УДК 517.55

©2012. **Ю. С. Коломойцев**

О КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Получены достаточные условия представления функций в виде интеграла Фурье в $\mathbb{R}^n$ от функции, принадлежащей пространству $L_1 \cap L_p$ при $0 < p < 2$. Эти условия даны в терминах совместного поведения "норм" функций из однородных пространств Бесова.

Ключевые слова: *интеграл Фурье, пространства L_p, $0 < p < 2$, пространства Бесова.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$ со скалярным произведением $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ и нормой $|x| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс непрерывных функций f таких, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Если

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{i(x,\xi)} dx, \qquad g \in L_1(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

то пишут $f \in A(\mathbb{R}^n)$. Задача о представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье имеет важное значение в разных вопросах анализа. Данная задача изучалась многими математиками (см., напр., [1-8] и монографию [9, гл. 6], в которых содержится ряд достаточных и необходимых условий принадлежности функции f пространству $A(\mathbb{R}^n)$).

В недавних работах [6] и [7] (см. также обзор [8, раздел 10]) были получены новые достаточные условия представления функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье в $\mathbb{R}^n$, а также показана применимость и точность полученных условий. Приведем здесь основной результат статьи [6].

Теорема A. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f \in C_0(\mathbb{R})$. Если $f \in L_{p_0}(\mathbb{R})$, $f' \in L_{p_1}(\mathbb{R})$ и*

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} > 1,$$

то $f \in A(\mathbb{R})$, *а при*

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1$$

такая функция может не принадлежать $A(\mathbb{R})$.

В настоящей работе изучаются классы функций f, для которых имеет место представление (1) при дополнительном предположении $g \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^n)$, где $0 < p < 2$. Точнее, мы будем изучать следующий класс функций:

$$A_p(\mathbb{R}^n) = \{\, f \,:\, f = \widehat{g}, \quad g \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^n)\,\},$$

где

$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{i(x,y)} dx$$

– преобразование Фурье функции g.

Отметим, что некоторые достаточные и необходимые условия принадлежности функций пространству $A_p(\mathbb{R}^n)$ содержатся в монографии [9, гл. 6]. Отметим также, что интегрируемая функция f принадлежит $A_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f} \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^n)$. Это свойство преобразования Фурье является основным инструментом, например, в теории мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D^n)$, $0 < p < 1$ (см. [9, гл. 7], [10]), а также при исследовании аппроксимации функций семействами линейных полиномиальных операторов, являющихся заменой средних Фурье в пространствах $L_p(\mathbb{T}^n)$, $0 < p < 1$ (см., напр., [11]). В настоящей работе мы обобщим теорему A, а также ее многомерный аналог на классы функций $A_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 2$. При этом мы также получим достаточные условия в терминах дробных производных.

2. Определения и обозначения. Мы будем использовать стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Формулировки основных теорем настоящей работы даны в терминах "норм" функций из однородных пространств Бесова $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Чтобы дать определение этих пространств введем в рассмотрение функцию $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \,:\, 1/2 \le |\xi| \le 2\}$, $\varphi(\xi) > 0$ при $1/2 < |\xi| < 2$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi \ne 0.$$

Введем также функцию φ_k соотношением

$$\widehat{\varphi}_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi).$$

Пусть

$$\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,:\, (D^\nu \widehat{\varphi})(0) = 0 \ \text{для всех} \ \nu \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}\},$$

а $\dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что $f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит однородному пространству Бесова $\dot{B}^s_{p,q}$, если

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(с обычной модификацией при $q = \infty$, т.е. $\|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{sk} \|\varphi_k * f\|_p$).

Напомним, что при $1 \le p < \infty$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\dot{W}^k_p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n) \,:\, \sum_{|\nu|_1 = k} \|D^\nu f\|_p < \infty\},$$

где производные $D^\nu f = \frac{\partial^{|\nu|_1} f}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$ ($|\nu|_1 = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, $\nu_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) понимаются в обобщенном смысле. Если $p = \infty$, то мы будем иметь дело с пространствами

$$\dot{C}^k(\mathbb{R}^n) = \{f \,:\, D^\nu f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ для всех } |\nu|_1 = k\},$$

при этом

$$\|f\|_{\dot{C}^k} = \sum_{|\nu|_1 = k} \|D^\nu f\|_\infty.$$

Здесь D^ν – классические производные.

