УДК 517.951

©2012. **А. А. Зарецкая**

О СВЯЗИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ И ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА ИЗ ГЕОМЕТРИИ

В работе показана связь между классической задачей Штейнера из геометрии и единственностью решения однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны в эллипсе. На основании найденной связи получен числовой критерий периодичности процесса Штейнера.

Ключевые слова: *процесс Штейнера, процесс Джона, задача Дирихле.*

1. Введение. Исследования А. Губера [16] и затем Д. Барджина и Р. Даффина [15] привели к получению условия нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq X\}$. Оказалось, что единственность решения такой задачи в классических пространствах нарушается тогда и только тогда, когда отношение T/X – рационально. В этих работах использовался метод разложения решения в ряд Фурье. В работе Ф. Джона [17] исследовалась проблема нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны в общей плоской ограниченной области, выпуклой относительно обоих семейств характеристик, в связи с некоторым отображением границы области в себя (называемым характеристическим биллиардом, см. ниже), использованным ранее в указанной работе А. Губера. Наблюдения за отмеченной связью продолжили Р.А. Александрян и его ученики, ориентируясь на задачу С.Л. Соболева о колебаниях поверхности полости жидкости в летящем теле [1], [2], [3]. В.И. Арнольд в работе [4] указал на связь указанной задачи Дирихле в эллипсе с проблемой малых знаменателей в контексте влияния на гладкость решения скорости приближений некоторого числа, связанного с задачей рациональными числами. Некоторым вопросам этой тематики посвящены исследования Ю.М. Березанского [5], сибирских математиков Т.И. Зеленяка [10], М.В. Фокина [13], и др. Заметим, что в работе Ф. Джона [17] указывается на условие нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в виде рациональности числа вращения Донжуа-Пуанкаре указанного выше отображения границы (см. определение числа вращения отображения в книге [11]). Отметим, что впервые связь между нетривиальной разрешимостью задачи Дирихле для уравнения колебания струны с геометрической задачей (а именно, с известной задачей Понселе) наблюдалась в работе [8]. В настоящей работе мы переносим рассуждения последней работы на случай задачи Штейнера.

2. Отображение Джона. Опишем характеристический биллиард (впервые описанный в работе [17]).

Возьмем произвольную точку M_1 на кривой C, проведем через нее вертикальную прямую линию, которая пересечет кривую C еще в одной точке, назовем ее M_2. Обозначим через I_1 такое отображение из C в C, которое осуществляет переход от

M_1 к M_2 (т.е. при таком отображении сохраняется абсцисса точки). Через точку M_2 проведем горизонтальную прямую линию, которая пересечет кривую C в еще одной точке, скажем M_3. Обозначим через I_2 переход от M_2 к M_3 (т.е. сохраняется ордината точки). Композиция $T = I_2 I_1, T : C \to C$ называется отображением Джона. Точка M называется периодичной, если $T^n M = M, n \geq 2$.

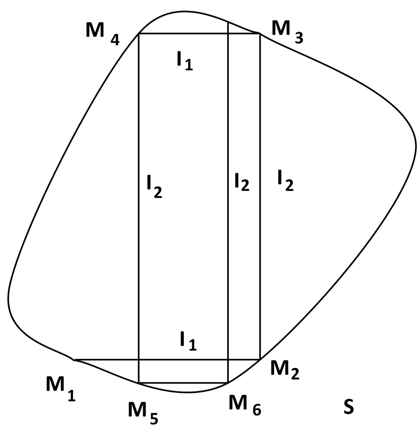

Рис. 1. Отображение Джона

Под характеристическим биллиардом понимается дискретная динамическая система, порожденная отображением T.

Рассмотрим теперь однородную задачу Дирихле для уравнения колебания струны

$$u_{xy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_C = 0 \tag{2}$$

в плоской ограниченной области, выпуклой относительно семейств характеристик уравнения, т.е. вертикальные и горизонтальные линии пересекают C не более чем в двух точках ограниченной замкнутой жордановой кривой C.

