УДК 517.988.28

©2012. **П. А. Машаров**

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КРУГОВЫХ СЕКТОРОВ

Найдены значения наименьшего радиуса круга, в котором данные наборы множеств являются семействами Помпейю. В качестве наборов множеств рассматриваются различные совокупности круговых секторов. Построено семейство, радиус Помпейю для которого меньше минимального из радиусов Помпейю для каждого из множеств.

Ключевые слова: *множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, семейство Помпейю, радиус Помпейю для семейства, круговой сектор.*

Введение и формулировка основного результата. Всюду в работе через $\mathbb{R}^n$ обозначается вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Группу движений $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\mathbf{M}(n)$. $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющих A внутри B. $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ – шар радиуса R. Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathrm{L}_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B, если из того, что комплекснозначная $f \in \mathrm{L}_{loc}(B)$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$, следует, что f равна нулю почти всюду в B. Совокупность всех множеств Помпейю в B будем обозначать через $\mathrm{Pomp}(B)$.

Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией. Из результата Вильямса ([3]) следует, что если граница множества A липшицева, гомеоморфна сфере, но не вещественно аналитическая, то $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Если же некоторое множество $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, то возникает вопрос, для каких значений R будет $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$? Очевидно, что если для некоторого $r > 0$ множество $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_r)$, то для любого $R > r$ также $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. В связи с этим, в [4] поставлена

Проблема 1 (4.1.1 из [4], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathcal{P}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{P}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A. При этом если $A \notin \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, то считаем $\mathcal{P}(A) = +\infty$. Для любого $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ в [5] получена оценка сверху величины $\mathcal{P}(A)$. В [4-8] содержится достаточно полная история данного вопроса и близких к нему.

Рассмотрим теперь подобные вопросы для наборов множеств. Совокупность компактных множеств $\{A_1,\dots,A_m\} = \{A_j\}_{j=1}^m$ будем называть семейством Помпейю в B и обозначать $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathrm{Pomp}(B)$, если из того, что комплекснозначная $f \in \mathrm{L}_{loc}(B)$, для которой интегралы $\int_{\lambda A_j} f(x)\,dx = 0$ для всех $j = 1,\dots,m$ и $\lambda \in$

$\mathrm{Mot}(A_j, B)$, следует, что f равна нулю почти всюду в B.

Аналогично проблеме 1 возникает

Проблема 2. Для данной совокупности $\{A_j\}_{j=1}^m$ найти

$$\mathcal{P}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big) = \inf\{R > 0\colon \{A_j\}_{j=1}^m \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}.$$

Поставленная проблема не новая. Ее решение для совокупности из двух шаров содержится в [4, § 2.1.4].

В данной работе проблема 2 решена для некоторых семейств круговых секторов. Рассмотрим для $\alpha \in (0;\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, сектор единичного круга раствора α

$$\mathbb{S}(\alpha) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant |y| \operatorname{ctg}(\alpha/2)\big\}.$$

Для произвольного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и действительного числа $\mu > 0$ рассмотрим множество $\mu A = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x/\mu \in A\}$.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого набора* $\{\alpha_j\}_{j=1}^m \subset (0;\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ *имеет место*

$$\mathcal{P}\big(\{\mathbb{S}(\alpha_j)\}_{j=1}^m\big) = \mathcal{P}(\mathbb{S}(\alpha_{\min})),$$

где $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

Теорема 2. *Для любого* $\alpha \in (0; \arccos(20\sqrt{1762}/881))$

$$\mathcal{P}\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\pi/2)\}\big) = \sqrt{1762}/50.$$

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру (см., например, [4, 8]). Интерпретируя проблему в терминах комплексного анализа, в [9] впервые была получена теорема типа Мореры в единичном круге, где интегралы берутся по границам круговых секторов. Таким образом, там впервые было найдено значение величины $\mathcal{P}\big(\mathbb{S}(\alpha)\big)$ для всех $\alpha \in (0;\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