Далее всюду буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров.

3. Формулировки результатов.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 2$, $0 < q_l, r_l \le \infty$, $\sigma_l < n(1/l - 1 + 1/q_l)$, $s_l > n(1/l - 1 + 1/r_l)$ *и* $\sigma_l < s_l$, *где* $l = 1, p$, *и функция* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что* $q_1 = r_1 = 2$ *или*

$$\frac{1-\theta_1}{q_1} + \frac{\theta_1}{r_1} > \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = \frac{n/2 - \sigma_1}{s_1 - \sigma_1}$$

и $q_p = r_p = 2$ *или*

$$\frac{1-\theta_p}{q_p} + \frac{\theta_p}{r_p} > \frac{1}{2}, \quad \theta_p = \frac{n(1/p - 1/2) - \sigma_p}{s_p - \sigma_p}.$$

Если, дополнительно, $f \in \dot{B}^{\sigma_l}_{q_l,\infty} \cap \dot{B}^{s_l}_{r_l,\infty}$, $l = 1, p$, *то* $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

В случае $p = 1$, используя вложения между пространствами Бесова и пространствами риссовых потенциалов (см., напр., [12, с. 188]), получаем:

Следствие 1. *Пусть* $0 < q \le \infty$, $1 < r < \infty$, $s > n/r$ *и функция* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что* $q = r = 2$ *или*

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right)\frac{1}{q} + \left(\frac{n}{2s}\right)\frac{1}{r} > \frac{1}{2}.$$

Если, дополнительно, $f \in L_q$, *а* $(-\Delta)^{s/2} f \in L_r$, *то* $f \in A(\mathbb{R}^n)$.

Легко видеть, что при $s=n=1$ получаем основной результат работы [6], а при $q=r=2$ – известную теорему типа Берлинга (см. [1] и [2]).

В следующем предложении показана точность полученных утверждений.

Предложение. Пусть $0<p<2$, $1\le q_l,r_l\le\infty$, $\sigma_l,s_l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\sigma_l<n(1/l-1+1/q_l)$, $s_l>n(1/l-1+1/r_l)$ и $\sigma_l<s_l$, где $l=1,p$. Если

$$\frac{1-\theta_1}{q_1}+\frac{\theta_1}{r_1}<\frac{1}{2}\,,\quad \theta_1=\frac{n/2-\sigma_1}{s_1-\sigma_1} \tag{2}$$

или

$$\frac{1-\theta_p}{q_p}+\frac{\theta_p}{r_p}<\frac{1}{2}\,,\quad \theta_p=\frac{n(1/p-1/2)-\sigma_p}{s_p-\sigma_p},$$

то найдется функция $f\in C_0\cap\dot{B}^{\sigma_l}_{q_l,\infty}\cap\dot{B}^{s_l}_{r_l,\infty}$, $l=1,p$, но $f\notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

4. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $\{e_j^0\}_{j=1}^n$ стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, а через

$$\Delta^m_{u_j}f(x)=\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}(-1)^kf(x+(2k-m)u_je_j^0)$$

– m-ую симметричную разность по j-й переменной с шагом u_j. Тогда $\Delta^m_{u_1,\cdots,u_n}f(x)=(\prod_{j=1}^n\Delta^m_{u_j})f(x)$ – смешанная разность.

Следующая лемма играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть $0<p<2$ и $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$. Если при некотором $m\in\mathbb{N}$*

$$\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{s_n=-\infty}^{\infty}2^{(1-\frac{l}{2})|s|_1}\|\Delta^m_{\frac{\pi}{2^{s_1}},\cdots,\frac{\pi}{2^{s_n}}}(f)\|_2^l<\infty,\quad l=1,p,$$

то $f\in A_p(\mathbb{R}^n)$.

Здесь и далее $|s|_1=s_1+\cdots+s_n$.