Утверждение 1. [17]. *Если множество периодических точек отображения T на кривой C пусто, конечно или счетно, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение. Если кривая C – эллипс, то это условие является еще и достаточным.*

3. Поризм Штейнера. Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух произвольных окружностей A_1 и B_1 на плоскости S_1, B_1 лежит внутри A_1. Пусть $\{C_1\}$ – множество окружностей, касающихся A_1 и B_1 и лежащих между ними. Они могут пересекаться или касаться. Возьмем произвольную точку Q_1 на окружности A_1, а из множества $\{C_1\}$ возьмем такую окружность C_1^1, которая проходит через эту точку. Затем выбирается $C_1^2 \in \{C_1\}$, касающаяся $\{C_1^1\}$. Далее выбираем $C_1^3 \in \{C_1\}$, которая касается $C_1^2 \in \{C_1\}$. Процесс выбора последовательности окружностей продолжается в том же духе и называется процессом Штейнера. Он имеет период $n >= 2$, если $C_1^{n+1} = C_1^1$. Либо можно говорить, что точка Q_1 называется периодичной, если $C_1^{n+1} = C_1^1, n \geq 3$.

Утверждение 2. Альтернатива Штейнера. [9], [12], [14]. *При процессе Штейнера все точки периодичны, либо все непериодичны. (Ясно, что периодичность не зависит от выбора начальной точки.)*

Более подробно опишем процесс Штейнера. Зафиксируем произвольную окружность C_1^1 и точку пересечения C_1^1 с A_1 – Q_1, а точку пересечения окружности C_1^1 с B_1 назовем P_1. Аналогично определяем точки Q_i, и P_i на A_1 и B_1, соответственно. Пусть q_i обозначает параметр точки Q_i на окружности A_1, а p_i – параметр точки P_i

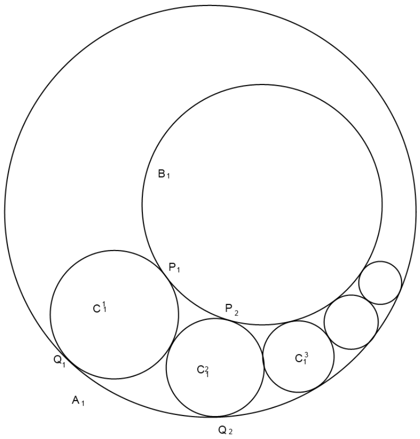

Рис. 2. Отображение Штейнера

на окружности B_1. Строим отображение $U_A : A_1 \to A_1$, которое действует по правилу $U_A : q_k \to q_{k+1}$, и отображение $U_B : B_1 \to B_1$, которое действует по правилу $U_B : p_k \to p_{k+1}$. Более того, так как, по построению, эти два отображения неразрывно связаны друг с другом, можно говорить, что нам заданы два преобразования $I_A, I_B : \tilde{C} \to \tilde{C}$. Здесь $\tilde{C} = \{(q,p) : Q, P \text{лежат на соседних окружностях из } \{C_1\}\}$, т.е. $\tilde{C}$ – это кривая, абсциссы точек которой есть параметр окружности A_1, а ординаты – есть параметр окружности B_1, причем эти два параметра достаточно жестко связаны. I_A, I_B действуют по правилам $I_A : (q_i, p_i) \to (q_{i+1}, p_i), I_B : (q_{i+1}, p_i) \to (q_{i+1}, p_{i+1})$ (т.е. I_B сохраняет абсциссу точки, а I_A сохраняет ординату точки). Отображения I_A, I_B генерируют композицию $U = I_B I_A$, которая, подобно отображению Джона T, является преобразованием кривой $\tilde{C}$ в себя. Понятно, что отображение U_B генерирует дискретную динамическую систему на B_1. Орбита этой системы есть множество точек $P_i, i = ... - 1, 0, 1, 2..., P_i = U_B^{i-1} P_1$. То же самое можно сказать о U_A.

4. Основной результат. Здесь мы по произвольно заданным двум окружностям A_1 и B_1 строим такую кривую, для которой процесс Джона эквивалентен процессу Штейнера для исходных A_1 и B_1.

Работать с произвольными окружностями достаточно неудобно, поэтому мы покажем, что без потери общности можно свести две произвольные окружности A_1 и B_1 к двум окружностям специального вида. Выберем систему координат таким образом, чтобы A_1 стала единичной окружностью с центром в начале координат, а центр B_1 лежал на оси абсцисс в точке $(d, 0)$, причем радиус B_1 назовем r. Отождествляя вещественную плоскость с полем комплексных чисел, будем применять поочередно дробно-линейные преобразования плоскости.

