УДК 517.5

©2012. **Т. В. Ломако**

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Получена теорема замыкания и критерий компактности для классов регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на комплексный коэффициент.

Ключевые слова: *уравнения Бельтрами, дилатация, критерий компактности, регулярное решение, классы Соболева.*

1. Введение. Недавно был доказан целый ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами, см., например, монографию [1] и обзор [2], что открыло широкое поле исследований экстремальных задач в современных классах отображений на плоскости, см., например, монографию [3] и статью [4]. В теории экстремальных задач важную роль играют теоремы компактности. В предыдущей работе автора [5], см. также [6], были рассмотрены отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа и найдены достаточные условия компактности. В данной работе получены условия, которые являются не только достаточными, но и необходимыми для компактности классов отображений с интегральными ограничениями.

Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом* и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

– *максимальной локальной дилатацией* или просто *дилатацией* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$.

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$, см., например, I.1.6 в [7]. В дальнейшем гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п.в. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) п.в. в D. Функции μ и K_μ называются *комплексной характеристикой* и *дилатацией* отображения f. Отметим, что понятие регулярного решения впервые введено в работе [8].

Напомним также, что функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях*, пишут $f \in \mathrm{ACL}$, если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R, см., например, [9]. Известно, что $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{ACL}$ и частные производные локально интегрируемы в D, см., например, 1.1.3 в [10].

Далее через h обозначим *сферическое (хордальное) расстояние* между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$h(z_1,\,\infty) := \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, \qquad h(z_1,\,z_2) := \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}\,,\ z_1,\,z_2 \neq \infty\,.$$

В дальнейшем $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1+|z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$, соответственно, через L^1_S – класс всех функций $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. Через $\operatorname{mes} E$ обозначим меру Лебега множества $E \subseteq \mathbb{C}$. Положим также

$$S(E) = \int\limits_E dS(z)\,.$$

В дальнейшем *непрерывность* функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} := [0,\,\infty]$. Функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty\,, \tag{2}$$

см. [11], с. 37.

Пусть $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная функция, где $\mathrm{I} = [1,\,\infty]$. Обозначим через $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$, $M \geq 0$, класс всех регулярных решений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнений Бельтрами (1) с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \leq M$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Будем говорить, что функция $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет *экспоненциальный рост на бесконечности*, если

$$\Phi(t) \geq \beta e^{\gamma t}$$

для всех $t \geq T$ при некотором $T \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. В диссертации [12], см. теорему 8, а также в монографии [3], см. теорему 13.2, была доказана компактность классов H^{Φ}_M всех регулярных решений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с интегральными ограничениями вида

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dm(z) \leq M$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ при условии, что функция Φ непрерывна, выпукла, не убывает, имеет экспоненциальный рост на ∞ и $\inf \Phi = 0$.

В упомянутой выше работе [5], см. теорему 3, была установлена компактность класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ при условии, что функция $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ непрерывна, строго выпукла и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \ln \Phi(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau^2} = \infty \tag{3}$$

при некотором $\delta > \delta_0 := \sup\limits_{\substack{\tau \in \mathrm{I}, \\ \Phi(\tau)=0}} \tau$. Здесь мы доопределяем $\delta_0 = 1$, если $\Phi(\tau) > 0$ для всех $\tau \in \mathrm{I}$. Заметим, что выпуклая функция $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющая условию (3), удовлетворяет и условию (2). Этот факт легко устанавливается рассуждением от противного, пользуясь тем, что наклон $\Phi(t)/t$ не убывает для выпуклых функций Φ (см., например, предложение I.4.5 в [13]).

В настоящей работе показано, что указанные условия на функцию Φ с некоторым ослаблением условия непрерывности являются не только достаточными, но и необходимыми для компактности классов $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$. Здесь также доказана теорема замыкания.

2. Теорема замыкания. *Нижней огибающей* функции $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть функцию

$$\Phi_0(t) := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t), \ \ t \in \mathrm{I},$$

где Ψ – семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\varphi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \le \Phi(t)$, $t \in \mathrm{I}$. С подробным геометрическим описанием нижней огибающей можно ознакомится в диссертации [12], с. 132, и монографии [3], с. 297.

Из общих свойств выпуклых функций, см. [13], с. 56-66, получаем:

Предложение 1. Нижняя огибающая функции $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию $\Phi_0 : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t) < \infty} t, \tag{4}$$

и график которой лежит ниже графика Φ. При этом, $\Phi_0(t) \equiv \infty$ для всех $t > Q$ и $\Phi_0(t) < \infty$ для всех $t < Q$.

