ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2012. Том 25

УДК 517.5

©2012. **А. Ю. Иванов**

НОВЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ МНОЖЕСТВА КЛАССУ БОРСУКА

Получены новые достаточные условия возможности разбиения ограниченного множества на $n+1$ часть меньшего диаметра. Таким образом, уточняется класс множеств, для которых имеет место гипотеза К.Борсука.

Ключевые слова: *выпуклое множество, множество постоянной ширины, множество точек нерегулярности границы, диаметр, разбиение множеств на части меньшего диаметра.*

1. Введение. В 1933г. польский математик К.Борсук выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза К.Борсука. Всякое ограниченное множество $F \subset \mathbb{R}^n$ можно разбить на $n+1$ часть строго меньшего диаметра.

Гипотеза была доказана в $\mathbb{R}^2$ самим К.Борсуком в 1933г. [1, 2], а в $\mathbb{R}^3$ Г.Эгглстоном [3] в 1955г. и позднее передоказана Б.Грюнбаумом [4], А.Хеппешом [5] в 1957г. Тем не менее, в пространствах размерности выше третей данная гипотеза не подтверждена до сих пор.

В 1991г. Дж.Кан и Г.Калаи построили первый контрпример к гипотезе [6]. Они показали, что во всех размерностях больше 2014 существует тело, для которого предположение Борсука не верно. Затем последовала серия работ по строительству контрпримеров в пространствах более низких размерностей. Последний результат в этом направлении был получен А.Хинрихсом и Х.Рихтером в 2003г. [7]. Они показали, что такие котрпримеры существуют во всех пространствах $\mathbb{R}^n$, при $n \geq 298$.

Таким образом, вести речь о доказательстве гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^n$ для произвольных множеств не имеет смысла. Ввиду этого на первый план выходит вопрос описания класса множеств, для которых гипотеза К.Борсука справедлива.

В 1946г. Г.Хадвигер обратил внимание на возможность применения сферического отображения Гаусса для изучения гипотезы Борсука на множествах с гладкой границей. К.Ф.Гаусс построил это отображение в 1816г. (см., например, [8]). Оно было необходимо для изучения кривизны гладкой поверхности, так как обладает замечательным свойством – для гладких поверхностей его якобиан равен гауссовой кривизне поверхности в данной точке. При помощи данного отображения Г.Хадвигер доказал, что любое ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой поверхностью можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра [9]. Из этого утверждения видно, что наибольшую трудность в плане разбиения на части меньшего диаметра создают именно нерегулярные точки на границе множества.

После результата Г.Хадвигера последовал ряд работ, уточняющий класс множеств для которых гипотеза Борсука справедлива. Среди них следует отметить результаты Андерсона и Кли 1952г. [10], В.Г.Болтянского 1960г. [11]. Автором данной статьи разработан метод, основанный на использовании аналога сферического отображения типа Гаусса, который позволил распространить результат Г.Хадвигера на некоторые множества с нерегулярной границей [12]. Результаты, полученные в статье [12] существенно уточняют класс множеств, для которых гипотеза Борсука справедлива.

В данной статье при помощи метода, разработанного в [12], получены новые достаточные условия на множество из $\mathbb{R}^n$, позволяющие утверждать, что данное множество можно разбить на $n+1$ часть строго меньшего диаметра.

2. Основной результат. Сформулируем основной результат данной статьи. Для этого понадобятся некоторые дополнительные построения. Определим функцию $\chi : G \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, G – множество постоянной ширины, следующим образом. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров множества G, проходящих через точку x. Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$.

Обозначим множество точек нерегулярности границы множества G через $EP(G)$ ("essential points"), тогда $EP(G) = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$. Введем также множество $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP(G)\}$.

Построим сферическое отображение типа Гаусса $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial G$, где $\mathbb{S}^{n-1}$ – сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1, G – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим

$$\varsigma(\theta) = x, \text{ где } x, y \in \partial G, |x-y| = diamG \text{ и } x - y = \theta diamG, \tag{1}$$

т.е. x, y – диаметральные точки G в направлении θ.

