УДК 539.3

©2012. **Н. С. Хапилова, В. В. Залётов, С. В. Залётов**

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Получено аналитическое решение смешанной задачи о симметричной деформации изотропного полупространства, на границе которого приложена нагрузка, распределенная по круговой области V, вне V – нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения на всей граничной плоскости отсутствуют. Приведены формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в упругом полупространстве и на его границе. Частными случаями рассматриваемой задачи являются задача Буссинеска, задача о действии сосредоточенной силы на полупространство с упруго закрепленной границей, а также первая основная задача теории упругости, когда коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений на границе обращается в нуль, а распределенная по круговой области нагрузка не зависит от угловой координаты.

Ключевые слова: *теория упругости, осесимметричная смешанная задача, изотропное полупространство, аналитическое решение.*

1. Введение. Осесимметричная задача для упругого полупространства, к границе которого приложена равномерно распределенная по круговой области нагрузка, исследовалась С.П. Тимошенко, Дж. Гудьером. В монографии [1] приведены аналитические формулы для напряжений и перемещений на границе изотропного полупространства. Другой способ решения задачи о симметричной деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной границей вне области приложения нормальной нагрузки предложен в работе [2], в которой на основе аналитического решения трехмерной задачи [3] построены формулы для случая осевой симметрии путём преобразования компонент тензора напряжений при переходе от прямоугольной к цилиндрической системе координат. В данной работе получено точное решение краевой осесимметричной задачи для полупространства с упруго закрепленной границей, приведены аналитические формулы, которые позволяют рассчитать напряжения и перемещения в произвольных точках на границе и внутри изотропного тела.

2. Постановка задачи. Рассматривается смешанная задача теории упругости о деформации изотропного полупространства, на границе которого действует распределенная по круговой области нагрузка, удовлетворяющая условиям осевой симметрии; вне области приложения нагрузки нормальные напряжения и перемещения пропорциональны; касательные напряжения на всей плоскости, ограничивающей полупространство, отсутствуют; напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

Совместим начало цилиндрической системы координат r, Θ, z с центром круговой области приложения нагрузки (рис. 1). Ось z направим вертикально вверх.

В случае осесимметричной деформации система уравнений теории упругости для

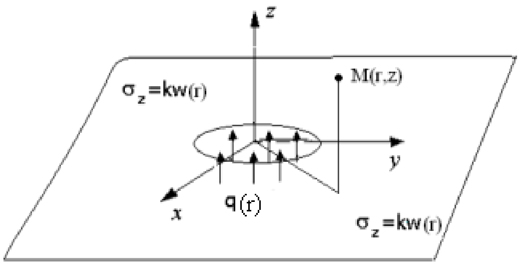

Рис. 1. Изотропное полупространство $z \geq 0$ с упруго закрепленной границей

изотропного тела [1] сводится к уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\Phi(r,z) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi(r,z)$ – функция напряжения Лява, оператор ∇^2 имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r,z), \sigma_\theta(r,z), \sigma_z(r,z), \tau_{rz}(r,z)$ и вектора перемещений $u(r,z), w(r,z)$ через функцию $\Phi(r,z)$ выражаются следующими формулами:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}(\nu\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}), \tag{2}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{\partial}{\partial z}(\nu\nabla^2\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}), \tag{3}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}((2-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}), \tag{4}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}((1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}), \tag{5}$$

$$u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}, \tag{6}$$

$$w = \frac{1}{2G_1}(2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}), \tag{7}$$

где модуль сдвига $G_1 = E/2(1+\nu)$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Граничные условия для верхнего упругого полупространства $z \geq 0$ запишем в виде

$$\sigma_z(r,0) = -q(r), \quad r < a; \tag{8}$$

$$\sigma_z(r,0) = kw(r,0), \quad r > a; \tag{9}$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0, \quad r < \infty, \tag{10}$$

где $q(r)$ – интенсивность нагрузки, распределенной по кругу радиуса a, k – постоянный коэффициент.

Таким образом, решение задачи сводится к определению функции $\Phi(r, z)$, для которой в плоскости $z = 0$ выполняются граничные условия (8)-(10) при подстановке в них компонент тензора напряжений и перемещения w в соответствии с формулами (4), (5), (7).

3. Аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости. Будем искать решение дифференциального уравнения (1) с помощью интегрального преобразования Ханкеля. Обозначим через Q трансформанту функции $\Phi(r, z)$

$$Q(z,t) = \int_0^\infty \Phi(r,z) r J_0(rt) dr, \tag{11}$$

здесь $J_0(rt)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Согласно формуле обращения функция $\Phi(r, z)$ записывается в виде

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty Q(z,t) t J_0(rt) dt. \tag{12}$$

Умножим левую часть уравнения (1) на $rJ_0(rt)$ и проинтегрируем по r от нуля до бесконечности, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4Q}{dz^4} - 2t^2 \frac{d^2Q}{dz^2} + t^4 Q = 0. \tag{13}$$

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (13) имеет вид

$$Q(z,t) = (A + Bz)e^{-tz}. \tag{14}$$

С учетом соотношений (14), (12), вычислим касательное напряжение, определяемое формулой (5), и, приравняв его нулю на границе полупространства, найдем связь между коэффициентами A и B:

$$B = \frac{1}{2\nu} At. \tag{15}$$

Введем функцию

$$\beta(r) = \{^{q(r)+kw(r,0), r<a}_{0, r>a}, \tag{16}$$

с помощью которой граничные условия (8), (9) запишем следующим образом:

$$\sigma_z(r,0) = -\beta(r) + kw(r,0), r < \infty. \tag{17}$$

Применим к равенству (17) интегральное преобразование Ханкеля, получим

$$\overline{\sigma}_z = -\overline{\beta} + k\overline{w}. \tag{18}$$

В формуле (18) черта над величиной обозначает трансформанту соответствующей функции. Принимая во внимание формулы (4), (7), (12), вычислим трансформанты функций $\overline{\sigma}_z, \overline{w}$ и подставим их в равенство (18). В результате получим соотношение, из которого найдем

$$A = -\frac{2\nu\overline{\beta}}{t^2(t+\chi)}, \tag{19}$$

где

$$\chi = \frac{2k(1-\nu^2)}{E}. \tag{20}$$

Таким образом, функция Q записывается в виде

$$Q = -\frac{\overline{\beta}(2\nu + tz)}{t^2(t+\chi)}e^{-tz}. \tag{21}$$

Из равенств (12), (21) находим функцию напряжений

$$\Phi(r,z) = -\int_0^\infty \frac{\overline{\beta}(2\nu + tz)}{t(t+\chi)}e^{-tz}J_0(rt)dt. \tag{22}$$

Подставив $\Phi(r,z)$ в формулы (2)-(7), определим компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в изотропном полупространстве

$$u(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{23}$$

$$w(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(2\nu-2-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{24}$$

$$\sigma_z(r,z) = -\int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^2(1+zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi}, \tag{25}$$

$$\sigma_r(r,z) = \int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^2(1-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} -$$

$$-\frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{26}$$

$$\sigma_\Theta(r,z) = 2\nu\int_0^\infty \overline{\beta(t)}e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} +$$

$$+\frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{27}$$

$$\tau_{rz}(r,z) = -z\int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^3e^{-tz}J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi}. \tag{28}$$

Устремив в формулах (23)-(28) координату z к нулю, вычислим перемещения и напряжения на границе полупространства

$$u(r,0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{29}$$

$$w(r,0)=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{30}$$

$$\sigma_z(r,0)=-\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}, \tag{31}$$

$$\sigma_r(r,0)=\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}-\frac{1-2\nu}{r}\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{32}$$

$$\sigma_\Theta(r,0)=2\nu\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}+\frac{1-2\nu}{r}\int_0^\infty\overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{33}$$

$$\tau_{rz}(r,z)=0. \tag{34}$$

Как следует из равенства (34), касательные напряжения на границе обращаются в нуль. Преобразовав соотношение (31) к виду

$$\sigma_z(r,0)=-\int_0^\infty\overline{\beta}J_0(rt)\frac{t(t+\chi-\chi)dt}{t+\chi}= \tag{35}$$

$$=-\int_0^\infty\overline{\beta}tJ_0(rt)dt+\chi\int_0^\infty\overline{\beta}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}=-\beta(r)+kw(r,0),$$

убеждаемся, что граничные условия для напряжения σ_z тождественно удовлетворяются.

Если при заданной конкретной нагрузке $q(r)$ вычисление трансформанты $\overline{\beta}(t)$ затруднительно, то в построенном решении (23)-(34) можно вернуться от трансформанты к оригиналу функции $\beta(r)$, применив формулу обращения. В частности, для вертикального перемещения на границе полупространства из соотношения (30) найдем

$$w(r,0)=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\int_0^\infty[\int_0^\infty\beta(\xi)\xi J_0(\xi t)d\xi]J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}=$$

$$=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\int_0^a\beta(\xi)g_{1w}(\xi,r)d\xi, \tag{36}$$

$$g_{1w}(\xi,r)=\xi\int_0^\infty J_0(\xi t)J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}. \tag{37}$$

Для определения функции $\beta(r)$ в круге $r<a$ используем равенство (16). Из него с учетом формул (36), (37), (20) получим интегральное уравнение

$$\beta(r)=q(r)+\int_0^a\beta(\xi)g_w(\xi,r)d\xi,\quad r<a, \tag{38}$$

ядро которого определяется соотношением

$$g_w(\xi,r)=\chi g_{1w}(\xi,r). \tag{39}$$

Итак, решение осесимметричной задачи (8)-(10) определяется формулами (23)-(34), причем функция $\beta(r)$ находится из интегрального уравнения (38). При $k=0$