Предложение 2. Пусть $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ является выпуклой и удовлетворяет условию (3). Тогда ее нижняя огибающая $\Phi_0 : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ также удовлетворяет условию (3).

Доказательство. Пусть $Q = \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $Q < \infty$. Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [1, Q], \\ e^{t-Q} - 1, & t > Q\,. \end{cases}$$

Тогда φ принадлежит классу Ψ, который определяет Φ_0 и, следовательно, Φ_0 удовлетворяет (3) очевидным образом.

2) Пусть $Q=\infty$. В силу условия (3) и выпуклости Φ найдется $T\geq 1$ такое, что $\Phi(t)$ возрастает на $[T,\,\infty)$. Выберем $T^*\geq T$ так, чтобы

$$\Phi(T^*)=\Phi'(T^*)(T^*-T)\,. \tag{5}$$

В силу выпуклости и возрастания Φ такое T^* всегда существует (см., например, с. 43 в [14]).

Заметим, что при $t=T^*$ касательная к графику функции $\Phi(t)$ проходит через точку $(\Phi,\,t)=(0,\,T^*)$, что эквивалентно (5), и поэтому функция

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t\in[1,T],\\ \Phi'(T^*)(t-T), & t\in[T,T^*],\\ \Phi(t), & t\in[T^*,\infty]\end{cases}$$

принадлежит классу Ψ, который определяет Φ_0 и, следовательно, имеет место (3). $\Box$

Предложение 3. Пусть $\Phi:\mathrm{I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая выпуклая функция такая, что $Q<\infty$ и $\Phi(Q)<\infty$, где Q определено в (4). Тогда найдется последовательность непрерывных строго выпуклых функций $\Phi_m:\mathrm{I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\Phi_m(t)\leq\Phi(t)$ для всех $m=1,2,\ldots$ и $t\in\mathrm{I}$ и $\Phi_m(t)\to\Phi(t)$ при $m\to\infty$ для всех $t\in\mathrm{I}$.

Доказательство. Действительно, если $Q=1$ и $\Phi(1)<\infty$, то в качестве Φ_m можно взять последовательность функций $\Phi_m(t)=\Phi(1)+e^{mt}-e^m$. Пусть теперь $Q\in(1,\,\infty)$. Тогда найдется возрастающая последовательность точек $t_m\in(1,\,Q)$ такая, что $t_m\to Q$ при $m\to\infty$, в которых существуют производные $\Phi'(t_m)$, $m=1,2,\ldots$, см., например, следствие 2 в I.4.3 [13]. Полагаем, $\Phi_m(t)=\Phi(t)$, $t\in[1,\,t_m]$, $\Phi_m(t)=\Phi(t_m)+\Phi'(t_m)(t-t_m)$, $t\in(t_m,\,Q]$, и $\Phi_m(t)=\Phi(t_m)+\Phi'(t_m)(Q-t_m)+e^{mt}-e^{mQ}$ при $t\in(Q,\,\infty]$. Очевидно, что функции Φ_m непрерывны и строго выпуклы и, кроме того, $\Phi_m(t)\leq\Phi(t)$ для всех $m=1,2,\ldots$ и $t\in\mathrm{I}$, см., например, следствие 7 в I.4.3 [13]. Остается заметить, что $\Phi_m(t)\to\Phi(t)$ при $m\to\infty$ для всех $t\in\mathrm{I}$. $\Box$

Прототип следующей теоремы для функций Φ с экспоненциальным ростом на бесконечности можно найти в диссертации [12], теорема 7, и монографии [3], теорема 13.1.

Теорема 1. *Пусть для нижней огибающей $\Phi_0:\mathrm{I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ функции $\Phi:\mathrm{I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ выполнено условие вида (3). Тогда в топологии равномерной сходимости в $\overline{\mathbb{C}}$ относительно сферической метрики:*