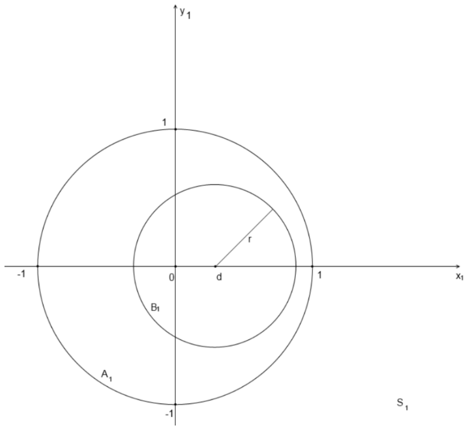

Рис. 3. A1 и B1

Применим инверсию $D_1 : S_1 \to S_2$ относительно окружности A_1, которая переводит две окружности A_1 и B_1 в окружности A_2, B_2. A_1=A_2, центр B_2 лежит на оси абсцисс. Очевидно, что радиус окружности B_2 будет не единичным. Простые вычисления показывают, что радиус окружности B_2 равен $\frac{r}{d(d+r)}$, а центр окружности находится в точке $(\frac{1}{d}, 0)$.

Покажем, что существует такое дробно-линейное отображение $D_2 : S_2 \to S_3$, которое переводит две окружности A_2 и B_2 в произвольные равновеликие окружности A_3, B_3, которые не пересекаются и не содержатся одна в другой. Утверждаем, что такое отображение – инверсия относительно окружности радиуса c и с центром в точке $(x_0, 0)$. При такой инверсии центр окружности A_3 находится в точке $(x_0 - \frac{c^2 x_0}{x_0^2}, 0)$, а произвольная точка на окружности A_2, например, $(1, 0)$ перейдет в точку с координатами $(x_0 + \frac{c^2(1-x_0)}{(1-x_0)^2}, 0)$. Можно вычислить радиус окружности A_3:

$$R_1 = \frac{c^4}{(1 - 2x_0 + x_0^2)x_0^2}.$$

Аналогично вычисляем, что радиус окружности B_3 равен

$$R_2 = \frac{(d^2r^2c^4)(4r^2 + d^2 - 2x_0d^3 + x_0^2d^4 + 4rd - 6rx_0d^2 - 4r^2x_0d + 2x_0^2d^3r + x_0^2d^2r^2)}{(x_0^2d^2 - 2x_0d + 1)}. \tag{3}$$

Мы хотим добиться того, чтобы радиусы окружностей A_3 и B_3 были бы одинаковыми, и, по возможности, единичными. Приравняв два радиуса, получим уравнение относительно неизвестного параметра x_0. Нам достаточно знать хотя бы одно решение, например, такое:

$$\left(\frac{rd + d^2 - \sqrt{r}\sqrt{d}\sqrt{-d^2 - rd + d + 2r}}{d(-r + d^2 + rd)}, 0\right). \tag{4}$$

Подбором свободного параметра c можно сделать окружности A_3 и B_3 единичными. Мы показали, что существует такая окружность, инверсия относительно которой и есть искомое отображение D_2.

Очевидно, с помощью поворота ($D_3 : S_3 \to S_4$) можно перевести окружности A_3 и B_3 в A и B так, что центры A и B будут находиться на оси ординат на одинаковом расстоянии от нуля. При таких преобразованиях множество окружностей $\{C_1\}$ перейдет в множество окружностей $\{C\}$, центры которых лежат на оси абсцисс. Составим уравнение, которое связывает параметр на нижней окружности A и параметр на верхней окружности B. Выберем окружности C_1 и C_2 из множества $\{C\}$, соединим центры этих окружностей с центрами верхней и нижней окружностей. Пусть $2h$ – расстояние между центрами A и B. Отметим, что h зависит от начальных данных r и d, эту связь мы найдем позже. Обозначим через t – радиус окружности C_1, через e – радиус окружности C_2, u – расстояние от центра C_1 до начала координат, v – расстояние от центра C_2 до начала координат. Если считать, что t – это параметр на окружности B, а e – параметр на окружности A, то процесс Штейнера состоит в сопоставлении параметру t параметра e для соприкасающихся окружностей C_1 и C_2.