параметр χ обращается в нуль, а задача (8)-(10) трансформируется в первую основную задачу, решение которой впервые было получено Тередзавой. Приведенное в монографии [4] решение Тередзавы следует из формул (25)-(28), если в них параметр χ приравнять нулю. Если $\chi \neq 0$, а на упруго закрепленной границе действует сосредоточенная сила P, то устремив радиус круга a к нулю, найдем, что функция $\overline{\beta}(t)$ равна $P/2\pi$, а полученные результаты (25)-(36) совпадают с формулами, опубликованными в работах [5-7].

4. Решение интегрального уравнения в случае нагрузки, равномерно распределенной по круговой области. Численная реализация решения смешанной задачи (8)-(10) при известном законе распределения нагрузки $q(r)$ в заданной круговой области начинается с решения интегрального уравнения (38). Оно представляет собой неоднородное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно [8], имеет единственное решение, если коэффициент, стоящий перед интегральным оператором, не является собственным значением ядра.

Решение интегрального уравнения может быть представлено в виде бесконечного ряда Неймана [8]

$$\beta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n q(r), r \in V_1.$$

Здесь K – интегральный оператор уравнения (38). Можно показать, что при условии конечности области приложения нагрузки норма оператора меньше единицы, ряд Неймана сходится и является единственным решением интегрального уравнения [9].

Численно решение уравнения (38) осуществляется методом последовательных приближений с помощью равенств

$$\beta^{[0]}(r) = q(r), \beta^{[j+1]}(r) = q(r) + \int_0^a g_w(r,\xi)\beta^{[j]}(\xi)d\xi, \xi \geq 0. \tag{40}$$

Исследуем задачу в случае, когда к границе полупространства приложена распределенная по круговой области нагрузка постоянной интенсивности q_0. Преобразуем интегральное уравнение (38), разделив левую и правую части на q_0 и введя неизвестную безразмерную функцию $\widetilde{\beta}(r) = \beta(r)/q_0$, получим

$$\widetilde{\beta}(r) = 1 + \int_0^a \widetilde{\beta}(\xi) g_w(r,\xi)d\xi. \tag{41}$$

В равенствах (40) также перейдем к безразмерной функции $\widetilde{\beta}(r)$, разделив правые и левые части на q_0.

При вычислении интеграла в правой части уравнения (41) область интегрирования $r \in [0,a]$ разбивается на элементарные отрезки длиной h. При численном решении уравнения (41) методом последовательных приближений в соотношениях (40) положим $\beta^{[0]} = 1$, заменим интеграл суммой произведений значений подынтегральной функции на величину элементарного отрезка h и найдем значение $\widetilde{\beta}^{[1]}$ в первом приближении. При реализации метода последовательных приближений на ПК расчет значения функции $\widetilde{\beta}$ в точке (r,0) продолжается до момента выполнения условия $(\widetilde{\beta}^{[N]} - \widetilde{\beta}^{[N-1]})/\widetilde{\beta}^{[N]} \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления.

Таблица. Решение интегрального уравнения при $\chi = 0.2$

r/a	$\beta^{[1]}$	$\beta^{[2]}$	$\beta^{[3]}$	$\beta^{[4]}$
0.1	1.152372557	1.173434865	1.176242749	1.176612134
0.2	1.152190827	1.173168979	1.175961794	1.176328994
0.3	1.150497113	1.171129351	1.173869579	1.174229522
0.4	1.147895626	1.168002513	1.170663543	1.171012603
0.5	1.144303284	1.163700313	1.166255578	1.166590183
0.6	1.139588403	1.158082021	1.160504769	1.160821390
0.7	1.133540487	1.150922573	1.153185499	1.153480610
0.8	1.125801740	1.141839479	1.143913865	1.144183851
0.9	1.115675264	1.130087646	1.131940976	1.132181815
1	1.101270535	1.113644499	1.115230753	1.115436759

Изложенный метод решения интегрального уравнения позволяет найти значение функции $\beta(r)$ в произвольной точке области $0 < r < a$. В таблице приведены численные значения безразмерной функции $\widetilde{\beta}$ до четвертого приближения включительно. Из таблицы видно, что при $\chi = 0.2$ итерационный процесс быстро сходится: разница между численными значениями функции β в третьем и четвертом приближениях меньше 0.0004. Численное исследованые при $\chi = 1; 1.8$ показывают, что с ростом χ сходимость замедляется и для достижения такой же точности требуется большее количество итераций.