$$\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}_M}\subseteq\mathfrak{F}^{\Phi_0}_M\qquad\forall\,M\in\mathbb{R}^+:=[0,\,\infty). \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, если $\Phi(t)\equiv\infty\equiv\Phi_0(t)$, то класс $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ пуст для любого $M\in\mathbb{R}^+$, а тогда включение (6) очевидно. Напомним также, что класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_M$ является компактным по теореме 3 из работы [5], если Φ_0 – непрерывная в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$. Если же $Q<\infty$ и $\Phi_0(Q)<\infty$, то это верно по предложению 3. Докажем на этой основе включение (6). Действительно, по определению нижней огибающей $\Phi_0(t) \le \Phi(t)$, $t \in \mathrm{I}$. Кроме того, в силу предложения 1, функция Φ_0 измерима по Борелю, т.е. прообраз всякого борелевского множества есть борелевское множество. Следовательно, Φ_0 суперпозиционно измерима, см., например, с. 84 в [15]. Таким образом, если K_μ – дилатация отображения $f \in \mathfrak{F}^{\Phi}_M$, то суперпозиция $\Phi_0(K_\mu(z))$ является измеримой функцией и $0 \le \Phi_0(K_\mu(z)) \le \Phi(K_\mu(z))$, т.е. $f \in \mathfrak{F}^{\Phi_0}_M$. Следовательно, $\mathfrak{F}^{\Phi}_M \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_0}_M$, а потому и $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}_M} \subseteq \overline{\mathfrak{F}^{\Phi_0}_M}$. Наконец, $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi_0}_M} = \mathfrak{F}^{\Phi_0}_M$ в силу компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_M$ и, таким образом, мы получаем (6). $\Box$

3. Критерий компактности. Для доказательства критерия компактности нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть для функции $\Phi : [1, Q] \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $1 < Q < \infty$, не выполнено хотя бы одно из условий: $\Phi(t)$ непрерывна, не убывает и выпукла на $[1, Q]$. Тогда найдется последовательность Q-квазиконформных отображений f_n, $n = 1, 2, \ldots$, плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, сходящаяся равномерно к Q-квазиконформному отображению f такая, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;<\; \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \tag{7}$$

для любого открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ с $\operatorname{mes}\Omega < \infty$ и любой равномерно непрерывной функции $\Psi(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ такой, что $1/\Psi(z)$ локально ограничено в $\mathbb{C}$. При этом, можно дополнительно предполагать, что

1) если существует пара точек $1 \le t_1 < t_2 \le Q$ и число $\lambda \in (0, 1)$, для которых $\lambda\,\Phi(t_1) + (1-\lambda)\,\Phi(t_2) < \Phi(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2))$, то

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; [\lambda\,\Phi(t_1) \;+\; (1-\lambda)\,\Phi(t_2)]\;\nu(\Omega)\,, \\ \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; \Phi(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2))\;\nu(\Omega)\,; \end{cases}$$

2) если существуют $1 \le t_1 < t_2 \le Q$, для которых $\Phi(t_2) < \Phi(t_1)$, то

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; \Phi(t_2)\;\nu(\Omega)\,, \\ \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; \Phi(t_1)\;\nu(\Omega)\,; \end{cases}$$

3) если функция $\Phi(t)$ не убывает и $\Phi(Q-0) < \Phi(Q)$, то

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; \Phi(Q-0)\;\nu(\Omega)\,, \\ \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, \Psi(z)\, dm(z) \;=\; \Phi(Q)\;\nu(\Omega)\,, \end{cases}$$

где

$$\nu(\Omega) \;=\; \int\limits_{\Omega} \Psi(z)\, dm(z)\,.$$

Доказательство. Ввиду леммы Фату и счетной аддитивности интеграла (см., например, теоремы I(12.7) и I(12.10) в [16]), утверждение достаточно доказать для ограниченных множеств Ω. На таком множестве по условию леммы функция $\Psi(z)$ ограничена сверху и $\Psi(z) \geq C > 0$ для всех $z \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать также, что правая часть в (7) конечна и, следовательно, конечна левая часть в (7) с $\Psi(z) \equiv 1$ в силу соотношения (19) из леммы 2 работы [17].

Пусть $K(z,\,h) \subset \Omega$ – квадрат с центром в точке z и длиной стороны h, ребра которого ориентированы параллельно осям координат. Из равномерной непрерывности $\Psi(z)$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $z,\, z' \in \Omega$ из того, что $z \in K(z',\,h)$, $h < \delta(\varepsilon)$, следует неравенство $|\Psi(z) - \Psi(z')| < \varepsilon$.

