УДК 531.38

 С. Н. Судаков

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ СО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

В задачу о колебаниях гравитирующих эллипсоидальных масс однородной несжимаемой жидкости введена вязкость, равная нулю на границе и монотонно возрастающая к центру эллипсоидальной массы до своего максимального значения. Функция координат, определяющая вязкость, выбрана так, что движение эллипсоидальной массы жидкости может быть потенциальным или однородным вихревым. Исследованы колебания с потенциалом скорости осесимметричной эллипсоидальной массы жидкости.

Ключевые слова: *эллипсоид, жидкость, вязкость, вихрь, гравитация.*

Введение. Задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов впервые была поставлена и решена Ньютоном (1686) [15, с. 531-537], в связи с проблемой исследования формы Земли. В дальнейшем ее исследованием занимались: Стирлинг (1735), Маклорен (1742), Симпсон (1743), Даламбер (1773), Лаплас (1778), Якоби (1834), Майер (1842), Лиувиль (1846), Дирихле (1875) [8, 9], Дедекинд [7], Бриоши [6], Риман [20], Пуанкаре (1885) [19], Картан, Ляпунов [13], Рош (1850), Падова [16], Стеклов [23-28], Тедоне [33], Фассо и Льюис [34], Дарвин (1906), Джинс (1916), Чандрасекхар (1969) [35] и многие другие ученые. Подробное изложение результатов их исследований имеется в монографии П. Аппеля [1], статье Л.Н. Сретенского [22], монографии Л. Лихтенштейна [11], курсах Г. Ламба [10] и М.Ф. Субботина [29], монографиях С. Чандрасекхара [35] и В.С. Ярдетского [36].

Сначала исследовались случаи вращения сплюснутых осесимметричных эллипсоидов, вращающихся с постоянной скоростью вокруг оси симметрии (эллипсоиды Маклорена). Якоби обнаружил, что жидкие фигуры равновесия могут быть и трехосными эллипсоидами, вращающимися с постоянной скоростью вокруг меньшей главной оси (эллипсоиды Якоби). В этих случаях жидкость вращается без деформаций, как твердое тело, что позволяет не делать никаких предположений о вязкости. Устойчивость этих фигур исследовал А.М. Ляпунов [13].

Дирихле рассмотрел случай пульсирующих вращающихся эллипсоидов, предполагая жидкость идеальной (эллипсоиды Дирихле). Риман [20] также рассмотрел случай, в котором эллипсоидальная масса жидкости деформируется, а жидкость предполагается идеальной (эллипсоиды Римана). Во всех этих исследованиях движение жидкости было однородным вихревым.

Трудной проблемой небесной механики является исследование движения нескольких гравитирующих жидких масс. В работах Е.В. Петкевича [17, 18] поставлена задача о движении двух гравитирующих масс жидкости. Важным частным случаем ее является задача о движении двух эллипсоидальных масс идеальной гравитирующей жидкости, каждая из которых имеет однородную завихренность. Естественно, что учет вязкости в этих задачах существенно изменит характер движения.

В конце XIX – начале XX веков однородные вихревые движения идеальной жидкости были использованы для исследования движений жидкого ядра Земли, с целью дать адекватное описание движения ее полюсов (Гринхил, Жуковский, Кельвин, Пуанкаре, Стеклов и другие). Результаты этих исследований и подробная библиография имеются в монографии Г. Морица и А. Мюллера [14].

Исследование этих вопросов продолжается и в настоящее время. В статье В.А. Бизяева и Т.Б. Ивановой [3] исследовано равновесие жидкого эллипсоида со стратифицированной плотностью. В работе А.В. Борисова, И.С. Мамаева и А.А. Килина [4] дано современное изложение теории жидких гравитирующих эллипсоидов.