Теорема 2.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины. Тогда, если существует подпространство U размерности $n-1$ такое, что $\Theta \bigcap U = \emptyset$, то множество G можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Теорема 2.1 отражает набор ограничений, накладываемых на множество точек нерегулярности границы исходного множества постоянной ширины G, достаточных для того, чтобы на данном множестве выполнялась гипотеза Борсука.

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего введем используемые далее обозначения. Для $a, b \in \mathbb{R}^n$ символ (a, b) обозначает скалярное произведение векторов a и b. Пусть F – множество из $\mathbb{R}^n$, тогда его замыкание, множество его внутренних точек и его границу будем обозначать $cl(F)$, $int(F)$ и ∂F, соответственно. Отметим, что для любого ограниченного множества $F \subset \mathbb{R}^n$

$$diamF = diamcl(F) = \max_{x,y \in \partial F} |x-y|,$$

т.о., в дальнейшем работа осуществляется с классом замкнутых множеств.

Рассмотрим некоторые вспомогательные результаты.

Пусть F – множество постоянной ширины 1. Изучим основные свойства функции $\varsigma(\theta) : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial F$, введенной в (1).

Свойство 1. Для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существует единственное $x \in \partial F$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. Из определения множеств постоянной ширины следует, что для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существуют $x, y \in \partial F$ такие, что $|x-y| = 1$ и $x - y = \theta$.

Допустим, что существует $x_1 \in \partial F : \varsigma(\theta) = x_1 \neq x$. Тогда из (1) следует, что также существует $y_1 \in \partial F : x_1 - y_1 = \theta$, откуда получаем $y_1 \neq y$. Так как $x_1 \neq x$, то $|x - x_1| = \delta > 0$, значит $|y - y_1| = \delta$. Тогда, учитывая равенства $|x - y| = 1$ и $|x_1 - y_1| = 1$, из неравенства треугольника имеем $|x - y_1| > |x - y| = 1$. Получили противоречие, поскольку $diamF = 1$. $\square$

Свойство 2. Для любого $x \in \partial F$ существует $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. Из свойств опорных гиперплоскостей, построенных к множеству постоянной ширины, следует, что для всех $x \in \partial F$ существует такой $y \in \partial F$, что $|x-y| = 1$, тогда $(x-y) \in \mathbb{S}^{n-1}$ и из (1) находим $\varsigma(x-y) = x$. Теперь достаточно положить $\theta = x - y$. $\square$

Свойство 3. ς – непрерывна на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из непрерывности изменения диаметральных точек при выборе опорных плоскостей в множествах постоянной ширины [1].

Свойство 4. Пусть M – компакт из $\mathbb{S}^{n-1}$, тогда $\varsigma(M)$ – компакт из ∂F.

Это утверждение является очевидным следствием непрерывности отображения ς.

Введем функцию $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ такую, что

$$\chi^*(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\varsigma(\theta)), \tag{2}$$

где функция $\chi : F \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ определена в начале параграфа.

Лемма 3.1. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины 1, тогда для всех $x \in F$ выполняется неравенство $\chi(x) \geq 1$.*

Доказательство. Введем опорную функцию $\delta^* : F \to R^1$ такую, что $\delta^*(x) = \sup\limits_{y \in F} |x - y|$. Тогда для любого $x \in F$ существует $\mu \leq 1$ такое, что $\delta^*(x) = \mu$. Таким образом, существует $z \in \partial F$, для которого выполняется равенство $|z - x| = \mu$.

Рассмотрим n-мерный шар $B_\mu(x) = \{y||y - x| \leq \mu\}$. Так как $\delta^*(x) = \mu$, то $F \subseteq B_\mu(x)$. Проведем касательную $(n-1)$-мерную гиперплоскость X к $B_\mu(x)$ через точку z, тогда $(z - x)$ является нормальным вектором к X.

Так как $X \cap F = z$, то X – опорная гиперплоскость к множеству F [1]. Значит, $\exists w \in F : |z-w| = 1$ и $(z-w)$ – нормальный вектор к X, тогда точка x принадлежит прямой, проходящей через точки z, w. Лемма доказана. $\square$

Определение 3.1. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, будем называть дугой $\breve{\theta_1\theta_2}$ – криволинейный отрезок наименьшей длины, соединяющий точки θ_1, θ_2 по $\mathbb{S}^{n-1}$.