Лемма 1 при $p=1$ доказана в [4, лемма 4], а также в [5, теорема 3]. Общий случай $p\in(0,2)$ доказан в [9, теорема 6.4.2].

Приведем теперь некоторые известные факты об однородных пространствах Бесова. Прежде всего, дадим одно эквивалентное определение этих пространств (см., напр., [12, с. 188] или [13, с. 343]).

Лемма 2. *Пусть $1\le p\le\infty$, $0<q\le\infty$ и $s>0$. Если $m\in\mathbb{N}$ и $m>s$, то*

$$\|f\|^*_{\dot{B}^s_{p,q}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{-sq}\sup_{|t|\le|h|}\|\Delta^m_{t_1,\ldots,t_n}(f)\|_p^q\frac{dh}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

является эквивалентной квазинормой в $\dot{B}^s_{p,q}$ (с обычной модификацией при $q=\infty$).

Отметим, что в [12, с. 188] и [13, с. 343] данная лемма рассматривается только в случае $1\le q\le\infty$. Если $0<q<1$ доказательство леммы проходит по той же схеме, что и в [12, с. 184] с учетом очевидных изменений, которые касаются специфики случая $0<q<1$.

Мы будем использовать следующие вложения для пространств Бесова (см., напр., [11, с. 346] и [3, гл. 3 и гл. 11]).

Лемма 3. *(i) Пусть* $0 < p_0 \le p_1 \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_1 \le s_0$ *и* $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$. *Тогда*

$$\dot{B}^{s_0}_{p_0,q} \subset \dot{B}^{s_1}_{p_1,q}.$$

(ii) Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $1 \le p < \infty$. *Тогда*

$$\dot{W}^k_p \subset \dot{B}^k_{p,\infty} \quad \text{и} \quad \dot{C}^k \subset \dot{B}^k_{\infty,\infty}.$$

Здесь и далее символ $\subset$ обозначает непрерывное вложение.

Чтобы показать точность основного результата статьи нам понадобится следующая функция-мультипликатор

$$m_{\alpha,\beta}(x) = \rho(x)\frac{e^{i|x|^\alpha}}{|x|^\beta},$$

где ρ является C^∞-функцией на $\mathbb{R}^n$, равной 0 при $|x| \le 1$ и 1 при $|x| \ge 2$, а $\alpha, \beta > 0$. Отметим, что функция $m_{\alpha,\beta}$ была предметом специального изучения в работах [14-17] и [18, гл. 4, 7.4].

Доказательство утверждений следующей леммы см. в [17, предложение 5.1] (см. также [14] и [16]).

Лемма 4. *Пусть* $\alpha, \beta > 0$ *и* $\alpha \ne 1$.

(i) Функция $m_{\alpha,\beta} \in A(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta > \frac{n\alpha}{2}$.

(ii) Если $\beta > \frac{n\alpha}{2}$ *и* $m_{\alpha,\beta} = \widehat{K_{\alpha,\beta}}$, *то при* $\alpha > 1$

$$|K_{\alpha,\beta}(x)| \asymp |x|^{\frac{\beta-n+n\alpha/2}{1-\alpha}}, \quad |x| \to \infty,$$

а при $\alpha < 1$

$$|K_{\alpha,\beta}(x)| \asymp |x|^{\frac{\beta-n+n\alpha/2}{1-\alpha}} + \gamma(x), \quad |x| \to 0,$$

где функция $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *и* $\gamma(x) \ge 0$.

В частности, если $0 < p < 2$ *и* $(\alpha - 1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \ge \frac{\beta}{n} - \frac{1}{2}$, *то* $m_{\alpha,\beta} \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что достаточные условия принадлежности функции $m_{\alpha,\beta}$ пространству $A_p(\mathbb{R}^n)$ сразу вытекают из теоремы 1 и леммы 3(ii).