1. Общие замечания относительно величины $\mathcal{P}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big)$. Отметим, что если, по крайней мере, для одного $k \in 1, \ldots, m$ множество $A_k \in \mathrm{Pomp}(B)$, то все семейство $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathrm{Pomp}(B)$. Отсюда следует

Лемма 1. *Для любой совокупности множеств* $\{A_j\}_{j=1}^m$ *верно неравенство*

$$\mathcal{P}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big) \leqslant \min\{\mathcal{P}(A_1), \ldots, \mathcal{P}(A_m)\}.$$

При этом возникает вопрос, существует ли набор множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$, для которого неравенство в лемме 1 является строгим? Ниже будет доказана теорема 2, из чего следует, что ответ на поставленный вопрос положительный.

Также достаточно очевидными являются следующие утверждения.

Лемма 2. *Для любого $\mu > 0$ и компакта A имеет место равенство*

$$\mathcal{P}(\mu A) = \mu\mathcal{P}(A).$$

Лемма 3. *Пусть среди набора множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$ уникальными (всеми не повторяющимися) являются $\{A_{j_\nu}\}_{\nu=1}^k$ ($j_\nu \uparrow$, $k \leqslant m$). Тогда*

$$\mathcal{P}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big) = \mathcal{P}\big(\{A_{j_\nu}\}_{\nu=1}^k\big).$$

2. Преобразование Радона и важные примеры функций. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, достаточно быстро убывает на бесконечности, $l_{p,\theta}$ – прямая в $\mathbb{R}^2$, которая задается уравнением $x\cos\theta + y\sin\theta = p$, а $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$ – мера на ней. Тогда функция $\mathbf{R}_f(p,\theta) = \int_{l_{p,\theta}} f(x,y)\,ds$ называется преобразованием Радона от функции $f(x,y)$. Если функция f радиальна, то есть $f(x,y) = \widetilde{f}\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)$, то преобразование Радона от такой функции принимает вид $\mathbf{R}_f(p,\theta) = \mathbf{R}_{\widetilde{f}}(p) = \int_0^p \frac{\widetilde{f}(1/\sqrt{t})}{t^{3/2}}\frac{dt}{\sqrt{p-t}}$. Пусть $g(p) = \mathbf{R}_{\widetilde{f}}(p)$, тогда преобразование, обратное к $\mathbf{R}$, задается формулой $\widetilde{f}(\rho) = \rho^{3/2}\cdot\Big[\frac{g(0)}{\pi\sqrt{\rho}} + \int_0^\rho \frac{g'(t)}{\sqrt{\rho-t}}\,dt\Big]$.

Таким образом, если для произвольных a,b: $0 < a < b$ определить функцию

$$g_{a,b}(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \rho \leqslant a;\\ \exp\big(1/((\rho-b)(\rho-a))\big), & a < \rho < b;\\ 0, & b \leqslant \rho,\end{cases}$$

которая является бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$, то тогда не тождественно равная нулю функция $\Psi_{a,b}(\rho) = \rho^{3/2}\int_0^\rho \frac{g'_{a,b}(t)}{\sqrt{\rho-t}}\,dt$ – радиальна, бесконечно дифференцируема и имеет равное нулю преобразование Радона при $\rho \in [0,a] \cup [b,+\infty)$.

Рассмотрим для фиксированного $\varepsilon > 0$ функции

$$g_{1,\varepsilon}(\rho) = \begin{cases} \exp\left[1/(\rho^2 - \varepsilon\rho)\right], & \rho \leqslant \varepsilon;\\ 0, & \rho > \varepsilon,\end{cases} \quad \text{и} \quad g_{2,\varepsilon}(\rho) = \begin{cases} \exp\left[\rho^2/(\rho-\varepsilon)\right], & \rho \leqslant \varepsilon;\\ 0, & \rho > \varepsilon.\end{cases}$$

Обозначим $C_j = \int_{\mathbb{B}_\varepsilon} g_{j,\varepsilon}\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,dx\,dy$, $j = \overline{1,2}$. Тогда не тождественно равная нулю функция $\Phi_\varepsilon(\rho) = C_2 g_{1,\varepsilon}(\rho) - C_1 g_{2,\varepsilon}(\rho)$ – радиальна, бесконечно дифференцируема, имеет носитель в $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon}$, и для нее $\int_{\mathbb{B}_\varepsilon} \Phi_\varepsilon\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,dx\,dy = 0$.

3. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Для непустых $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathrm{Sh}(A,B) = \{h \in \mathbb{R}^n \colon A + h \subset B\}$. $\mathrm{SO}(n)$ обозначает группу вращений $\mathbb{R}^n$. Для $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$ положим $\mathbb{B}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a < |x| < b\}$.

Для $m \in \mathbb{N}$ и открытого непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка m которых (включая смешанные) непрерывны в B, $C(B)$ – класс непрерывных в B функций, $C^\infty(B) =$

$\cap_{m=1}^{\infty} C^m(B)$. Под $\mathfrak{P}(A,B)$ будем понимать класс функций из $\mathrm{L}_{loc}(B)$, для которых равенство $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ выполняется для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$. Также рассмотрим классы $\mathfrak{P}^m(A,B) = \mathfrak{P}(A,B) \cap C^m(A,B)$ $(m = 1,2,\ldots,\infty)$ и $\mathfrak{P}_0^m(A,B)$ – радиальных функций из $\mathfrak{P}^m(A,B)$, то есть таких f, для которых $f(\tau x) = f(x)$ для любого $\tau \in \mathrm{SO}(n)$. Еще рассмотрим подобные классы функций для совокупности множеств: $\mathfrak{P}^m\big(\{A_j\}_{j=1}^k, B\big) = \cap_{j=1}^k \mathfrak{P}^m(A_j,B)$ (здесь m или ничего, или $m = 1,2,\ldots,\infty$); $\mathfrak{P}_0^m\big(\{A_j\}_{j=1}^k, B\big)$ – радиальные функции из соответствующих классов.

Для непустого компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего A. Под Δ понимается, как обычно, оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Зафиксируем $\alpha \in (0;\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Рассмотрим вершины сектора $\mathbb{S}(\alpha)$: $z_1 = (0;0)$, $z_2 = (\cos(\alpha/2); -\sin(\alpha/2))$, $z_3 = (\cos(\alpha/2); \sin(\alpha/2))$ и отрезок, соединяющий z_1 и z_2: $l_\alpha = \big\{(t\cos(\alpha/2); t\sin(\alpha/2)) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$. Для $R > r^*(\mathbb{S}(\alpha))$ положим $\mathcal{U}(\alpha, R) = \big\{z = \lambda z_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}\big(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R\big), j = 1,2,3\big\}$.

Для доказательства основных утверждений нам будут необходимы некоторые утверждения, общие формулировки и доказательства которых можно найти в [4]. Приведем их здесь в соответствии с обозначениями, используемыми в данной работе, и применительно к рассматриваемым вопросам.

Лемма 4, 4.1.1 из [4]. *Пусть $R > r^*(A)$ и $\mathfrak{P}_0^\infty(A, \mathbb{B}_R) = \{0\}$. Тогда $\mathcal{P}(A) \leqslant R$.*

Лемма 5, следствие 4.5.1 из [4]. *Пусть $R > r^*\big(\mathbb{S}(\alpha)\big)$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta) f = 0$ в $\mathcal{U}(\alpha, R)$.*

Лемма 6, 4.5.6 из [4]. *Пусть $R > r^*\big(\mathbb{S}(\alpha)\big)$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $\int_{l_\alpha} \big(q(\Delta) f\big)(z+h)\,ds = 0$ для любого $h \in \mathrm{Sh}(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R)$.*