Лемма 3.2. *Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такие, что $\varsigma(\theta_1) = \varsigma(\theta_2)$, тогда для любого $\theta \in \breve{\theta_1\theta_2}$ выполняется $\varsigma(\theta) = \varsigma(\theta_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим двумерную плоскость $X \subset \mathbb{R}^n$ такую, что точки $0, \theta_1, \theta_2 \in X$. Пусть $T = \mathbb{S}^{n-1} \cap X$, тогда T является двумерной окружностью такой, что $\theta_1, \theta_2 \in T$. Пусть также дана двумерная плоскость $P \subset \mathbb{R}^n$, параллельная плоскости X. Построим ортогональную проекцию K множества F на плоскость P. По теореме Минковского кривая ∂K является кривой постоянной ширины $diamF$.

Рассмотрим множество $\varsigma(T) = \{x \in \partial F | x = \varsigma(\tau), \tau \in T\}$. Учитывая, что $dimT = 2$, становится очевидным факт, что ортогональная проекция множества $\varsigma(T)$ на плоскость P совпадает с множеством ∂K.

Введем вспомогательную функцию $\varsigma^* : T \longrightarrow \partial K$ такую, что для всех $\tau \in T$ точка $\varsigma^*(\tau)$ является ортогональной проекцией $\varsigma(\tau)$ на плоскость P.

Пусть даны числа $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Введем параметризацию $\theta(t)$ окружности T, для которой выполняются следующие условия. Для всех $t \in [a; b)$ верно $\theta(t) \in T$; для всех $\theta \in T$ существует единственное $t \in [a; b)$ для которого $\theta(t) = \theta$; $\theta(a_1) = \theta_1, \theta(a_2) = \theta_2, \theta(a_3) \in \breve{\theta_1\theta_2}$, где $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ связаны соотношением $a < a_1 < a_3 < a_2 < b$.

Допустим, что существует такое $t_0 \in (a_1; a_2)$, для которого $\varsigma(\theta(t_0)) \neq \varsigma(\theta_1)$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $\varsigma^*(\theta(a_1)) = \varsigma^*(\theta(a_2)) \neq \varsigma^*(\theta(t_0))$. Ввиду непрерывности функции ς, а значит и ς^* получаем, что кривая ∂K имеет самопересечение. Это невозможно, так как она является кривой постоянной ширины.

2) $\varsigma^*(\theta(a_1)) = \varsigma^*(\theta(a_2)) = \varsigma^*(\theta(t_0))$. Это означает, что ортогональные проекции на плоскость P точек $\varsigma(\theta(a_2))$ и $\varsigma(\theta(t_0))$ совпадают. Так как ∂K – кривая постоянной ширины, то для всех $\tau \in T$ существуют $x, y \in \partial K$ такие, что $|x - y| = diamF$ и $x - y = \tau diamF$. При этом из построения множества ∂K и определения функций ς, ς^* следует, что $\varsigma^*(\tau) = x$. Значит существует $y \in K$, для которого верно $|\varsigma^*(\theta(t_0)) - y| = diamF$ и $\varsigma^*(\theta(t_0)) - y = \theta(t_0) diamF$. Тогда $-\theta(t_0) diamF = y - \varsigma^*(\theta(t_0)).$

Рассмотрим точку $\varsigma(-\theta(t_0)) \in \partial F$. Так как ее ортогональная проекция на плоскость P находится на расстоянии равном $diamF$ от проекции точки $\varsigma(\theta(t_0)) \in \partial F$, то $\varsigma(\theta(t_0)), \varsigma(-\theta(t_0))$ принадлежат некоторой двумерной плоскости P', параллельной плоскости P. Учитывая, что ортогональные проекции на плоскость P точек $\varsigma(\theta_2)$ и $\varsigma(\theta(t_0))$ совпадают, получаем, что вектор $\varsigma(\theta_2) - \varsigma(\theta(t_0))$ ортогонален вектору $\varsigma(-\theta(t_0)) - \varsigma(\theta(t_0))$. Тогда $|\varsigma(-\theta(t_0)) - \varsigma(\theta_2)|^2 = |\varsigma(\theta(t_0)) - \varsigma(-\theta(t_0))|^2 + |\varsigma(\theta(t_0)) - \varsigma(\theta_2)|^2 = = (diamF)^2 + |\varsigma(\theta(t_0)) - \varsigma(\theta_2)|^2 > (diamF)^2$. Поскольку точки $\varsigma(-\theta(t_0))$ и $\varsigma(\theta_2)$ принадлежат F, полученное неравенство противоречиво.