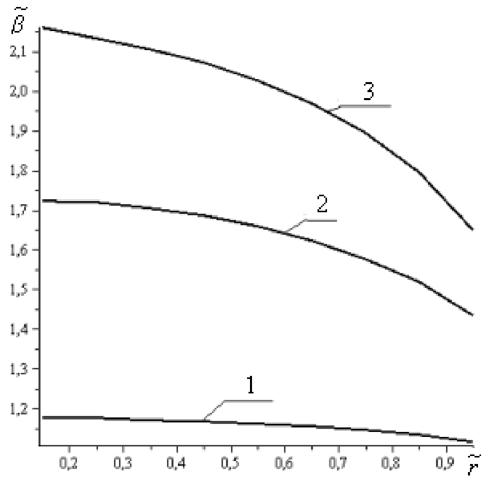

Рис. 2. Зависимость функции $\widetilde{\beta}(r)$ от радиальной координаты
$1 - \chi = 0.2$; $2 - \chi = 1$; $3 - \chi = 1.8$

На рис. 2 построена зависимость $\widetilde{\beta}$ от безразмерной радиальной координаты

$\widetilde{r} = r/a$ для значений параметра χ, равных 0,2; 1; 1,8 $м^{-1}$. Из рисунка видно, что с ростом параметра χ значения функции $\widetilde{\beta}(r)$ увеличиваются. Плавное изменение функции $\widetilde{\beta}(r)$ показывает, что при численных исследованиях функция β в окрестности $[r_k, r_{k+1}]$ произвольной точки области $r < 1$ может быть аппроксимирована линейным отрезком, проходящим через точки $r_k, \widetilde{\beta}(r_k)$ и $r_{k+1}, \widetilde{\beta}(r_{k+1})$, где r_k, r_{k+1} – соседние узлы выбранной координаты r, в которых предварительно рассчитываются изложенным выше методом значения $\widetilde{\beta}(r_k), \widetilde{\beta}(r_{k+1})$.

На практике решение задачи (3) может быть использованно для расчета пространственного напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке пластовых месторождений полезных ископаемых, а также при оценке прочности деталей с тонкими перфорированными прослойками.

1. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. *Залётов В.В., Сторожев В.И., Хапилова Н.С.* Решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства в цилиндрической системе координат // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XII Международной конференции. – Ростов-на-Дону, Россия: ЮФУ, 2008. – Т. 1. – С. 81-85.
3. *Залётов В.В.* Аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства // Труды ИПММ НАН Украины. – Т. 14. – 2007. – С. 74-82
4. *Новацкий В.И.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. *Залетов В.В.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – Т. 9. – С. 61-67.
6. *Залетов В.В., Хапилова Н.С.* Закономерности распределения перемещений в изотропном полупространстве, лежащем на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 65-73.
7. *Хапилова Н.С., Залетов В.В.* Симметричная деформация упругого полупространства при смешанных граничных условиях // Математические проблемы механики неоднородных структур. VIII Международная научная конференция, 14-17 сентября 2010г. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача, 2010. – С. 96-97.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

N. S. Khapilova, V. V. Zaletov, S. V. Zaletov

Axisymmetric deformation of an isotropic half-space at elastic fixing of boundary outside domain of application normal load.

It was obtained analytic solution mixed problem about axisymmetric deformation of an isotropic half-space, on boundary wich the load is distributed in a circular domain V, outside V – the normal stresses and displacements are proportional, the shear stresses on the boundary plane are absent. Presented formulas for the components of the stresses tensor and displacements vector in an elastic half-space and on its boundary. Particular cases of task are Boussinesqs problem, problem of a concentrated force to elastic half-space with a fixed boundary and the first primary problem of the theory of elasticity, when the coefficient proportionality of stresses and displacements at the border is zero, and distributed in a circular area of the load does not depend on the angular coordinate.

Keywords: *theory of elasticity, axisymmetric mixed problem, isotropic half-space, analytical solution.*

Н. С. Хапілова, В. В. Зальотов, С. В. Зальотов

Осесиметрична задача про дію розподіленого навантаження на ізотропний півпростір з пружно закріпленою границею.

Отримано аналітичний розв'язок змішаної задачі щодо симетричної деформації ізотропного півпростору, до границі якого докладено навантаження, розподілене по круговій області V, поза V – нормальні напруження і переміщення пропорційні, дотичні напруження на всій граничній площині відсутні. Наведено формули для компонент тензора напружень і вектора переміщень у пружному півпросторі і на його границі. Окремими випадками розглянутої задачі є задача Буссінеска, задача про дію зосередженої сили на півпростір з пружно закріпленою границей, а також перша основна задача теорії пружності, коли коефіцієнт пропорційності напружень і переміщень на границі перетворюється в нуль, а розподілене по круговій області навантаження не залежить від кутової координати.

Ключові слова: *теорія пружності, осесиметрична змішана задача, ізотропний півпростір, аналітичний розв'язок.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
khapilova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.11.12