Согласно современным экспериментальным исследованиям, изложенным в работе В.В. Бражкина [5], при высоких давлениях наблюдается сильный рост вязкости расплава железа. В этой же работе указано, что ядро Земли имеет своей основой расплав железа. Следовательно, должен существовать сильный рост вязкости жидкого ядра Земли в направлении к ее центру. Если предположить, что такой же рост вязкости существует у гравитирующих эллипсоидальных жидких небесных тел, то возникает необходимость построения математических моделей, учитывающих этот эффект. С этой целью в работе автора [32] рассмотрена задача о движении эллипсоидальной гравитирующей массы жидкости, вязкость которой прямо пропорциональна давлению и обращается в нуль на границе эллипсоида.

В работе [31] та же задача решена в предположении, что вязкость жидкости задается как функция координат и длин полуосей эллипсоида. Функция, задающая вязкость, выбиралась так, чтобы:

1) вязкость обращалась в нуль на границе жидкости;

2) вязкость оставалась постоянной на каждом эллипсоиде из семейства подобных границе и расположенных концентрически по отношению к ней;

3) вязкость монотонно возрастает в направлении к центру эллипсоида.

При выполнении этих условий, функцию, задающую вязкость, удалось подобрать так, чтобы движение эллипсоидальной массы жидкости было однородным вихревым. При однородном вихревом движении жидкости ее частицы движутся по эллипсоидам, упомянутым в условии 2). Поэтому вязкость каждай частицы жидкости при таком движении не изменяется.

Ниже, следуя подходу, изложенному в работе [31], исследуются колебания с потенциалом скорости эллипсоидальной массы жидкости, имеющей стратифицированную вязкость.

Колебания с потенциалом скорости жидких гравитирующих эллипсоидов, имеющих стратифицированную вязкость. Пусть имеется эллипсоид, который в неподвижной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 – непрерывные достаточно гладкие функции времени t, удовлетворяющие условию

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = const. \tag{2}$$

Пространство внутри эллипсоида целиком заполнено гравитирующей несжимаемой жидкостью, кинематическая вязкость ν которой задана формулой

$$\nu = \nu_0 (1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2), \tag{3}$$

где ν_0 – константа. Течение жидкости внутри эллипсоида описывается уравнениями [12, с. 741-746]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})\Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - \ \nabla \Phi, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость жидкости, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$; σ – тензор скоростей деформаций с компонентами

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{6}$$

Φ – потенциал гравитационных сил, определяемый формулами [10, с. 884-885]:

$$\Phi = \pi \rho \gamma (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0), \tag{7}$$

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int\limits_0^\infty \frac{d\,\lambda}{D},$$

$$D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}},$$

γ – гравитационная постоянная.

Учитывая, что вязкость жидкости (3) обращается в нуль на границе (1), в качестве граничных условий для уравнений (4), (5) следует взять условия непротекания через границу (1):

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \,|_S = 0, \tag{8}$$

где S – граница жидкости (1), $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к границе S, $\mathbf{u}$ – скорость точек границы жидкости.

Замечание. Уравнения (4), (5) с граничным условием (8) имеют два типа решений. Решения первого типа описывают течения, в которых у частиц жидкости в процессе движения от одной точки пространства к другой происходит изменение вязкости без каких-либо физических причин. Решения второго типа описывают течения, в которых частицы жидкости не меняют вязкости, так как движутся по поверхностям, на которых вязкость остается постоянной. Именно такими являются все рассматриваемые в работе движения с потенциалом скорости.

Решение уравнений (4), (5) с граничным условием (8) будем искать в виде течения с потенциалом скоростей [10, с. 907]

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{c}_1}{c_1}x_1^2 + \frac{\dot{c}_2}{c_2}x_2^2 + \frac{\dot{c}_3}{c_3}x_3^2\right).$$

Тогда компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ будут иметь вид

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1}x_1, \quad v_2 = \frac{\dot{c}_2}{c_2}x_2, \quad v_3 = \frac{\dot{c}_3}{c_3}x_3. \tag{9}$$

Благодаря соотношению (2) равенства (9) удовлетворяют уравнению (5). Подставляя (9) в уравнения (4), получаем следующие выражения для компонентов ∇p:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = p_i x_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$p_i = -(\dot{c}_i c_i^{-1})^{\cdot} - (\dot{c}_i c_i^{-1})^2 - 4\nu_0 \dot{c}_i c_i^{-3} - 2\pi\rho\gamma\alpha_i. \tag{11}$$

Общее решение уравнений (10) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}p = \frac{1}{2}(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2) + p_0(t), \tag{12}$$

где $p_0(t)$ – произвольная функция времени.