Таким образом, не существует такого $t_0 \in (a_1; a_2)$, для которого $\varsigma(\theta(t_0)) \neq \varsigma(\theta_1)$, то есть для всех $\theta \in \breve{\theta_1\theta_2}$ выполняется $\varsigma(\theta) = \varsigma(\theta_1)$. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины 1, тогда для любого $x \in \partial F$, либо $\chi(x) = 1$, либо $\chi(x) = \infty$.*

Доказательство непосредственно следует из Лемм 3.1, 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины 1, $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial F$ и $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ – функции, заданные в (1) и (2). Пусть также $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – компактное множество такое, что $diamX < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$. Тогда $diam\varsigma(X) < 1$, где $\varsigma(X) = \{x | x = \varsigma(\alpha), \alpha \in X\}$.*

Доказательство. Предположим, что $diam\varsigma(X) = 1$. Тогда существуют $x, y \in \varsigma(X)$ такие, что $|x - y| = 1$. Из определения множества $\varsigma(X)$ получаем, что $\exists \theta, \beta \in X : \varsigma(\theta) = x$ и $\varsigma(\beta) = y$.

Если $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = 1$, то из (1) следует, что $x - y = \theta$ и $y - x = \beta$. Значит,

$\theta = -\beta$, тогда $|\theta - \beta| = |\theta - (-\theta)| = 2$. Это противоречит условию $diamX < 2$.

Если $\chi^*(\theta) = \infty, \chi^*(\beta) = 1$, положим $M = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = x\}$. Из леммы 3.2 заключаем, что M – связное, а так как X – замкнутое и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$, то $M \subset X$. Так как $y - x = \beta$ равносильно $x - y = (-\beta)$, то из (1) $(-\beta) \in M$, значит $(-\beta) \in X$. Таким образом, β и $(-\beta)$ принадлежат X, что означает $|\beta - (-\beta)| = 2$. Получили противоречие с $diamX < 2$.

Аналогично в случае $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = \infty$, положим $M = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = x\}$,$K = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = y\}$. Так как $|y - x| = 1$, то $(y - x), (x - y) \in \mathbb{S}^{n-1}$, значит $(y - x) \in K$, а $(x - y) \in M$.Аналогично предыдущему случаю $K, M \subset X$, таким образом $(x - y), (y - x) \in X$, но $|(y - x) - (x - y)| = 2|x - y| = 2$. Получили противоречие.

Лемма доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины, L – множество всех компонент связности множества Θ. Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in L$:

$$\sup_{\alpha,\beta \in U} |\alpha - \beta| < \sqrt{2} - \varsigma_1$$

при некотором $\varsigma_1 > 0$, не зависящем от U;

(ii) если $U, V \in L$ и $U \backslash \tilde{V} \neq \emptyset$, и $\tilde{V} \backslash U \neq \emptyset$, где $\tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$, то $int(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, ..., Y_n \subset G$ такие, что $diamY_i < diamG, i = \overline{0, n}$ и $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Подробное доказательство теоремы 3.2 представлено в статье автора [12].

4. Доказательство теоремы 2.1. Не теряя общности, будем считать, что диаметр рассматриваемого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ равен единице.

Пусть $\theta_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ будет ортогонально к подпространству U, то есть для всех $\alpha \in U$ выполняется соотношение $(\alpha, \theta) = 0$. Так как по условию теоремы $\Theta \bigcap U = \emptyset$, то для всех $\theta \in U \bigcap \mathbb{S}^{n-1}$, согласно следствию 3.1 , верно $\chi^*(\theta) = 1$.

