

УДК 530.145+519.713

©2012. В. Г. Скобелев

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ КВАНТОВЫХ АВТОМАТОВ (ОБЗОР)

В работе рассмотрено многообразие существующих моделей квантовых автоматов. Выделены модели, которые принято называть конечными квантовыми автоматами, также модели, которые таковыми не являются (так как они используют средства, не применяемые для классических конечно-автоматных моделей). Приведены основные результаты, связанные с анализом эквивалентности конечных квантовых автоматов.

Ключевые слова: модели квантовых автоматов, эквивалентность конечных квантовых автоматов.

1. Введение. На протяжении последних 30-и лет происходит интенсивное формирование теории квантовых алгоритмов. Эти исследования, во многом, базируются на достижениях классической теории алгоритмов, которая к 80-ым годам XX столетия приняла вид стройной теории со сложившейся проблематикой. При этом исследования в области квантовых алгоритмов, в свою очередь, стимулировали переосмысление проблематики таких достаточно хорошо проработанных разделов классической теории алгоритмов, как теория автоматов. С другой стороны, квантовые вычисления, вероятностные по своей сути, существенно используют математический аппарат теории линейных операторов в конечномерном комплексном эрмитовом пространстве. Тем самым, устанавливается глубокая внутренняя связь между квантовыми вычислениями и алгебраической теорией автоматов.

По-видимому, именно особенности анализа квантовых систем явились одной из основных причин того, что, в отличие от классической теории автоматов, было построено значительное число различных моделей квантовых автоматов, различающихся как по сложности, так и по их возможностям. Эти результаты содержатся в различных, иногда труднодоступных, статьях. Поэтому в настоящей работе сделана попытка охарактеризовать состояние, в котором на современном этапе находится теория конечных квантовых автоматов.

С целью сделать изложение материала, по возможности, замкнутым в п.2 приведены необходимые результаты теории детерминированных и вероятностных автоматов, а в п.3 – основные понятия теории квантовых вычислений. В п.4 рассмотрены существующие модели квантовых автоматов. Выделены модели, которые принято называть конечными квантовыми автоматами, также модели, которые таковыми не являются (так как они используют средства, не применяемые для классических конечно-автоматных моделей). В п.5 приведены основные результаты, связанные с анализом эквивалентности конечных квантовых автоматов. Заключение содержит ряд выводов.

2. Конечные автоматы. В середине XX века были заложены основы теории конечных автоматов [1-5]. Эта теория была предназначена для исследования вы-

числений, осуществляемых в реальное время на конечной памяти. По своей сути конечный автомат (в дальнейшем, для краткости, автомат) является формальной моделью тех процессов, которые могут быть реализованы на компьютерах (из-за существующих ограничений на объем их памяти). При этом, автомат рассматривался либо как преобразователь информации, либо как распознаватель языка.

В первом случае автомат имеет вид $M = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$ (Q, X и Y – конечные множество состояний, входной и выходной алфавит, а $\delta : Q \times X \rightarrow Q$ и $\lambda : Q \times X \rightarrow Y$ – функции переходов и выходов). Были выделены две основные модели (Миля и Мура), а также некоторые их разновидности, связанные с представлением функционирования автомата во времени. Именно в рамках этих моделей и осуществлялось исследование задач анализа и синтеза автоматов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что в 60-70 годах XX века большое внимание было уделено исследованию автоматов без потери информации [6, 7], т.е. автоматов, для которых по выходному слову, а также по начальному и/или финальному состоянию однозначно восстанавливается входное слово, поданное на автомат.

Во втором случае автомат называется настроенным автоматом и имеет вид $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$ (где Q и X – конечные множество состояний и входной алфавит, $\delta : Q \times X \rightarrow Q$ – функция переходов, $q_{in} \in Q$ – начальное состояние, $Q_{fin} \subseteq Q$ – множество финальных состояний). Язык, распознаваемый (говорят также, представленный) настроенным автоматом, определяется как множество слов, переводящих начальное состояние во множество финальных состояний (говорят также, что настроенный автомат принимает входное слово, если оно переводит начальное состояние в множество финальных состояний, и отвергает входное слово в противном случае). Такие языки образуют множество регулярных языков, которое представляет собой наименьший нетривиальный класс языков, имеющий многочисленные приложения. Для каждого регулярного языка $L \subseteq X^*$ может быть эффективно построен приведенный настроенный автомат, распознающий этот язык, т.е. такой настроенный автомат $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$, что для любых состояний $q, q' \in Q$ ($q \neq q'$) множества слов, переводящих состояние q во множество Q_{fin} отличается от множества слов, переводящих состояние q' во множество Q_{fin} .

Отметим, что настроенный автомат естественным образом интерпретируется в терминах 1-направленной 1-головочной машины Тьюринга (МТ) с одной входной лентой (т.е. информация только считывается). Напомним, что «1-направленность» означает, что на каждом шаге работы МТ головка сдвигается на клетку вправо.

Всюду в дальнейшем предполагается, что входной алфавит X зафиксирован.

Обозначим через \mathcal{L}_{DFA} множество всех регулярных языков, распознаваемых настроенными автоматами.

Существенную роль в исследовании сложности распознавания регулярных языков сыграли следующие два момента.

Во-первых, это формирование модели источника, т.е. недетерминированного настроенного автомата $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$, где $\delta \subseteq Q \times (\{\Lambda\} \cup X) \times Q$ – тернарное отношение, определяющее допустимые переходы (Λ – пустое слово). Язык, распознаваемый источником, определяется как множество слов, переводящих хотя бы од-

но начальное состояние $q \in Q_{in}$ во множество Q_{fin} финальных состояний. Множество всех языков, представляемых источниками, совпадает с \mathcal{L}_{DFA} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Хотя для каждого источника может быть эффективно построен эквивалентный ему (т.е. представляющий тот же язык) настроенный автомат, переход от источника к настроенному автомату может вызвать существенный рост мощности множества состояний (известны примеры, когда источник имеет n состояний, а эквивалентный ему приведенный настроенный автомат 2^n состояний). По-видимому, это обстоятельство и послужило основной причиной того, что именно алгебра источников [4], разработанная Б.А. Трахтенбротом в 60-х годах XX века, в 90-х годах стала основой для формирования одного из основных классов систем дискретных событий, предназначенных для автоматизации управления производственными процессами.