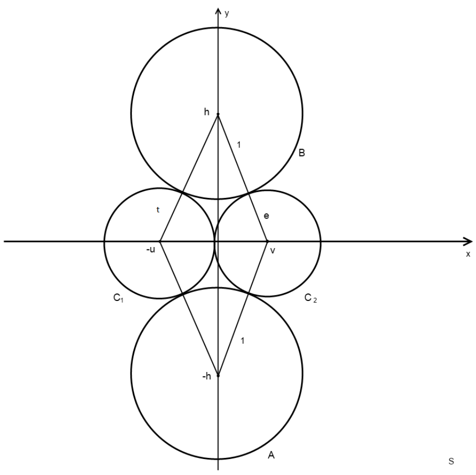

Рис. 4. A, B, C1, C2

Из геометрических соображений ясно, что

$$(e + 1)^2 = v^2 + h^2, (t + 1)^2 = u^2 + h^2, t + e = v + u. \tag{5}$$

Пусть, например, окружность C_2 вынуждена "поглотить" окружности A, B и C_1 для того, чтобы их касаться. Тогда вышеописанные геометрические соображения

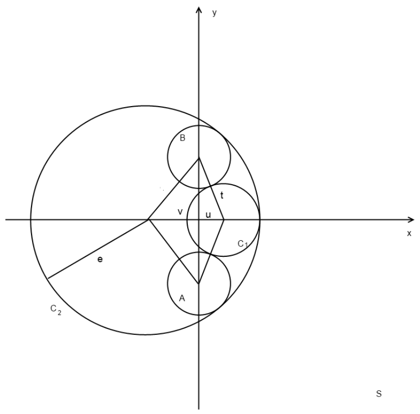

Рис. 5. A, B, C1, C2

приводят к таким соотношениям:

$$(e'-1)^2 = v'^2 + h^2, (t'+1)^2 = u'^2 + h^2, -t' + e' = v' + u'. \tag{6}$$

Однако, видно, что замена $e' = -e, v' = -v, t' = t, u' = -u$ снова приведет нас к равенствам (5). Из (5) простыми вычислениями можно прийти к следующей связи:

$$h^2(t+e)^2 - 4te(t+e+1) = 0. \tag{7}$$

Кривая (7) – есть некоторая кривая на плоскости. Дробно-линейным преобразованием, а именно

$$e = \frac{h^2-1}{1+e_1}, t = \frac{h^2-1}{1+t_1} \tag{8}$$

можно свести кривую (7) к эллипсу Ω. Уравнение эллипса будет выглядеть так:

$$h^2(h^2-1)^2 t_1^2 + h^2(h^2-1)^2 e_1^2 + 2(h^6 - 4h^4 + 5h^2 - 2)e_1 t_1 - 4h^6 + 12h^4 - 12h^2 + 4 = 0. \tag{9}$$

Естественно, необходимо найти параметр h, используя заданные величины r и d. После всех преобразований две точки $(0,0)$ и $(d,0)$ на исходной плоскости S_1 перейдут в точки $D_3(D_2(D_1(0,0)))$ и $D_3(D_2(D_1(d,0)))$ на плоскости S. А расстояние между двумя последними точками и есть $2h$. Значит,

$$h = \frac{\sqrt{((r+d)(d-1)-r)(d((r+d)(d-1)-r) - r + 2\sqrt{r}\sqrt{d}\sqrt{((r+d)(-d+1)+r)})}}{2\sqrt{d}\left|(-r+\sqrt{r}\sqrt{d}\sqrt{((r+d)(-d+1)+r)})\right|}. \tag{10}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Периодичность процесса Штейнера для произвольных окружностей A_1, B_1 эквивалентна периодичности процесса Джона для эллипса*

$$h^2(h^2-1)^2t^2 + h^2(h^2-1)^2e^2 + 2(h^6-4h^4+5h^2-2)et - 4h^6 + 12h^4 - 12h^2 + 4 = 0.$$

Теперь ясно, что при процессе Джона либо все точки периодичны, либо нет ни одной периодичной точки.