Построим систему векторов $\theta_i \in \mathbb{S}^{n-1}, i = \overline{2, n}$ так, что для всех $1 \leq i, j \leq n$ выполняется $(\theta_i, \theta_j) = 0$, тогда, ввиду того, что подпространство U имеет размерность $n - 1$, получаем, что $\theta_i \in U, i = \overline{2, n}$, а значит $\chi^*(\theta_i) = 1$. Введем декартову систему координат с направляющими ортами $\theta_i, i = \overline{1, n}$. Это возможно, так как данная система векторов является нормальной ортогональной системой векторов.

В случае, если $\Theta = \emptyset$, то тогда множество G удовлетворяет условиям теоремы 3.2, а, значит, его можно разбить на $n + 1$ часть меньшего диаметра.

Допустим, что $\Theta \neq \emptyset$, тогда введем постоянную

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in \Theta, \theta \in U \bigcap \mathbb{S}^{n-1}} |\alpha - \theta|, \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Обозначим множество $X(\theta_1, G, \varepsilon_1) = \{\alpha \in \mathbb{S}^{n-1} | (\alpha, \theta_1) \geq \varepsilon_1\}$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$, тогда $\alpha_1 \geq \varepsilon_1 \beta_1 \geq \varepsilon_1$. $|\alpha - \beta|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i -$

$\beta_i)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i = 2 - 2(\alpha_1, \beta_1) - 2\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i\beta_i \leq \leq 2 - 2\varepsilon_1^2 + 2 = 4 - 2\varepsilon_1^2$, последнее неравенство сразу следует из того, что для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^{n-1}$ имеет место соотношение $-1 \leq (\alpha, \beta) \leq 1$. Из полученного неравенства следует, что $diamX(\theta_1, G, \varepsilon_1) < 2$. Из выбора постоянной ε_1 и следствия 3.1 следует, что для всех $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ таких, что $-\varepsilon_1 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_1$, выполняется $\chi^*(\beta) = 1$. Так как для любого $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \partial X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$ верно $\beta_1 = \varepsilon_1$, значит $\chi^*(\beta) = 1$. Используя по отношению к множеству $X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$ лемму 3.3 , получаем, что $diam\varsigma(X(\theta_1, G, \varepsilon_1)) < diamG$.

Пусть, также, $X(\theta_i, G, \varepsilon_1) = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1} | \alpha_i \geq \varepsilon_1, \alpha_1 \leq \varepsilon_1\}$. Таким образом, $X(\theta_i, G, \varepsilon_1) \cap X(\theta_1, G, \varepsilon_1) \subseteq \partial X(\theta_1, G, \varepsilon_1), i = \overline{2, n}$.

Аналогично множеству $X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$ диаметр $diamX(\theta_i, G, \varepsilon_1) < 2$, $i = \overline{2, n}$. Рассмотрим теперь значение функции χ^* на множестве точек $\partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$. Если для всех $\alpha \in \partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$ функция $\chi^*(\alpha) = 1$, то, используя лемму 3.3, получаем, что $diam\varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) < 1$. Теперь допустим, что это не так, то есть что существует такое $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1) : \chi^*(\alpha) = \infty$, тогда из определения множества $X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$ и правила выбора постоянной ε_1 следует, что $\alpha_1 < -\varepsilon_1$. Так как $\chi^*(\alpha) = \infty$, то существует такая компонента связности V множества Θ множества G, что $\alpha \in V \subset L$. Пусть $x \in \partial G$ такой, что $\varsigma(\alpha) = x$, тогда для всех $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in V$ получаем $\varsigma(\beta) = x$. Рассмотрим множество $Y = \{y \in \partial G || x - y| = diamG\}$ и покажем, что $Y \cap \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \emptyset$. Прообразом множества Y функции ς является множество $\{-\beta | \beta \in V\}$, а так как $-\beta = (-\beta_1, -\beta_2, ..., -\beta_n)$ и $\beta \in X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$, что означает $\beta_1 \leq \varepsilon_1$, к тому же в виду выбора постоянной ε_1 получаем $\{\beta | -\varepsilon_1 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_1\} \cap \Theta = \emptyset$, то $-\beta_1 > \varepsilon_1$. Таким образом, $\{-\beta | \beta \in U\} \cap \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \emptyset$, что и означает искомое утверждение. Значит множества $\varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1))$ не содержат в себе пар диаметральных точек множества G, откуда и следует, что $diam\varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) < 1, i = \overline{2, n}$.