Из выражения (12) следует, что в каждый момент времени t поверхности равного давления p представляют собой семейство подобных соосных эллипсоидов. Условия, при которых эллипсоиды равного давления подобны и соосны с границей жидкости (1), имеют вид

$$p_1 c_1^2 = p_3 c_3^2, \quad p_2 c_2^2 = p_3 c_3^2. \tag{13}$$

Используя (11) и выражая c_3 через c_1 и c_2, перепишем условия (13) в виде

$$\begin{gathered}
\ddot{c}_1(c_1 + R^6 c_1^{-3} c_2^{-2}) + \ddot{c}_2 R^6 c_1^{-2} c_2^{-3} = 2R^6 c_1^{-2} c_2^{-2}(\dot{c}_1^2 c_1^{-2} + \dot{c}_2^2 c_2^{-2} + \dot{c}_1 \dot{c}_2 c_1^{-1} c_2^{-1}) - \\
-4\nu_0(2\dot{c}_1 c_1^{-1} + \dot{c}_2 c_2^{-1}) - 2\pi\rho\gamma(\alpha_1 c_1^2 - \alpha_3 R^6 c_1^{-2} c_2^{-2}), \\
\ddot{c}_1 R^6 c_1^{-3} c_2^{-2} + \ddot{c}_2(c_2 + R^6 c_1^{-2} c_2^{-3}) = 2R^6 c_1^{-2} c_2^{-2}(\dot{c}_1^2 c_1^{-2} + \dot{c}_2^2 c_2^{-2} + \dot{c}_1 \dot{c}_2 c_1^{-1} c_2^{-1}) - \\
-4\nu_0(\dot{c}_1 c_1^{-1} + 2\dot{c}_2 c_2^{-1}) - 2\pi\rho\gamma(\alpha_2 c_2^2 - \alpha_3 R^6 c_1^{-2} c_2^{-2}).
\end{gathered} \tag{14}$$

Уравнения (14) описывают свободные затухающие колебания эллипсоидальной массы жидкости. Эти уравнения имеют стационарное решение

$$c_1 = c_2 = R, \tag{15}$$

которому соответствует равновесное состояние сферической массы жидкости.

В осесимметричном случае $c_1 = c_2$ и уравнения (14) сводятся к одному уравнению

$$\ddot{c}_1(c_1 + 2R^6 c_1^{-5}) = 6R^6 \dot{c}_1^2 c_1^{-6} - 12\nu_0 \dot{c}_1 c_1^{-1} - 2\pi\rho\gamma(\alpha_1 c_1^2 - \alpha_3 R^6 c_1^{-4}). \tag{16}$$

Выражения для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в осесимметричном случае тоже упрощаются и принимают вид

$$\alpha_1 = \alpha_2 = R^3 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2+\lambda)^2\sqrt{R^6 c_1^{-4}+\lambda}}, \quad \alpha_3 = R^3 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2+\lambda)(R^6 c_1^{-4}+\lambda)^{3/2}}. \tag{17}$$

Вводя вместо c_1 безразмерную переменную $\zeta = c_1/R$, представим уравнение (16) так:

$$\ddot{\zeta}(1+2\zeta^{-6}) = 6\dot{\zeta}^2\zeta^{-7} - 12\nu_0 R^{-2}\dot{\zeta}\zeta^{-3} - 2\pi\rho\gamma(\alpha_1^*\zeta - \alpha_3^*\zeta^{-5}), \tag{18}$$

