'язку різницевого рівняння типу Вінера-Хопфа, якій називається основним рівнянням фільтрації. Розглянуто окремі випадки основного рівняння фільтрації, в яких його розв'язок можна отримати в явному вигляді. Досліджено залежність помилки оцінювання від величини запізнення в спостереженнях.

Ключові слова: *оптимальна оцінка, задача фільтрації, помилка оцінювання.*

Донецкий государственный ун-т управления
`bradnv@ukr.net`

Получено 29.10.12