Во-вторых, это выделение настроенных групповых автоматов, т.е. таких автоматов $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$, что для каждого $x \in X$ отображение δ_x , определяемое равенством $\delta_x(q) = \delta(q, x)$ ($q \in Q$) – подстановка на множестве Q . Для множества \mathcal{L}_{GFA} языков, представимых настроенными групповыми автоматами, истинно включение $\mathcal{L}_{GFA} \subset \mathcal{L}_{DFA}$. Это обстоятельство послужило причиной исследования k -буквенных ($k \in \mathbb{N}$) групповых автоматов [8, 9], являющихся специальным случаем односторонних многоголовочных автоматов [10].

k -буквенный ($k \in \mathbb{N}$) групповой автомат определяется как настроенный автомат $M = (Q, T, \delta, q_{in}, Q_{fin})$ ($T = \{\Lambda\}^k \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\Lambda\}^{k-i} X^i \cup X^k$), где $\delta : T \times Q \rightarrow Q$ – такая функция переходов, что для каждого $w \in T$ отображение δ_w , определяемое равенством $\delta_w(q) = \delta(q, w)$ ($q \in Q$) – подстановка на множестве Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. k -буквенный ($k \in \mathbb{N}$) групповой автомат $M = (Q, T, \delta, q_{in}, Q_{fin})$, как правило, следующим образом интерпретируется в терминах 1-направленной k -головочной МТ $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$ с одной входной лентой (здесь «1-направленность» означает, что на каждом шаге работы МТ все головки синхронно сдвигаются на клетку вправо).

Пусть на входной ленте записано слово $\$ \underbrace{\Lambda \dots \Lambda}_{k-1 \text{ раз}} x_1 \dots x_l \#$, где $\$$ и $\#$, соответственно, левый и правый концевые маркеры, а $x_1 \dots x_l \in X^*$ ($l \in \mathbb{Z}_+$). В начальный момент МТ M находится в состоянии $q_0 = q_{in}$, а ее головки обозревают первые k клеток. Функционирование МТ M состоит из следующих $l + 2$ шагов:

- 1) на 1-м шаге головки МТ синхронно сдвигаются на клетку вправо;
- 2) на j -м шаге ($j = 2, \dots, l + 1$) (перед его выполнением МТ находится в состоянии q_{j-2} , а ее головки обозревают клетки, в которых записано слово $w_{j-1} \in T$) МТ переходит в состояние $q_{j-1} = \delta(q_{j-2}, w_{j-1})$, после чего ее головки синхронно сдвигаются на клетку вправо;
- 3) на $(l + 2)$ -ем шаге (перед его выполнением МТ находится в состоянии q_{l+1} , а самая правая из ее головок обозревает клетку, в которой записан правый концевой маркер) МТ останавливается.

Язык, распознаваемый автоматом $M = (Q, T, \delta, q_{in}, Q_{fin})$, определяется как множество всех слов $x_1 \dots x_l \in X^*$ ($l \in \mathbb{Z}_+$), переводящих МТ $M = (Q, X, \delta, q_{in}, Q_{fin})$ из начального состояния q_{in} в множество финальных состояний Q_{fin} .

Обозначим через \mathcal{L}_{GFA_k} ($k \in \mathbb{N}$) множество всех языков, распознаваемых k -буквенными групповыми автоматами (таким образом, $\mathcal{L}_{GFA_1} = \mathcal{L}_{GFA}$), и положим

$\mathcal{L}_{GFA_*} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{GFA_k}$. Известно, что $\mathcal{L}_{GFA_k} \subset \mathcal{L}_{GFA_{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\mathcal{L}_{GFA_*} \subset \mathcal{L}_{DFA}$.

Нетривиальным обобщением рассмотренных выше автоматов является вероятностный автомат [11-13]. Он характеризуется тем, что для каждого состояния и каждого входного символа с заданными вероятностями осуществляется переход в каждое состояние, а также с заданными вероятностями осуществляется выдача каждого из выходных символов. Отметим, что существует глубокая внутренняя связь между вероятностными автоматами и конечными цепями Маркова [14].

Вероятностный настроенный автомат имеет вид $M = (Q, X, \{M_x\}_{x \in X}, u_0, Q_{fin})$, где $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ – множество состояний, X – конечный входной алфавит, M_x ($x \in X$) – стохастические $n \times n$ -матрицы переходов, $u_0 = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)})^T$ ($\alpha_i^{(0)} \in \mathbb{R}_+$ ($i \in \mathbb{N}_n$), $\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} = 1$) – начальное распределение состояний, а $Q_{fin} \subseteq Q$ – множество финальных состояний. Эволюция автомата M на входном слове $x_1 \dots x_l$ ($l \in \mathbb{Z}_+$) определяется равенством $u_l = (\alpha_1^{(l)}, \dots, \alpha_n^{(l)})^T = M_{x_l} \dots M_{x_1} u_0$. Говорят, что автомат M принимает входное слово $x_1 \dots x_l$ с вероятностью $P_M(x_1 \dots x_l) = \sum \alpha_i^{(l)}$, где сумма берется по всем таким i , что $q_i \in Q_{fin}$. Так как для любого входного слова может быть вычислена вероятность того, что оно переводит автомат во множество финальных состояний, то говорят, что:

- 1) вероятностный настроенный автомат распознает язык L с вероятностью p ($0.5 \leq p \leq 1$), если он принимает каждое слово $w_1 \in L$ с вероятностью, не меньшей, чем p , а каждое слово $w_2 \notin L$ – с вероятностью, не превосходящей $1 - p$;
- 2) вероятностный настроенный автомат распознает язык L с ограниченной ошибкой $(p_1; p_2)$ ($0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$), если он принимает каждое слово $w_1 \in L$ с вероятностью, не меньшей, чем p_2 , а каждое слово $w_2 \notin L$ – с вероятностью, не превосходящей p_1 (в дальнейшем, для краткости, в фразе «распознавание языка с ограниченной ошибкой» будем опускать слово «ограниченной»).