5. Доказательства результатов.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что если $f \in C_0 \cap \dot{B}^{n(\frac{1}{l}-\frac{1}{2})}_{2,l}$, $l = 1, p$, то $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, используя леммы 1 и 2, находим

$$\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{s_n=-\infty}^{\infty} 2^{(1-\frac{l}{2})|s|_1}\|\Delta^m_{\frac{\pi}{2^{s_1}},\cdots,\frac{\pi}{2^{s_n}}}(f)\|_2^l =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\max s_i=k} 2^{(1-\frac{l}{2})|s|_1}\|\Delta^m_{\frac{\pi}{2^{s_1}},\cdots,\frac{\pi}{2^{s_n}}}(f)\|_2^l \le$$
$$\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{n(1-\frac{l}{2})k}\sup_{|h|\le\frac{\pi}{2^k}}\|\Delta^m_{h_1,\cdots,h_n}(f)\|_2^l \le$$
$$\le C\|f\|^l_{\dot B_{2,p}^{n(1/l-1/2)}}.$$

Таким образом, для того, чтобы доказать принадлежность функции f классу $A_p(\mathbb{R}^n)$, достаточно проверить, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{n(1-\frac{l}{2})k}\|\varphi_k * f\|_2^l = \sum_{k=0}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{-1} = S_1^{(l)} + S_2^{(l)} < \infty, \quad l = 1, p. \tag{3}$$

Мы проверим (3) только для $l = 1$. При $l = p$ выполнимость условия (3) проверяется аналогичным образом.

Далее для простоты записи положим $\sigma_1 = \sigma$, $s_1 = s$, $q_1 = q$ и $r_1 = r$.

1) Рассмотрим сначала случай $0 < q, r \le 2$. Пусть $s' = s - n(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$. Используя вложение $\dot B^s_{r,\infty} \subset \dot B^{s'}_{2,\infty}$ (см. лемму 3 (i)), находим

$$\begin{aligned} S_1^{(1)} &\le \sup_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{s'j}\|\varphi_j * f\|_2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{2}-s')k} \le \\ &\le \|f\|_{\dot B^{s'}_{2,\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{r}-s)k} \le C\|f\|_{\dot B^s_{r,\infty}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогичным образом, используя вложение $\dot B^\sigma_{q,\infty} \subset \dot B^{\sigma'}_{2,\infty}$, где $\sigma' = \sigma - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$, получаем

$$S_2^{(1)} \le C\|f\|_{\dot B^\sigma_{q,\infty}}. \tag{5}$$

Объединяя (4) и (5), имеем (3) при $l = 1$.

2) Рассмотрим случай $0 < q < 2 < r \le \infty$. Сумма $S_2^{(1)}$ оценивается так же, как в (5).

Оценим сумму $S_1^{(1)}$. Обозначая $\lambda = \frac{r(2-q)}{2(r-q)}$ и применяя неравенство Гельдера, находим

$$S_1^{(1)} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}k} \|\varphi_k * f\|_q^{1-\lambda} \|\varphi_k * f\|_r^{\lambda} \le$$
$$\le \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\sigma j}\|\varphi_j * f\|_q\right)^{1-\lambda} \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj}\|\varphi_j * f\|_r\right)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{2}-(1-\lambda)\sigma-\lambda s)k} = \tag{6}$$
$$= \|f\|_{\dot B^{\sigma}_{q,\infty}}^{1-\lambda} \|f\|_{\dot B^{s}_{r,\infty}}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{qr(s-\sigma)}{r-q}(\frac{1}{2}-(1-\theta_1)\frac{1}{q}-\theta_1\frac{1}{r})k} \le C\|f\|_{\dot B^{\sigma}_{q,\infty}}^{1-\lambda} \|f\|_{\dot B^{s}_{r,\infty}}^{\lambda}.$$

Таким образом, объединяя (5) и (6), снова получаем (3) с $l = 1$.

3) Случай $2 < q \le \infty$, $0 < r < 2$ доказывается аналогично. $\square$

Доказательство предложения. Мы ограничимся случаем $p = 1$. При $0 < p < 2$ доказательство аналогично. Как и в приведенном выше доказательстве положим $\sigma_1 = \sigma$, $s_1 = s$, $q_1 = q$ и $r_1 = r$.

В качестве функции, удовлетворяющей условиям предложения, рассмотрим функцию $f = m_{\alpha,\beta}$.