Наконец рассмотрим множество $X_0 = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$. Таким образом, $X_0 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1} | \alpha_i \leq \varepsilon_1, i = \overline{1, n}\}$.

Покажем, что $diamX_0 < 2$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in X_0$ такие, что $|\alpha - \beta| = 2$, тогда, так как $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^{n-1}$, получаем $\alpha = -\beta$. Из определения множества X_0 следует:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\beta_i \leq \varepsilon_1, \\ \beta_i = -\alpha_i \leq \varepsilon_1, \\ i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

то есть $-\varepsilon_1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq \varepsilon_1$, учитывая, что $|\alpha| = 1$ и определение ε_1:

$$|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1^2 = n\varepsilon_1^2 \leq \frac{n}{(n+1)^2} \leq 1.$$

Получили противоречие, значит действительно $diamX_0 < 2$.

Рассматривая значения функции χ^* на множестве точек ∂X_0 аналогично множествам $X(\theta_i, G, \varepsilon_1), i = \overline{2, n}$, можно показать, что $diam\varsigma(X_0) < 1$.

Таким образом, построили систему множеств $X_0 \bigcup\limits_{i=1}^{n} X(\theta_i, G, \varepsilon_1) = \mathbb{S}^{n-1}$ таких, что $diam\varsigma(X_0) < 1$, $diam\varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) < 1, i = \overline{1, n}$. Из первого и второго свойств отображения ς следует, что $\varsigma(X_0) \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \partial G$. Значит удалось разбить границу множества на $n+1$ часть, каждая из которых имеет диаметр меньше исходного множества, тогда имеет место аналогичное разбиение всего исходного множества G. $\square$

1. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел // Москва: Наука, 1971. – С. 96.
2. *Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц.* Разбиение фигур на меньшие части // London: Math. Soc., 1955. – С. 88.
3. *Eggleston H.G.* Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter // Москва: Наука. – 1971. – **30,** № 1 – С. 11-24.
4. *Grünbaum B.* A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions // Cambridge: Philos. Soc. – 1957. – **53,** – С. 776-778.
5. *Heppes A.* Terbeli ponthalmazok felosztasa kisebb atrneröjü részhalmazok összegére // Magyar tud. aka. Mat. és fiz tud. oszt. közl. – 1957. – **7,** № 3-4. – С. 413-416.
6. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc.(New Ser.) – 1993. – **29,** №1. – С. 60-62.
7. *Hinrichs A., Richter C.* New sets with large Borsuk numbers // http: www.minet.uni-jena.de/hinrichs/paper/18/borsuk.pdf
8. *Гаусс К.Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях // Сб.: Об основаниях геометрии. – М. – 1956.
9. *Hadwiger H.* Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. – 1945/46. – **18**. – С. 73-75.
10. *Anderson R.D., Klee V.L.* Convex functions and upper semi-continuous collections // Duke Math.J. – 1952. – **190**, № 2. – С. 349-357
11. *Болтянский В.Г.* Задача об освещении границы выпуклого тела // Изв. МФАН СССР. – 1960. – **10** (76).
12. *Иванов А.Ю.* Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – **23**. – С. 110-119.

A. Yu. Ivanov

New sufficient conditions for a set of belonging to Borsuk's class.

Obtained new sufficient conditions for the possibility of decomposition of bounded set on $n+1$ parts of smaller diameter. Thus class of sets for which there is a hypothesis K.Borsuka had detailed.

Keywords: *convex set, a constant width's set, set of irregular's points of boundary, splitting sets into parts of smaller diameter.*

О. Ю. Іванов

Нові достатні умови належності множини до класу Борсука.

Отримано нові достатні умови можливості розбиття обмеженої множини на $n+1$ частину меншого діаметра. Таким чином, уточнюється клас множин, для яких має місце гіпотеза К.Борсука.

Ключові слова: *опукла множина, множина постійної ширини, множина точок нерегулярності межі, розбиття множин на частини меншого діаметра.*

Донецкий национальный ун-т
sejang@ua.fm

Получено 29.11.12