Лемма 7, 1.8.3 из [4]. *Пусть $R > 0$ и радиальная функция f интегрируемая в $\mathbb{R}^2$ такова, что ее преобразование Радона $\mathbf{R}_f(p,\theta) = 0$ для всех $\theta \in [0; 2\pi)$ и почти всех $p > R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_{R,\infty}$.*

Лемма 8, следствие из леммы 4.1.3 в [4]. *Пусть $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, $R > r^*(A)$ и для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$ и некоторого ненулевого многочлена $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta) f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Приведем также значение

$$\mathcal{P}\big(\mathbb{S}(\alpha)\big) = \begin{cases} 5/8, & \text{если } 0 < \alpha \leqslant \arccos(4/5), \\ 1/(2\cos\alpha), & \text{если } \arccos(4/5) < \alpha \leqslant \pi/4, \\ \sin\alpha, & \text{если } \pi/4 < \alpha \leqslant \pi/2, \\ 1, & \text{если } \pi/2 < \alpha < 2\pi,\ \alpha \neq \pi \end{cases}$$

и отметим, что функция $g(\alpha) = \mathcal{P}\big(\mathbb{S}(\alpha)\big)$ не убывает при $\alpha \in (0;\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Благодаря лемме 3 можно считать, что α_j попарно не равны. Тогда их можно упорядочить по возрастанию. Таким образом, считаем, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$. Поэтому $\alpha_{\min} = \alpha_1$.

Учитывая неубывание функции $\mathcal{P}\big(\mathbb{S}(\alpha)\big)$ по α и лемму 1, имеем $\mathcal{P}\big(\{\mathbb{S}(\alpha_j)\}_{j=1}^m\big) \leqslant \mathcal{P}(\mathbb{S}(\alpha_1))$. Таким образом, осталось доказать противоположное неравенство, то есть следующее утверждение: если $R < \mathcal{P}(\mathbb{S}(\alpha_1))$, то $\{\mathbb{S}(\alpha_j)\}_{j=1}^m \notin \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для этого рассмотрим два случая.

Пусть вначале $\alpha_1 \in (0; \arccos(4/5))$ и $R < 5/8$. Тогда для $a = \sqrt{R^2 - 0{,}25}$ и $b = 1 - R$ имеем $0 < a < b < R$, и ненулевая функция $f(x, y) = \Psi_{a,b}\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)$ из п. 2 удовлетворяет свойствам: $f \in C^\infty(\mathbb{B}_R)$, имеет носитель в $\overline{\mathbb{B}_b}$ и нулевые интегралы по всем прямым, находящимся на расстоянии $p \leqslant a$ от начала координат. Поскольку для любых $\alpha \in (0; 2\pi)$ и $\lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R)$ (в случае если последнее множество не пусто) сектор $\lambda\mathbb{S}(\alpha)$ так расположен в круге $\mathbb{B}_R$, что его вершины и криволинейная часть границы находятся вне $\mathbb{B}_b$, а прямолинейные отрезки границы пересекают $\overline{\mathbb{B}_a}$, то $\int_{\lambda\mathbb{S}(\alpha)} f(x, y)\,dx\,dy = 0$, и теорема в первом случае доказана.

Пусть теперь $\alpha_1 \in [\arccos(4/5); \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ и $R < \mathcal{P}\big(\mathbb{S}(\alpha_1)\big)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $\alpha \geqslant \alpha_1$ и $\lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R)$ круг $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \lambda\mathbb{S}(\alpha)$. Поэтому ненулевая функция $f(x, y) = \Phi_\varepsilon\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)$ удовлетворяет $\int_{\lambda\mathbb{S}(\alpha)} f(x, y)\,dx\,dy = 0$, и теорема доказана полностью. $\square$

Доказательство теоремы 2. Считаем $\alpha \in (0; \arccos(20\sqrt{1762}/881))$ фиксированным числом.

Докажем, что если $R > \sqrt{1762}/50$, то $\mathfrak{P}\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha),\ \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$. Используя стандартный метод сглаживания (см, например, §1.3.3 в [4]), видим, что достаточно доказать, что $\mathfrak{P}^\infty\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$. А используя рассуждения из доказательства леммы 4, получаем, что достаточно доказать равенство $\mathfrak{P}_0^\infty\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$.