где

$$\alpha_1^* = \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(\zeta^2+\lambda)^2\sqrt{\zeta^{-4}+\lambda}}, \quad \alpha_3^* = \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(\zeta^2+\lambda)(\zeta^{-4}+\lambda)^{3/2}}. \tag{19}$$

Стационарное решение уравнения (18), описывающее равновесное состояние сферической массы жидкости, имеет вид

$$\zeta = 1. \tag{20}$$

Исследуем малые осесимметричные колебания эллипсоидальной массы жидкости в окрестности стационарного решения (20). Вводя новую переменную $\zeta' = \zeta - 1$ и линеризуя по ней уравнение (18), получаем

$$\ddot{\zeta}' = -4\nu_0 R^{-2}\dot{\zeta}' - \frac{16}{15}\pi\rho\gamma\zeta'.$$

Запишем это уравнение в виде системы:

$$\dot{\zeta}' = \eta, \qquad \dot{\eta} = -\frac{16}{15}\pi\rho\gamma\zeta' - 4\frac{\nu_0}{R^2}\eta.$$

Решение этой системы ищем в форме

$$(\zeta', \eta)^T = (a_1, a_2)^T e^{\lambda t},$$

где a_1, a_2, λ – неизвестные константы. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{16}{15}\pi\rho\gamma & -4\frac{\nu_0}{R^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение для λ

$$\lambda^2 + 4\frac{\nu_0}{R^2}\lambda + \frac{16}{15}\pi\rho\gamma = 0,$$

решения которого следующие:

$$\lambda_{1,2} = 2\left(-\frac{\nu_0}{R^2} \pm \sqrt{\frac{\nu_0^2}{R^4} - \frac{4}{15}\pi\rho\gamma}\right).$$

В зависимости от величины ν_0 могут представиться три случая:

а) при $\nu_0 = 0$ корни характеристического уравнения чисто мнимые. В этом случае эллипсоид совершает незатухающие колебания, сжимаясь и растягиваясь вдоль оси Ox_3;

б) при $0 < \nu_0^2 < \frac{4}{15}\pi\rho\gamma R^4$ характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня с отрицательными действительными частями. В этом случае эллипсоид совершает затухающие колебания, приближаясь к равновесной сферической форме. Период колебаний увеличивается с ростом величины ν_0;

в) при $\nu_0^2 \geq \frac{4}{15}\pi\rho\gamma R^4$ оба корня характеристического уравнения отрицательны. В этом случае эллипсоид монотонно приближается к сферической форме.

1. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. – М.: ОНТИ, 1936. – 376 с.
2. *Бетти Э.* О движениях, сохраняющих эллипсоидальную форму неоднородной жидкой массы // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – Москва-Ижевск. – 2010. – С. 134-149.
3. *Бизяев И.А., Иванова Т.Б.* Фигуры равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс // Вестник Удмуртского университета. – 2012. – Вып. 3. – С. 142-153.
4. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – Москва-Ижевск. – 2010. – С. 304-363.
5. *Бражкин В.В.* Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений: стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли // Усп. физических наук. – 2000. – **170**, № 5. – С. 535-551.
6. *Бриоши Ф.* К параграфу 3 работы Дирихле "Исследование одной задачи гидродинамики" опубликованной в т. 58 данного журнала, с. 181 и далее // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – Москва-Ижевск. – 2010. – С. 108-121.
7. *Дедекинд Р.* Дополнение к предшествующей статье // Там же. – С. 59-73.
8. *Дирихле Л.* Исследование одной задачи гидродинамики // Там же. – С. 16-18.
9. *Дирихле Л.* Исследование одной задачи гидродинамики // Там же. – С. 19-58.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
11. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. – М.: Наука, 1965. – 252 с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
13. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Собрание сочинений. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – С. 5-113.
14. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. – К.: Наукова думка, 1992. – 512 с.
15. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
16. *Падова Э.* О движении жидкого однородного эллипсоида // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – Москва-Ижевск. – 2010. – С. 122-133.
17. *Петкевич Е.В.* Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – **3**. – № 9. – С. 424-428.
18. *Петкевич Е.В.* Уравнения внешней задачи двух тел // Там же. – 1977. – **3**. – № 11. – С. 522-525.
19. *Пуанкаре А.* О прецессии деформируемых тел // Последние работы Пуанкаре. – Москва-Ижевск. – 2001. – С. 74-111.
20. *Риман Б.* О движении жидкого однородного эллипсоида // Сочинения. – М.-Л.: ОГИЗ, 2001. – С. 339-366.
21. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды.– М.: Наука. – 1973. – Т. 1. – 536 с.
22. *Сретенский Л.Н.* Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы // Успехи мат. наук. – 1938. – Вып. 5. – С. 187-230.
23. *Стеклов В.А.* К задаче о движении жидкого однородного эллипсоида, все частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона (1905г.) // Стеклов В.А. Работы по механике (1902-1909г.г.). – Москва-Ижевск. – 2011. – С. 153-155.