Отметим, что вероятностный настроенный автомат естественным образом интерпретируется в терминах вероятностной 1-направленной 1-головочной МТ с одной входной лентой.

Известно, что множество языков, распознаваемых вероятностными настроенными автоматами, имеет мощность континуум. При этом, при распознавании регулярных языков переход от детерминированного настроенного автомата к вероятностному настроенному автомату может дать субэкспоненциальный выигрыш в числе состояний.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [15] показано, что существует последовательность таких попарно различных языков $L_n \in \mathcal{L}_{DFA}$ ($n \in \mathbb{N}$), что язык L_n распознается с заданной вероятностью p вероятностным настроенным автоматом с n состояниями, а детерминированный настроенный автомат, распознающий этот язык, имеет $\Omega(2^{\frac{\log n}{\log \log n}})$ ($n \rightarrow \infty$) состояний.

Более сильные результаты получены в [16] для обратимых вероятностных настроенных автоматов, т.е. у которых каждая матрица переходов – обратимая дважды стохастическая. Показано, что в 2-буквенном входном алфавите существует последовательность таких попарно различных языков $L_n \in \mathcal{L}_{DFA}$ ($n \in \mathbb{N}$), что язык L_n распознается с вероятностью $\frac{68}{135}$

обратимым вероятностным настроенным автоматом с z_i состояниями, а детерминированный настроенный автомат, распознающий этот язык, имеет $(7^{\frac{1}{14}})^{z_i}$ состояний. Кроме того, в [16] показано, что если истинна гипотеза Артина (для любого целого числа a , не являющегося точным квадратом и отличного от -1 , существует бесконечно много таких простых чисел m , что a – первообразный корень по модулю m , причем для количества $N_a(x)$ таких простых чисел, не превосходящих x , справедлива асимптотика $N_a(x) \sim c_a \frac{x}{\ln x}$ ($x \rightarrow \infty$), где c_a – константа, зависящая только от a), то эта оценка может быть усилена. А именно, в этом случае в 2-буквенном входном алфавите существует последовательность таких попарно различных языков $L_n \in \mathcal{L}_{DFA}$ ($n \in \mathbb{N}$), что язык L_n распознается с вероятностью $\frac{19}{36}$ обратимым вероятностным настроенным автоматом с z_i состояниями, а детерминированный настроенный автомат, распознающий этот язык, имеет $(2^{\frac{1}{4}})^{z_i}$ состояний.

3. Квантовые вычисления. Начиная с 80-х годов XX века стало формироваться принципиально новое направление теории алгоритмов – теория квантовых алгоритмов [17, 18]. С позиции теории систем любой квантовый алгоритм является композицией двух взаимодействующих систем: классической конечной дискретной системы и квантовой системы. Классическая дискретная система реализует ту часть процесса вычисления, которая представлена моделями и методами классической теории алгоритмов. Квантовая система существенно базируется на использовании квантово-механических процессов, что дает возможность обеспечить экспоненциальный рост размерности пространства вычислений при линейном росте размерности системы (т.е. используемого количества кубитов), а также возможность одновременного изменения величин, характеризующих эту систему. Именно эти два фактора и лежат в основе построения для широкого класса задач, актуальных как с теоретической, так и прикладной точки зрения, квантовых алгоритмов, для которых временная и емкостная сложность существенно ниже, чем для классических алгоритмов.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для определения квантовой системы нам понадобятся следующие понятия теории линейных операторов в комплексном эрмитовом пространстве \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}$) векторов-столбцов $|\varphi\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, в котором зафиксирован ортонормированный базис $\mathbb{B}_n = \{|i\rangle | i \in \mathbb{N}_n\}$, где $|i\rangle = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i \text{ раз}})^T$. Скалярное произведение векторов $|\varphi_i\rangle \in \mathbb{C}^n$

($i = 1, 2$) определено равенством $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \cdot | \varphi_2 \rangle$, где $\langle \varphi_1 | = | \varphi_1 \rangle^\dagger$, а \dagger – операция эрмитового сопряжения, т.е. транспонирования и замены чисел их комплексно сопряженными. Норма вектора $|\varphi\rangle$ определена равенством $\| |\varphi\rangle \| = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$.

Предполагается, что линейные операторы представлены в матричном виде. Линейный оператор $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется:

- 1) нормальным, если $AA^\dagger = A^\dagger A$;
- 2) эрмитовым (или самосопряженным), если $A^\dagger = A$;
- 3) унитарным, если $A^\dagger A = I$, где I – единичная матрица (в дальнейшем унитарные операторы будем обозначать буквой U , возможно, с индексами);
- 4) проектором на подпространство $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{C}^n$, если для любого вектора $|\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n$ истинно равенство $A|\varphi\rangle = |\varphi_1\rangle$, где $|\varphi\rangle = |\varphi_1\rangle \oplus |\varphi_2\rangle$ (\oplus – прямая сумма), а $|\varphi_1\rangle \in \mathbb{W}$ и $|\varphi_2\rangle \in \mathbb{W}^\perp$ (в дальнейшем проекторы будем обозначать буквой P , возможно, с индексами).

Отметим, что:

- 1) для любого нормального оператора A существуют такие попарноразличные числа

ν_1, \dots, ν_m и такие попарно ортогональные ненулевые проекторы P_1, \dots, P_m , удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^m P_i = I$, что $A = \sum_{i=1}^m \nu_i P_i$ (такое представление называется спектральным разложением оператора A);

2) нормальный оператор является эрмитовым тогда и только тогда, когда все его собственные значения действительны;

3) унитарные операторы сохраняют скалярное произведение, а, следовательно, и норму векторов;

4) для любого проектора P истинно равенство $P^2 = P$.