Используя вложения из леммы 3 (ii), нетрудно проверить, что $f \in \dot B^{\sigma}_{q,\infty} \cap \dot B^{s}_{r,\infty}$, если

$$\begin{cases} \beta - \sigma(\alpha-1) > \frac{n}{q}, \\ \beta - s(\alpha-1) > \frac{n}{r}. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть ε' и ε'' – некоторые достаточно малые положительные числа. Положим

$$\alpha = \frac{s - \frac{n}{r} + \frac{n}{q} - \sigma + \varepsilon' - \varepsilon''}{s-\sigma}$$

и

$$\beta = \frac{n(\frac{s}{q} - \frac{\sigma}{r}) + \varepsilon' s - \varepsilon'' s}{s-\sigma}.$$

Варьируя соответствующим образом ε' и ε'', можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства (7) и $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \ne 1$.

Далее, из (2) и (7) имеем

$$\frac{\alpha n}{2} > \beta - ((1-\theta_1)\varepsilon' + \theta_1\varepsilon'').$$

Следовательно, мы можем выбрать α и β так, чтобы $\frac{\alpha n}{2} > \beta$. В этом случае, в силу леммы 4 (i), $f \notin A(\mathbb{R}^n)$. $\square$

1. *Beurling A.* Sur les integrales de Fourier absolument convergentes et leur application à fonctionelle Proc. IX Congrès de Math. Scand. (Helsingfors, 1938) – P. 345-366.
2. *Löfström J.* Besov spaces in the theory of approximation // Ann. Mat. Pura Appl. – 1970. – **85**. – P. 93-184.
3. *Peetre J.* New Thoughts on Besov Spaces. – Durham, NC: Duke University Press, 1976.
4. *Тригуб Р.М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат. – 1980. – **44**, №6. – С. 1378-1408.

5. *Бесов О.В.* К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье // Тр. МИАН. – 1986. – **173**. – С. 3–13.
6. *Liflyand E.* On absolute convergence of Fourier integrals // Real Anal. Exchange. – 2010. – **36**, №2. – P. 353-360.
7. *Kolomoitsev Yu., Liflyand E.* Sufficient conditions for absolute convergence of multiple Fourier integrals // ArXiv: http://arxiv.org/abs/1108.5470v. – 2010.
8. *Liflyand E., Samko S. and Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Anal. Math. Phys. – 2012. – **2**, №1. – P. 1-68.
9. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer-Springer, 2004.
10. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, №4. – С. 145-160.
11. *Rukasov V.I., Runovski K.V., Schmeisser H.-J.* // On convergence of families of linear polynomial operators. – Funct. Approx. Comment. Math. – 2009. – **41**, № 1. – P. 41-54.
12. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980.
13. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986.
14. *Wainger S.* Special trigonometric series in k-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – **59**. – 1965.
15. *Fefferman Ch.* Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators // Acta Math. – 1970. – **124** – P. 9-36.
16. *Miyachi A.* On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. – 1980. – **27**. – P. 157–179.
17. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. – 1981. – **28**. – P. 267–315.
18. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973.

Yu. S. Kolomoitsev

On a class of functions representable as a Fourier integral.

The sufficient conditions for the representation of functions as an Fourier integral in $\mathbb{R}^n$ of a function belonging to the space $L_1 \cap L_p$ for $0 < p < 2$ are obtained. These conditions are given in terms of the simultaneous behavior of the "norms" of functions in homogeneous Besov spaces.

Keywords: *Fourier integral, the spaces L_p, $0 < p < 2$, Besov spaces.*

Ю. С. Коломойцев

Про клас функцій, зображуваних у вигляді інтеграла Фур'є.

Отримано достатні умови зображення функцій у вигляді інтеграла Фур'є в $\mathbb{R}^n$ від функції, що належить простору $L_1 \cap L_p$ при $0 < p < 2$. Ці умови подано в термінах спільної поведінки "норм" функцій із однорідних просторів Бєсова.

Ключові слова: *інтеграл Фур'є, простори L_p, $0 < p < 2$, простори Бесова.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomus1@mail.ru

Получено 17.10.12