Система квадратов $K(z,\,h)$, $z \in \Omega$, $h < \delta(\varepsilon)$, образует покрытие множества Ω в смысле Витали и по теореме Витали (см., например, теорему IV(3.1) в [16]) можно выбрать последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m,\,h_m) \subseteq \Omega$, $m = 1,\,2, ...,$ из указанного покрытия такую, что $\mathrm{mes}\,\{\Omega \setminus \cup \mathrm{E_m}\} = 0$.

Согласно лемме 2 в [17], при $\varepsilon < C$, получаем, что

$$\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\Psi(\zeta)\,dm(\zeta) \;>$$

$$> (\Psi(z_m)+\varepsilon)\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,dm(\zeta) \;>$$

$$> (\Psi(z_m)+\varepsilon)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,dm(\zeta) \;>$$

$$> \overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right)\Psi(\zeta)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,dm(\zeta).$$

Из последнего неравенства, согласно счетной аддитивности интеграла и лемме Фату, имеем, что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right)(\Psi(z)+2\varepsilon)\;dm(z) \;> \overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\Psi(z)\,dm(z),$$

откуда в силу произвольного выбора ε получаем неравенство (7).

Наконец, пункты 1)-3) следуют, аналогично вышеприведенным рассуждениям, из пунктов 1)-3) леммы 2 в работе [17]. $\Box$

Для полноты изложения на основе леммы 1 сформулируем аналог леммы 2 из работы [17] в терминах сферической площади.

Лемма 2. *Пусть для функции* $\Phi : [1,\,Q] \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $1 < Q < \infty$, *не выполнено хотя бы одно из условий:* $\Phi(t)$ *непрерывна, не убывает и выпукла на* $[1,\,Q]$. *Тогда найдется последовательность* Q*-квазиконформных отображений* f_n, $n = 1, 2, \ldots,$

плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, сходящаяся равномерно относительно сферической метрики в $\overline{\mathbb{C}}$ к Q-квазиконформному отображению f такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,dS(z)\;<\;\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_f}(z))\,dS(z)$$

для любого открытого множества $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. При этом, можно дополнительно предполагать, что

1) если существует пара точек $1\le t_1<t_2\le Q$ и число $\lambda\in(0,\,1)$, для которых $\lambda\,\Phi(t_1)\;+\;(1-\lambda)\,\Phi(t_2)\;<\;\Phi(\lambda\,t_1+(1-\lambda)\,t_2))$, то

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,dS(z)=[\lambda\,\Phi(t_1)\;+\;(1-\lambda)\,\Phi(t_2)]\,S(\Omega)\,,\\ \int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_f}(z))\,dS(z)=\Phi(\lambda\,t_1+(1-\lambda)\,t_2))\,S(\Omega)\,;\end{cases}$$

2) если существуют $1\le t_1<t_2\le Q$, для которых $\Phi(t_2)<\Phi(t_1)$, то

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,dS(z)=\Phi(t_2)\,S(\Omega)\,,\\ \int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_f}(z))\,dS(z)=\Phi(t_1)\,S(\Omega)\,;\end{cases}$$

3) если функция $\Phi(t)$ не убывает и $\Phi(Q-0)<\Phi(Q)$, то

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,dS(z)=\Phi(Q-0)\,S(\Omega)\,,\\ \int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\mu_f}(z))\,dS(z)=\Phi(Q)\,S(\Omega)\,.\end{cases}$$

Наконец, приведем необходимые и достаточные условия компактности для классов $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$.

Теорема 2. *Пусть $\Phi:\mathrm{I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, $\Phi(\infty)=\infty$, удовлетворяет условию (3). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) классы $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ компактны в топологии равномерной сходимости в $\overline{\mathbb{C}}$ относительно сферической метрики;

2) функция Φ непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке Q из (4) и строго выпукла.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1). Если функция Φ непрерывна в точке Q, то класс $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ компактен прямо по теореме 3 работы [5]. Если же $Q<\infty$ и $\Phi(Q)<\infty$, то это последует опять же из теоремы 3 работы [5] на основе предложения 3.

1) $\Rightarrow$ 2). а) Предположим, что функция Φ не является выпуклой на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, т.е., существуют $t_l\in\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, $l=1,2$, $t_1<t_2$ и $\lambda\in(0,1)$ такие, что

$$\lambda\,\Phi(t_1)\;+\;(1-\lambda)\,\Phi(t_2)\;<\;\Phi(\lambda\,t_1+(1-\lambda)\,t_2))\;.$$

Тогда, согласно пункту 1) леммы 2, найдется последовательность квазиконформных отображений $f_n:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, которая сходится равномерно к квазиконформному отображению $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, dS(z) \;<\; \int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, dS(z)$$

и

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\, dS(z) = [\lambda\, \Phi(t_1) \;+\; (1-\lambda)\, \Phi(t_2)]\;\pi\,, \\ \int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_{\mu_f}(z))\, dS(z) = \Phi(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2))\;\pi\,. \end{cases}$$

Однако, это противоречит замкнутости и, следовательно, компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$ при $M = \pi\{\lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)\}$.