Квантовая система \mathcal{S} в пространстве \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}$) – это физическая система, состояние которой представлено таким вектором $|\xi\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{C}^n$, что $\| |\xi\rangle \| = 1$. Число α_i ($i \in \mathbb{N}_n$) называется (комплексной) амплитудой, соответствующей базисному вектору $|i\rangle$.

Исходя из положений квантовой механики, допустимыми преобразованиями состояния квантовой системы \mathcal{S} являются унитарные преобразования и измерения.

Проективное измерение состояния квантовой системы определяется спектральным разложением $A = \sum_{i=1}^m \nu_i P_i$ эрмитового оператора A . В результате такого измерения квантовая система \mathcal{S} переходит из состояния $|\xi\rangle$ в состояние $\frac{P_i |\xi\rangle}{\|P_i |\xi\rangle\|}$ ($i \in \mathbb{N}_m$) с вероятностью $p_i = \|P_i |\xi\rangle\|^2$. Отметим, что состояния $\frac{P_i |\xi\rangle}{\|P_i |\xi\rangle\|}$ ($i \in \mathbb{N}_m$) попарно ортогональны.

Важный специальный случай проективного измерения – измерение в базисе \mathbb{V}_n . Оно определяется эрмитовым оператором $A = \sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|$. В результате такого измерения квантовая система \mathcal{S} переходит из состояния $|\xi\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ в состояние $\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} |i\rangle$ ($i \in \mathbb{N}_n$) с вероятностью $|\alpha_i|^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В соответствии с положениями квантовой механики, для состояний $|\xi\rangle$ и $e^{i\theta} |\xi\rangle$ ($\theta \in \mathbb{R}$) квантовой системы \mathcal{S} , совпадающих с точностью до фазового множителя $e^{i\theta}$, имеет место одна и та же статистика измерений. Поэтому такие состояния рассматриваются как (физически) эквивалентные, т.е. неразличимые при измерении. По этой причине при измерении в базисе \mathbb{V}_n считают, что квантовая система \mathcal{S} переходит из состояния $|\xi\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ в состояние $|i\rangle$ ($i \in \mathbb{N}_n$) с вероятностью $|\alpha_i|^2$.

Любое квантовое вычисление состоит в применении ряда последовательностей унитарных преобразований состояния квантовой системы, за каждой из которых следует измерение. Состояние, полученное при последнем измерении, представляет результат квантового вычисления. Так как финальное состояние (как и каждое измеренное промежуточное состояние) квантовой системы в процессе ее эволюции получается с соответствующей вероятностью, то квантовые алгоритмы имеют вероятностную природу.

4. Модели квантовых автоматов. Начиная с 1997г. построен и исследован ряд, различных по сложности и возможностям, моделей квантовых автоматов. Все эти модели рассматриваются как распознаватели языка и определены (при тех или иных ограничениях) в терминах квантовой k -головочной ($k \geq 1$) МТ с одной входной

лентой, функционирующей в пространстве \mathbb{C}^n .

Первая, и наиболее простая, модель квантового автомата – МО-1QFA построена в [19] (эти результаты были опубликованы в 1997г. в препринте «97-97-062 Santa Fe Institute Working Paper»). Эта модель определена в терминах квантовой 1-направленной 1-головочной МТ $M = (Q, X, \mu, |\psi_0\rangle, Q_{fin})$, где Q – множество базисных состояний B_n , $Q_{fin} \subseteq Q$ – множество финальных базисных состояний, X – входной алфавит, $|\psi_0\rangle \in \mathbb{C}^n$ ($\| |\psi_0\rangle \| = 1$) – начальное состояние, а μ – отображение входного алфавита X во множество n -мерных унитарных матриц (вместо $\mu(x)$ ($x \in X$) пишут U_x). Пусть на входной ленте записано слово $\$x_1 \dots x_l\#$, где $x_1 \dots x_l \in X^*$ ($l \in \mathbb{Z}_+$). В начальный момент МТ M находится в состоянии $|\psi_0\rangle$, а ее головка обозревает клетку с левым концевым маркером. Функционирование МТ M состоит из следующих $l + 2$ шагов:

- 1) на 1-м шаге головка МТ сдвигается на клетку вправо;
- 2) на j -м шаге ($j = 2, \dots, l+1$) (перед его выполнением МТ находится в состоянии $|\psi_{j-2}\rangle$, а ее головка обозревает входной символ x_{j-1}) МТ переходит в состояние $|\psi_{j-1}\rangle = U_{x_j}|\psi_{j-2}\rangle$, после чего ее головка сдвигается на клетку вправо;
- 3) на $(l + 2)$ -м шаге (перед его выполнением МТ находится в состоянии $|\psi_l\rangle$, а ее головка обозревает правый концевой маркер) состояние $|\psi_l\rangle$ измеряется в базисе B_n и МТ останавливается.

Слово $w = x_1 \dots x_l \in X^l$ ($l \in \mathbb{Z}_+$) принимается МТ M тогда и только тогда, когда результат измерения принадлежит множеству Q_{fin} . Положив $U_w = U_{x_l} \dots U_{x_1}$, получим, что вероятность того, что МТ M принимает входное слово w определяется равенством $P_M(w) = \|P_{acc}U_w|\psi_0\rangle\|^2$, где P_{acc} – проектор на подпространство, порожаемое множеством Q_{fin} . Таким образом, для МО-1QFA естественно определяется распознавание языка с заданной вероятностью или с заданной ошибкой. Отметим, что каждый обратимый настроенный вероятностный автомат имеет МО-1QFA аналог. В [20] показано, что множество языков, распознаваемых МО-1QFA с заданной ошибкой, совпадает с множеством \mathcal{L}_{GFA} (эти результаты были опубликованы в 1999 г. в Technical Report of University of British Columbia TR-99-03).