24. *Стеклов В.А.* О нестационарном движении жидкого эллипсоида вращения, который не изменяет конфигурации во время движения (1905) // Там же. – С. 157-159.
25. *Стеклов В.А.* О нестационарном движении жидкого эллипсоида вращения, который не изменяет конфигурации во время движения (1906) // Там же. – С. 161-163.
26. *Стеклов В.А.* Задача о движении несжимаемой жидкой массы, имеющей форму эллипсоида, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона (1908) // Там же. – С. 165-222.
27. *Стеклов В.А.* Задача о движении несжимаемой жидкой массы, имеющей форму эллипсоида, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона (продолжение) (1909) // Там же. – С. 223-282.
28. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела, имеющего полость эллипсоидальной формы, заполненную несжимаемой жидкостью, и об изменении широт // Там же. – С. 283-408.
29. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
30. *Судаков С.Н.* Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 67-71.
31. *Судаков С.Н.* О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217-226.
32. *Судаков С.Н.* Движение гравитирующих эллипсоидальных масс жидкости переменной вязкости // Український математичний вісник. – 2008. – Т. 5. – № 4. – С. 563-573.
33. *Тедоне О.* Движение жидкого эллипсоида при выполнении гипотезы Дирихле // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – Москва-Ижевск. – 2010. – С. 150-236.
34. *Фассо Ф., Льюис Д.* Свойства устойчивости эллипсоидов Римана // Там же. – С. 255-297.
35. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.
36. *Ярдетский В.С.* Теории фигур небесных тел. – Москва-Ижевск: 2012. – 300 с.

S. N. Sudakov

The irrotational motion of ellipsoidal mass of liquid with stratified viscosity.

The stratified viscosity was take into account at the problem of motion of ellipsoidal mass of liquid. The stratified viscosity vanish at the boundary liquid and is growing to the center of mass of one. The function of coordinates that defines the stratified viscosity was chosen so that the motion of liquid was homogeneous rotational. The small oscillations with potential of velocity was investigated into the case of axially symmetric ellipsoid.

Keywords: *ellipsoid, liquid, viscosity, rotation, gravitation.*

С. М. Судаков

Безвихровий рух еліпсоїдальної маси рідини зі стратифікованою в'язкістю.

У задачу про коливання гравітуючих еліпсоїдальних мас однорідної нестислої рідини залучено в'язкість, що дорівнює нулю на межі, та монотонно зростає у напрямку до її центру мас, де досягає свого максимуму. Функцію координат, що задає в'язкість, обрано так, що рух еліпсоїдальної маси рідини може бути потенціальним або однорідним вихровим. Досліджено коливання з потенціалом швидкості осесиметричної еліпсоїдальної маси рідини.

Ключові слова: *еліпсоїд, рідина, в'язкість, вихор, гравітація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`sudakov@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 19.12.12