Для построенного эллипса Ω рассмотрим задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial e_1} = 0, u|_\Omega = 0. \tag{11}$$

Заметим далее, что эллипс легко сводится линейным преобразованием

$$e_1 = \frac{t_2}{2\sqrt{h^6-3h^4+3h^2-1}} + \frac{e_2}{2(h^2-1)}, \tag{12}$$

$$t_1 = \frac{t_2}{2\sqrt{h^6-3h^4+3h^2-1}} - \frac{e_2}{2(h^2-1)} \tag{13}$$

к окружности

$$t_2^2 + e_2^2 = 4(h^2-1)^3, \tag{14}$$

при этом уравнение (11) перейдет в гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами некоего общего вида

$$(1-h^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial e_2^2} = 0. \tag{15}$$

В работе ([6], см. также [7]) показано, что π-рациональность угла между характеристиками уравнения (15) эквивалентна неединственности решения однородной задачи Дирихле в круге (14). Ясно, что неединственность в круге эквивалентна неединственности задачи Дирихле в эллипсе Ω. А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что непериодических точек при процессе Джона на эллипсе нет (см. утверждение 1). А это значит, что процесс Штейнера периодичен. Тем самым, получен числовой критерий периодичности процесса Штейнера.

Теорема 2. *Процесс Штейнера периодичен тогда и только тогда, когда* $\frac{\arctan(\frac{2\sqrt{h^2-1}}{2-h^2})}{\pi} \in \boldsymbol{Q}$.

1. *Александрян Р.А.* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге // Докл. АН СССР – 1950. – 73. – Вып. 5.
2. *Александрян Р.А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1960. – Вып. 9. – С. 455-505.
3. *Акопян Г.С.* О полноте системы собственных вектор-полиномов линейного пучка дифференциальных операторов в эллипсоидальных областях // Докл. АН Арм. ССР. – 1988. – 86. – Вып. 4. – С. 147-152.
4. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. I // Известия АН СССР, серия математическая. – 1961. – 25. – Вып. 1. – С. 21-86.

5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. – К.: Наукова думка, 1965 – 798 с.
6. *Бурский В.П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. матем. журнал. – 1993. – 45. – Вып. 11. – С. 1476-1483.
7. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 2003. – 315 с.
8. *Бурский В.П., Жеданов А.С.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны, проблеме Понселе, уравнении Пеля-Абеля и некоторых других с ними связанных задачах // УМЖ. – 2006. – Вып. 4. – С. 435-450.
9. *Жижилкин И.Д.* Инверсия. – М.:Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.
10. *Зеленяк Т.И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. – Н.: НГУ, 1970.
11. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.
12. *Протасов В. Ю.* Об одном обобщении Понселе // УМН. – 2006. – Вып. 61. – С. 178-188.
13. *Фокин М.В.* О сингулярном спектре в задаче С.Л. Соболева // Сб. Математический анализ и дифференциальные уравнения. – 1992. – С. 11-15.
14. *Berger M.* Géométrie. – CEDIC: Paris, 1978.
15. *Bourgin D., Duffin R.* The Dirlchlet problem for the vibrating string equations// Bull. Am. Math. Soc. – 1939. – Вып. 45. – С. 851-858.
16. *Huber A.* Erste Randwertaufgabe fur geschlossene Bereiche bei der Gleichung $U_{xy} = f(x,y)$ // Monatshefte für Mathematik und Physik. – 1932. – Вып. 39. – С. 79-100.
17. *John F.* The Dirihlet problem for a hyperbolic equation // Am. J. Math. – 1941. – Вып. 63. – С. 141-154.

A. A. Zaretskaya

On the connection between the Dirichlet problem for the string and the Steiner geometry problem.

This paper shows the relationship between the classical Steiner problem in geometry and the uniqueness of solutions of the homogeneous Dirichlet problem for the string in the ellipse. The numeric criterion frequency process Steiner is found from the pointed connection.

Keywords: *Steiner process, John process, Dirichlet problem.*

А. О. Зарецька

Про зв'язок задачі Діріхле для рівняння струни та задачі Штейнера з геометрії.

У роботі показано зв'язок між класичною задачею Штейнера з геометрії та єдиністю розв'язку однорідної задачі Діріхле для рівняння коливання струни в еліпсі. На підставі знайденого зв'язку отримано числовий критерій періодичності процесу Штейнера.

Ключові слова: *процес Штейнера, процес Джона, задача Діріхле.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`seerall@mail.ru`
Получено 30.11.12