б) Пусть Φ не является неубывающей на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, т.е., найдутся точки t_1 и $t_2 \in \mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, $t_1 < t_2$ такие, что $\Phi(t_1) > \Phi(t_2)$. Тогда получаем противоречие аналогично пункту а) доказательства ввиду пункта 2) леммы 2.

в) Пусть Φ не является непрерывной слева в точке $\mathrm{T} := \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t < \infty$. Тогда получаем противоречие аналогично пункту а) доказательства ввиду пункта 3) леммы 2.

Наконец, пусть $T = \infty$ и Φ не является непрерывной слева в ∞, т.е. $\Phi(\infty - 0) < \infty$. Согласно п. а) и п. б) доказательства, мы можем предполагать, что Φ является неубывающей и выпуклой на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$. Мы также можем предполагать, что функцию Φ можно продолжить с I в $\overline{\mathbb{R}^{+}}$ согласно равенству $\Phi(t) \equiv \Phi(1)$ для всех $t \in [0,1)$. Таким образом, продолженная функция Φ является неубывающей и выпуклой (см., например, предложение I.4.8 в [13]). Поскольку Φ не является константой на I в силу условия (3), то $t_0 = \sup\limits_{\Phi(t)=\Phi(0)} t < \infty$, и выбирая $t_* \in (t_0, \infty)$, получаем, что

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} \;\geq\; \frac{\Phi(t_*) - \Phi(0)}{t_*} \;>\; 0 \qquad\qquad \forall\; t \in [t_*, \infty)$$

согласно выпуклости Φ (см., например, предложение I.4.5 в [13]), т.е., $\Phi(t) \geq at$ для $t \geq t_*$, где $a = [\Phi(t_*) - \Phi(0)]/t_* > 0$. Тогда $\Phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, т.е., Φ является непрерывной в ∞. $\square$

Замечание 1. Условие (3) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности и, следовательно, для компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$, если Φ непрерывна, выпукла и не убывает (см. теорему 5.1 в [18]).

В заключение отметим также, что теоремы компактности имеют важные приложения в теории экстремальных задач и теории вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Кроме того, в компактных классах отображений с интегральными ограничениями множество комплексных характеристик выпукло, что значительно упрощает построение вариаций, см., например, [3] и [4].

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics. – V. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.

2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вест. – 2010. – Т. 7, № 4. – С. 467-515; transl in J. Math. Sci. – 2011. – V. 175. – P. 413-449.
3. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.
4. *Гутлянский В.Я., Ломако Т.В., Рязанов В.И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вест. – 2011. – Т. 8, № 4. – С. 513-536.
5. *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. ж. – 2011. – Т. 63, № 3. – С. 341-349.
6. *Ломако Т.В.* Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Доповіді НАН України. – 2011. – № 5. – С. 28-31.
7. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.
8. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations – 2009. – V. 54, № 10. – P. 935-950.
9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
10. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
11. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
12. *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.01. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 1993. – 281 с.
13. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
15. *Халмош П.* Теория меры. – М.: ИЛ, 1953. – 291 с.
16. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 494 с.
17. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику Лаврентьева // Сиб. мат. ж. – 1990. – Т. 31, № 2. – С. 21-36.
18. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. ж. – 2011. – Т. 52, № 3. – С. 665-679.

T. V. Lomako

A criterion of compactness for one class of solutions to the Beltrami equations.

The theorem of closure and the criterion of compactness for classes of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the integral type for the complex coefficient are obtained.

Keywords: *Beltrami equations, dilatation, criterion on compactness, regular solution, Sobolev classes.*

Т. В. Ломако

Критерій компактності для одного класу розв'язків рівнянь Бельтрамі.

Отримано теорему замикання і критерій компактності для класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на комплексний коефіцієнт.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, дилатація, критерій компактності, регулярний розв'язок, класи Соболева.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`tlomako@yandex.ru`

Получено 28.11.12