Пусть $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big)$. Так как $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(\mathbb{S}(\pi/2), \mathbb{B}_R\big)$, то по лемме 5 существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(\pi/4, R) = \mathbb{B}_{a,R}$, где $a = \max\big\{0; 0{,}5\sqrt{2} - \sqrt{R^2 - 0{,}5}\,\big\}$. Учитывая, что $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(1{,}6\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R\big)$, при $R > \sqrt{1762}/50$ выполняется неравенство $0{,}5\sqrt{2} - \sqrt{R^2 - 0{,}5} < \sqrt{R^2 - 0{,}64}$, применяя леммы 6 и 7, получаем, что для некоторого ненулевого многочлена $q^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ верно $q^*(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Отсюда по лемме 8 получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.

Рассмотрим теперь $R < \sqrt{1762}/50$. Если какое-то из множеств $\mathrm{Mot}\big(1{,}6\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{B}_R\big)$ или $\mathrm{Mot}\big(\mathbb{S}(\pi/4), \mathbb{B}_R\big)$ пусто, то существование ненулевой функции в множестве $\mathfrak{P}\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha),\ \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big)$ следует из того, что $R < 1$ и значений $\mathcal{P}(1{,}6\mathbb{S}(\alpha)) = \mathcal{P}(\mathbb{S}(\pi/4)) = 1$. Если же оба эти множества не пусты, то для положительного $\varepsilon = \min\big\{0{,}5\sqrt{2} - \sqrt{R^2 - 0{,}5}; R\sin(\alpha - \arccos(0{,}8R^{-1}))\big\}$ ненулевая функция из п. 2 $f(x, y) = \Phi_\varepsilon\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big) \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(\{1{,}6\,\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\pi/2)\}, \mathbb{B}_R\big)$. $\square$

Отметим, что $\sqrt{1762}/50 \approx 0{,}84 < 1$; $\arccos(20\sqrt{1762}/881) \approx 17{,}65^\circ < \arccos(4/5)$. Таким образом, теорема 2 служит примером, когда неравенство в лемме 1 строгое.

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185-194.
2. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
3. *Williams S.A.* A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183-

190.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer, 2009. – 671 p.
6. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня. – № 1. – Вып. 12. – Киев. – 2001. – С. 51-79.
7. *Елец Л.В., Машаров П.А.* Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ. – Том. 61. – 2009. – С. 61-72.
8. *Машаров П.А.* Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163-171.
9. *Машаров П.А.* Новая теорема типа Мореры в единичном круге // Вісник Харківського національного університету. – 2000. – № 475, Серія "Математика, прикл. математика і механіка". – Вип. 49 – С. 126-132.

P. A. Masharov

A local version of the Pompeiu problem for a family of circular sectors.

The exact value for the smallest radius of the ball, in which the given family of sets is a Pompeiu family is obtained in the paper. The set family consists the circular sectors. The Pompeiu family for which the Pompeiu radius is smaller than the minimum of the Pompeiu radii for each set is constructed in the paper.

Keywords: *Pompeiu set, extremal version of the Pompeiu problem, Pompeiu family, family Pompeiu radius, circular sector.*

П. А. Машаров

Локальний варіант проблеми Помпейю для сім'ї кругових секторів.

Знайдено значення найменшого радіуса круга, в якому подані набори множин є сім'ями Помпейю. У якості наборів множин розглянуто різні сукупності кругових секторів. Побудовано сім'ю, радіус Помпейю якої менше ніж мінімальний серед радіусів Помпейю для кожної з множин.

Ключові слова: *множина Помпейю, екстремальний варіант проблеми Помпейю, сім'я Помпейю, радіус Помпейю для сім'ї, круговий сектор.*

Донецкий национальный ун-т
pavelmasharov@gmail.com

Получено 07.11.12