В [21] построена модель ММ-1QFA, отличающаяся от МО-1QFA тем, что:

- 1) в множестве Q базисных состояний квантовой (МТ) M выделены непересекающиеся подмножества Q_{acc} , Q_{rej} и Q_{nh} ($Q_{acc} \cup Q_{rej} \cup Q_{nh} = Q$), соответственно, принимающих, отвергающих и нетерминальных базисных состояний;
- 2) на каждом промежуточном шаге вычислений после применения соответствующего унитарного оператора допускается измерение в базисе B_n ;
- 3) если на промежуточном шаге после измерения получено состояние $q \in Q_{nh}$, то МТ переходит к обработке следующего символа, а если состояние $q \in Q_{acc} \cup Q_{rej}$, то МТ останавливается (при этом, слово принимается, если $q \in Q_{acc}$, и отвергается, если $q \in Q_{rej}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Таким образом, в модели МО-1QFA реализован классический подход к распознаванию языков, а в модели ММ-1QFA – подход, известный как «распознавание с остановкой» (Decide and Halt). Нетривиальность последнего подхода состоит в том, что он дал возможность выделить класс задач распознавания, известных как «задачи с перспек-

тивной» (promise problems). Последние характеризуются следующим образом.

С задачей распознавания ассоциируется такой язык $L \subseteq \{0, 1\}^*$, что задача сводится к тому, чтобы принять любой вход, которому соответствует слово $w \in L$, и отвергнуть любой вход, которому соответствует слово $w \in \{0, 1\}^* \setminus L$. Предполагается, что заданы непересекающиеся языки $L_{YES} \in \{0, 1\}^*$ и $L_{NO} \in \{0, 1\}^*$. Язык $L_{YES} \cup L_{NO}$ называется «перспективой» (promise) и предназначен для остановки алгоритма распознавания без дальнейшей обработки входа. Пусть на промежуточном шаге работы алгоритма распознавания обработанной части входа соответствует слово $v \in L_{YES} \cup L_{NO}$. Тогда алгоритм распознавания останавливается (если $v \in L_{YES}$, то вход принимается, а если $v \in L_{NO}$, то вход отвергается). Если же $v \notin L_{YES} \cup L_{NO}$, то алгоритм распознавания обрабатывает некоторую новую часть входа, формирует соответствующее слово и осуществляет его анализ указанным способом.

Модель ММ-1QFA является более сильной, чем модель МО-1QFA (например, язык a^*b^* распознается с ошибкой моделью ММ-1QFA, и не распознается с ошибкой моделью МО-1QFA). Тем не менее, модель ММ-1QFA распознает только языки, принадлежащие собственному подмножеству множества \mathcal{L}_{DFA} (например, язык $\{a, b\}^*b$ не может быть распознан моделью ММ-1QFA ни с какой ошибкой).

В [8] установлены оценки вероятностей, с которыми модель ММ-1QFA распознают некоторые подмножества регулярных языков. В частности, показано, что языки, принадлежащие множеству \mathcal{L}_{GFA} , могут быть распознаны моделью ММ-1QFA с вероятностью, не меньшей, чем $\frac{7}{9}$.

В [20] в терминах «запрещенных» фрагментов графов переходов детерминированных приведенных настроенных автоматов сделана попытка охарактеризовать класс языков, не распознаваемых моделью ММ-1QFA. Эти результаты существенно усилены в [22] за счет выделения новых «запрещенных» фрагментов. В [22] также показано, что множество языков, распознаваемых моделью ММ-1QFA не замкнуто относительно булевых операций. Однако, до сих пор отсутствует конструктивный критерий принадлежности регулярного языка множеству языков, распознаваемых моделью ММ-1QFA.

Большое внимание было уделено сравнению мощностей множеств базисных состояний (в дальнейшем, для краткости, будем говорить множеств состояний) моделей МО-1QFA и ММ-1QFA с мощностями множеств состояний настроенных детерминированных или вероятностных автоматов, распознающих тот же регулярный язык.

В [8] показано, что регулярный язык $L_n = \{a^i | i \text{ делится на } n\}$ ($n \geq 2$) распознается квантовым автоматом с числом состояний $O(\log n)$ ($n \rightarrow \infty$), а любой настроенный детерминированный или вероятностный автомат, распознающий этот язык, имеет, по крайней мере, n состояний.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Язык $L_n = \{a^i | i \text{ делится на } n\}$ ($n \geq 2$) принадлежит множеству так называемых периодических языков. В [23] показано, что любой регулярный n -периодический ($n \geq 2$) язык L в однобуквенном алфавите (т.е. $a^i \in L$ тогда и только тогда, когда $a^{i+n} \in L$) распознается квантовым автоматом с $O(\sqrt{n})$ ($n \rightarrow \infty$) состояниями.

Итак, квантовый автомат может дать экспоненциальный выигрыш в числе состояний по сравнению с настроенным детерминированным или вероятностным ав-

томатом, распознающим тот же язык.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В [24] показано, что существует такая последовательность z_n ($n \in \mathbb{N}$) задач с перспективой, что задача z_n может быть решена квантовым автоматом с двумя состояниями, а любой вероятностный настроенный автомат, решающий эту задачу, имеет не менее n состояний, т.е. верхняя граница выигрыша в числе состояний, которую может дать квантовый автомат по сравнению с вероятностным автоматом, не ограничена.

Однако может иметь место и обратная ситуация. В [25] показано, что любой квантовый автомат, распознающий регулярный язык $L_n = \{wa \mid w \in \{a, b\}^*, |w| < n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), имеет не менее $2^{\Omega(n)}$ ($n \rightarrow \infty$) состояний. В то же время, существует настроенный детерминированный автомат с $O(n^2)$ ($n \rightarrow \infty$) состояниями, распознающий этот язык.

Значительное число работ было посвящено исследованию различных обобщений моделей МО-1QFA и ММ-1QFA.

Одним из первых обобщений модели МО-1QFA является модель L-QFA (Latvian QFA). В этой модели вместо одного (т.е. «чистого» (pure)) состояния $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ ($\|\psi\| = 1$) используется «смешанное» (mixed) состояние $\mathcal{E} = \{(p_i, |\psi_i\rangle \mid i \in \mathbb{N}_n\}$ ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$), где p_i ($i \in \mathbb{N}_n$) – вероятность состояния $|\psi_i\rangle$. Смешанное состояние \mathcal{E}

представляется матрицей плотности $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Под действием унитарного оператора U матрица плотности ρ преобразуется в матрицу плотности $U^\dagger \rho U$. Свойства модели L-QFA детально исследованы в [26], где, в частности, показано, что множество языков, распознаваемых моделью L-QFA замкнуто относительно булевых операций. Более того, показано, что это множество языков совпадает с множеством языков, распознаваемых обратимыми вероятностными настроенными автоматами. Таким образом, к этому классу языков применимы характеристики в терминах «запрещенных» фрагментов графов переходов детерминированных приведенных настроенных автоматов, полученные в [22].

Использование «смешанных» состояний дает возможность получить экспоненциальный выигрыш в числе состояний по сравнению с моделью, использующей только «чистые» состояния. В [27] показано, что существует такая последовательность языков L_n ($n \in \mathbb{N}$), распознаваемых с вероятностью 0.75 квантовыми автоматами, имеющими $2n$ «смешанных» состояний, что квантовый автомат с «чистыми» состояниями, распознающий язык L_n с ошибкой, имеет не менее $e^{O(n \ln n)}$ ($n \rightarrow \infty$) состояний.

В [28] построена модель N-QFA, в которой на каждом промежуточном шаге вычислений вместо применения одного унитарного оператора допускается применение конечной последовательности, состоящей из унитарных операторов и проективных измерений.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Таким образом, в модели N-QFA, в частности, реализован принцип использования вспомогательных кубитов (ancilla qubits). Отметим, что в режиме «распознавание с остановкой» (т.е. аналогичном режиму функционирования модели ММ-1QFA) модель N-QFA представляет собой один из конечно-автоматных вариантов модели кванто-

вого компьютера, рассмотренного в [29].

Модель N-QFA распознает только языки, принадлежащие собственному подмножеству множества \mathcal{L}_{DFA} (например, язык $\{a, b\}^*b$ не может быть распознан моделью N-QFA ни с какой ошибкой). Однако, до сих пор отсутствует конструктивный критерий принадлежности регулярного языка множеству языков, распознаваемых моделью N-QFA.

В [9] по аналогии с моделью k -буквенного ($k \in \mathbb{N}$) группового автомата построена квантовая модель k QFA.

Эта модель определена в терминах квантовой 1-сторонней k -головочной ($k \in \mathbb{N}$) МТ $M = (Q, T, \mu, |\psi_0\rangle, Q_{fin})$ (где $T = \{\Lambda\}^k \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\Lambda\}^{k-i} X^i \cup X^k$, а μ – отображение множества T во множество n -мерных унитарных матриц), головки которой синхронно сдвигаются вправо. Обозначим через \mathcal{L}_{QFA_k} ($k \in \mathbb{N}$) множество языков, распознаваемых моделью k QFA с ограниченной ошибкой, и положим $\mathcal{L}_{QFA_*} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{QFA_k}$. В [9] показано, что $\mathcal{L}_{QFA_k} \subset \mathcal{L}_{QFA_{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\mathcal{L}_{QFA_*} \subset \mathcal{L}_{DFA}$, а также что множество \mathcal{L}_{QFA_*} замкнуто относительно булевых операций, но не замкнуто относительно операций конкатенации и итерации. Однако, до сих пор отсутствует конструктивный критерий принадлежности регулярного языка множеству языков, распознаваемых моделью k QFA.

Все рассмотренные выше модели квантовых автоматов распознают только собственное подмножество множества \mathcal{L}_{DFA} . Их принято называть квантовыми конечными автоматами.

Был предпринят ряд попыток расширить множество языков, распознаваемых квантовыми автоматами, за счет расширения множества действий, допустимых для модели квантового автомата в процессе распознавания языка. Все полученные таким образом модели используют средства, не применяемые для классических конечно-автоматных моделей. Поэтому такие модели не относят к классу квантовых конечных автоматов. Перечислим некоторые из них.

В [30] построена модель CL-QFA, являющаяся обобщением модели N-QFA. В этой модели для управления остановкой на промежуточных шагах дополнительно используется некоторый регулярный язык в алфавите собственных значений эрмитовых операторов, определяющих применяемые проективные измерения. Доказано, что CL-QFA распознает с ошибкой множество \mathcal{L}_{DFA} всех регулярных языков. Однако, до сих пор отсутствует конструктивный критерий принадлежности регулярного языка множеству языков, распознаваемых моделью CL-QFA.

В [21] исследована модель 2-QFA квантового автомата, в которой автомат на каждом шаге вычислений определяет, в какую сторону, влево или вправо, сдвинуться его головке (т.е. модель 2-QFA, представлена квантовой 2-направленной 1-головочной МТ), а в [31] – модель 1.5-QFA квантового автомата, в которой автомат на каждом шаге вычислений определяет, сдвинуться ли его головке на клетку вправо или остаться на месте.

В [21] и [32] показано, что множество языков, распознаваемых, соответственно, 2-

направленной и 1.5-направленной моделью QFA включает в себя множество \mathcal{L}_{DFA} в качестве собственного подмножества. Однако, до сих пор отсутствуют конструктивные критерии принадлежности регулярного языка множествам языков, распознаваемых этими моделями. Большая сложность исследования этих моделей вытекает хотя бы из того, что, как показано в [32], задача анализа пустоты распознаваемого языка для этих моделей алгоритмически неразрешима.

Следует отметить, что 2-направленная модель QFA может обеспечить субэкспоненциальное ускорение по сравнению с 2-направленным вероятностным автоматом. Например, в [21] показано, что контекстно-свободный язык $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ распознается с ошибкой 2-направленной моделью QFA за полиномиальное время (известно, что (см., напр., [33, 34]) вероятностный 2-направленный настроенный автомат может распознать этот язык только за экспоненциальное время).

В [35] построена модель C-QFA, являющаяся обобщением модели 1.5-QFA. В этой модели предполагается, что лента 1.5-направленной 1-головочной МТ является рабочей, т.е. МТ может не только считывать информацию, но и осуществлять запись в обозреваемую клетку. Эта модель не получила широкого распространения, и до сих пор не ясны ее преимущества по сравнению с моделью 1.5-QFA.

В [36-39] исследованы модели 1-направленных, 1.5-направленных и 2-направленных квантовых автоматов со счетчиком.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Под настроенным автоматом со «счетчиком» понимается автомат, содержащий ячейку, в которую может быть записано любое число. Первоначально содержимое счетчика равно нулю. Действие автомата на каждом шаге вычислений зависит от того, равно ли содержимое счетчика нулю или нет. При этом, на каждом шаге вычислений содержимое счетчика, в зависимости только от текущего состояния автомата, может быть либо увеличено на единицу, либо уменьшено на единицу, либо оставлено без изменения.

Отметим, что интерес к квантовым автоматам со счетчиком обусловлен, во многом, тем обстоятельством, что они имеют преимущества как по силе, так и по скорости распознавания языков по сравнению с аналогичными вероятностными настроенными автоматами со счетчиком.

5. Эквивалентность квантовых конечных автоматов. Задача анализа эквивалентности двух моделей вычислений, имеющих один и тот же входной алфавит, является одной из основных модельных задач теории вычислений. Значение этой задачи состоит, в частности, в том, что при ее алгоритмической разрешимости появляется возможность выделить и охарактеризовать те особенности структуры модели, которые являются существенными для конкретного вычисления.

В терминах распознавания языков l -эквивалентность ($l \in \mathbb{N}$) детерминированных моделей означает, что они распознают одно и то же множество слов длины, не превосходящей l , а l -эквивалентность вероятностных моделей – что совпадают вероятности принятия этими моделями любого входного слова длины, не превосходящей l . Аналогичным образом, эквивалентность детерминированных моделей означает, что они распознают один и тот же язык, а эквивалентность вероятностных моделей – что совпадают вероятности принятия любого входного слова этими моделями. Напомним, что квантовые автоматы являются вероятностными моделями вычислений.

Исследование задачи анализа эквивалентности квантовых конечных автоматов осуществлялось в соответствии с рассмотренным в предыдущем разделе усложнением модели автомата. Перечислим основные результаты, полученные в этом направлении.

Задача анализа эквивалентности двух МО-1QFA моделей впервые была сформулирована в [19], а ее решение было получено в [40, 41]. В [42] был предложен полиномиальный алгоритм проверки эквивалентности двух ММ-1QFA моделей.

В [43] решена задача анализа эквивалентности моделей k_1 QFA и k_2 QFA в однобуквенном входном алфавите. Доказано, что эти модели эквивалентны тогда и только тогда, когда они $(n^4 + k - 1)$ -эквивалентны, где $n = n_1 + n_2$, n_i ($i = 1, 2$) – число базисных состояний модели k_i QFA, а $k = \max\{k_1, k_2\}$. Отметим, что отсюда, в частности, вытекает, что в однобуквенном входном алфавите сложность анализа эквивалентности состояний модели k QFA растет линейно с ростом k . В [44] исследована задача анализа эквивалентности моделей k_1 QFA и k_2 QFA в m -буквенном входном алфавите. Доказано, что эти модели эквивалентны тогда и только тогда, когда они $(n^2 m^{k-1} - m^{k-1} + k)$ -эквивалентны. Также построен полиномиальный по времени алгоритм, анализирующий эквивалентность таких моделей за время $O(m^{2k-1} n^8 + km^k n^6)$ ($n \rightarrow \infty$). Отметим, что отсюда, в частности, вытекает, что в m -буквенном входном алфавите сложность анализа эквивалентности состояний модели k QFA растет экспоненциально с ростом k .

6. Заключение. В работе сделана попытка охарактеризовать состояние, в котором на современном этапе находится теория конечных квантовых автоматов. Четко вырисовываются следующие возможные направления исследований. Во-первых, это поиск критериев принадлежности языков множеств языков, распознаваемым моделями конечных квантовых автоматов, возможно, при тех или иных ограничениях. Во-вторых, это разработка алгоритмов построения минимального конечного квантового автомата и характеристика структуры этого автомата.

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматлит, 1962. – 476 с.
2. Hennie F.C. Finite state models for logical machines. – NY.: Wiley&Sons Inc., 1962. – 466 p.
3. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
4. Трахтенброт Б.А., Барздин Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). – М.: Наука, 1970. – 400 с.
5. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
6. Huffman D.A. Canonical forms for information-loseless finite state logical machines // IRE Transactions Circuit Theory. Special Supplement. – 1959. – Vol. CT-6. – P. 41-59.
7. Even S. On information-loseless automata of finite order // IEEE Transactions on Electronic Computers. – 1965. – № 4. – P. 561-569.
8. Ambainis A., Freivalds R. 1-way quantum automata: strength, weakness and generalizations // Proceedings of the 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – 1998. – P. 332-341.
9. Belovs A., Rosmanis A., Smotrovs J. Multi-letter reversible and quantum finite automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – Vol. 4588. – P. 60-71.
10. Hromkovič J. One-way multihead deterministic finite automata // Acta Informatica. – 1983. – Vol. 19. – P. 377-384.
11. Rabin M.O. Probabilistic automata // Information and Control. – 1963. – № 3. – P. 230-245.

12. Paz A. Introduction to probabilistic automata. – NY.: Academic Press, 1971. – 228 p.
13. Бухараев Р.Г. Основы теории вероятностных автоматов. – М.: Наука, 1985. – 287 с.
14. Кемени Д.Д., Снелл Д.Л. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
15. Ambainis A. The complexity of probabilistic versus deterministic finite automata // Lecture Notes in Computer Science. – 1996. – Vol. 1178. – P. 233-237.
16. Freivalds R. Non-constructive methods for finite probabilistic automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – Vol. 4588. – P. 169-180.
17. Ожигов Ю.И. Квантовые вычисления. – М.: МГУ, факультет ВМиК, 2003. – 104 с.
18. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. – М.: Мир, 2006. – 824 с.
19. Moore C., Crutchfield J. Quantum automata and quantum grammars // Theoretical Computer Science. – 2000. – Vol. 237. – P. 257-306.
20. Brodsky A., Pipenger N. Characterizations of 1-way quantum finite automata // Journal of Computing. – 2002. – № 5. – P. 1456-1478.
21. Kondacs A., Watrous J. On the power of quantum finite state automata // Proceedings of the 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. – 1997. – P. 66-75.
22. Ambainis A., Kikusts A., Valdat M. On some class of languages recognizable by 1-way quantum automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2001. – Vol. 2010. – P. 75-86.
23. Mereghetti C., Palano B. On the size of one-way quantum finite automata with periodic behaviors // Theoretical Informatics and Applications. – 2002. – № 3. – P. 277-291.
24. Yakaryilmaz A. Exact quantum algorithm for promise problems in automata theory. <http://arhiv.org/abc/1101.3837>
25. Ambainis A., Nayak A., Ta-Shma A., Vazirani U. Dense quantum coding and a lower bound for 1-way quantum automata // Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory of Computation. – 1999. – P. 276-383.
26. Ambainis A., Beaudry M., Golovkins M., Kikusts A., Mercer M., Thrien D. Algebraic results on quantum automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2004. – Vol. 2996. – P. 93-104.
27. Freivalds R., Ozols M., Mančinskā L. Improved constructions of mixed state quantum automata // Theoretical Computer Science. – 2009. – Vol. 418. – P. 1923-1931.
28. Nayak A. Optimal lower bounds for quantum automata and random access codes // Proceedings of the 40th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. – 1999. – P. 369-377.
29. Aharonov D., Kitaev A., Nisan N. Quantum circuits with mixed states // Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computation. – 1998. – P. 20-30.
30. Bertoni A., Mereghetti C., Palano B. Quantum computing: 1-way quantum automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2003. – Vol. 2710. – P. 1-20.
31. Amano V., Iwama K. Undesidability on quantum finite automata // Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory of Computation. – 1999. – P. 368-375.
32. Dubrovsky A. Space-efficient 1.5-way Turing machine // Lecture Notes in Computer Science. – 2001. – Vol. 2138. – P. 380-383.
33. Freivalds R. Probabilistic two-way machines // Lecture Notes in Computer Science. – 1981. – Vol. 118. – P. 33-45.
34. Dwork C., Stockmeyer L. On the power of 2-way probabilistic finite-state automata // Proceedings of the 30th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. – 1989. – P. 480-485.
35. Ciamparra M.P. Quantum reversibility and a new model of quantum automaton // Lecture Notes in Computer Science. – 2001. – Vol. 2138. – P. 376-379.
36. Kravtsevs M. Quantum one counter automata // Lecture Notes in Computer Science. – 1999. – Vol. 1725. – P. 431-440.
37. Yamasaki T., Kobayashi H., Tokunaga Y., Imai H. One-way probabilistic reversible and quantum automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2000. – Vol. 1858. – P. 436-446.
38. Bonner R., Freivalds R., Kravtsevs M. Quantum versus probabilistic one-way finite automata with counter // Lecture Notes in Computer Science. – 2001. – Vol. 2234. – P. 181-190.
39. Yamasaki T., Kobayashi H., Imai H. Quantum versus deterministic counter automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2002. – Vol. 2387. – P. 584-594.

40. Qiu D.W. Characterization of sequential quantum machines // International Journal of Theoretical Physics. – 2002. – № 4. – P. 811-822.
41. Li L.Z., Qiu D.W. Determination of equivalence between quantum sequential machines // Theoretical Computer Science. – 2006. – Vol. 358. – P. 65-74.
42. Li L.Z., Qiu D.W. Determining the equivalence for one-way quantum automata // Theoretical Computer Science. – 2008. – Vol. 403. – P. 42-51.
43. Qiu D.W., Yu S. Hierarchy and equivalence of multi-letter quantum finite automata // Theoretical Computer Science. – 2009. – Vol. 410. – P. 3006-3017.
44. Qiu D.W., Li L., Zou X., Mateus P., Gruska J. Multi-letter quantum finite automata: decidability of the equivalence and minimization of states // Acta Informatika. – 2011. – Vol. 48. – P. 271-290.

V. G. Skobelev

Theory of finite quantum automata (survey).

In the given paper it is considered variety of models for quantum automata. There are extracted models, which are called finite quantum automata, as well as the ones which are not models for finite quantum automata (since they explore these or the other tools which are not used for classical finite-automata models). Basic results connected with analysis of equivalency of finite quantum automata are listed.

Keywords: *models of quantum automata, equivalency of finite quantum automata.*

В. Г. Скобелєв

Теорія скінченних квантових автоматів (огляд).

У роботі розглянуто різноманіття існуючих моделей квантових автоматів. Виділено моделі, які прийнято називати скінченними квантовими автоматами, а також моделі, що не є такими (оскільки засоби, які у них використано, не застосовуються для класичних скінченно-автоматних моделей). Наведено основні результати, пов'язані з аналізом еквівалентності скінченних квантових автоматів.

Ключові слова: *моделі квантових автоматів, еквівалентність скінченних квантових автоматів.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
skbv@iamn.ac.donetsk.ua

Получено 31.05.12