УДК 517.5

©2012. **Д. А. Зарайский**

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

В работе получена новая теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса.

Ключевые слова: *теоремы единственности.*

1. Введение. Обозначим $B_R(x)$ и $S_R(x)$ – открытый шар и сферу радиуса R с центром в x в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $B_R = B_R(0)$, $S_R = S_R(0)$.

При $R > r > 0$ пусть $V_r(B_R(x))$ – класс всех распределений $f \in \mathscr{D}'(B_R(x))$ таких, что $f*\chi_{B_r} = 0$, χ_{B_r} – индикатор шара B_r (область определения свёртки $f * \chi_{B_r}$ – шар $B_{R-r}(x)$). Тогда $V_r(B_R(x)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(B_R(x))$ – множество всех локально интегрируемых функций на $B_R(x)$, имеющих нулевой интеграл по замкнутым шарам радиуса r, целиком лежащим в $B_R(x)$.

Теорема единственности Ф. Йона–Дж. Смита–В.В. Волчкова утверждает, что если $f \in V_r(B_R)$ и $f = 0$ на $B_{r+\varepsilon}$, $r < r + \varepsilon < R$, то $f = 0$ на B_R; кроме того, если $f \in V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$, единственность имеет место и в предположении, что $f = 0$ на B_r, причём условие гладкости отбросить в этом случае уже нельзя (см. [1, § 6], [2, гл. VI] – аналогичный вопрос для сферических средних в $\mathbb{R}^3$, и [3, § 14.2, § 14.3] для общего уравнения свёртки с радиальным распределением). Некоторые более точные результаты в этом направлении см. также в [1], [3] и [4].

Согласно «теореме о полусфере» для класса V_r, [3, § 14.2], также принадлежащей В.В. Волчкову, если $f \in V_r(B_R)$, $R > r$, гладко в окрестности замкнутой полусферы $S_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = r \text{ и } x_1 \geqslant 0\}$, и $f = 0$ на B_r, то $f = 0$ на B_R.

В работе доказывается следующая теорема единственности, в частном случае $\mathcal{U} \supset S_r^+$ дающая вышеприведённый результат.

Теорема 1. *Пусть $R > r > 0$ и $f \in V_r(B_R)$. Предположим, что $f = 0$ на B_r, и ограничение f на $\mathcal{U}$ принадлежит $C^\infty(\mathcal{U})$ для некоторого открытого множества $\mathcal{U} \subset B_R$ такого, что*

$$\mathcal{U} \cup -\mathcal{U} \supset S_r.$$

Тогда $f = 0$ на всём B_R.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Если $\mathcal{U}$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, будем обозначать $WF(f) \subset \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ – волновой фронт распределения $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$, $\Sigma_x(f) = \{\xi \colon (x, \xi) \in WF(f)\}$, см. [5, гл. 8] по поводу определения и свойств волновых фронтов. В частности, [5, т. 8.2.14], для волнового фронта свёртки распределений $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место включение

$$WF(f * g) \subset \{(x + y, \xi) \colon (x, \xi) \in WF(f), (y, \xi) \in WF(g)\}. \tag{1}$$

Для многообразий $WF(f)$ является подмножеством *кокасательного* расслоения к $\mathcal{U}$, для областей в $\mathbb{R}^n$ это выражено в поведении $WF(f)$ относительно замены переменных. Если $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ – субмерсия, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$, то для $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{V})$

$$WF(f(\phi(\cdot))) = \phi^* \, WF(f), \tag{2}$$

где $f(\phi(\cdot))$ понимается как обратный образ f относительно ϕ, а ϕ^* в правой части равенства обозначает определённое ϕ отображение кокасательных расслоений, действующее в слое над $\phi(p)$ как линейное отображение, сопряжённое дифференциалу ϕ, т. е. $\phi^*(\phi(p),\eta) = (p,(d\phi)_p^*\eta)$, см. [5, т. 8.2.4, т. 8.2.12].

Пусть $d\tau$ – нормированная условием $\int_{O(n)} d\tau = 1$ мера Хаара на ортогональной группе $O(n)$. Для $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, $\psi \in C^\infty(O(n))$, можно определить распределение

$$g = \int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\psi(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

как прямой образ распределения $\psi(\tau)f(\tau^{-1}x)$ на многообразии $O(n)\times B_R$ при проекции на второй множитель ($f(\tau^{-1}x)$ определено корректно, т.к. отображение $(\tau,x) \mapsto \tau^{-1}x$ является субмерсией). Более конкретным образом, при фиксированном ψ, если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$, $\varphi \in \mathscr{D}(B_R)$, то

$$\langle g,\varphi\rangle = \int_{O(n)}\int_{B_R} f(x)\varphi(\tau x)\psi(\tau)\, dx\, d\tau = \left\langle f, \int_{O(n)} \varphi(\tau\cdot)\psi(\tau)\, d\tau \right\rangle. \tag{4}$$

При $f \in \mathscr{D}'(B_R)$ правая часть (4) задаёт, очевидно, непрерывный линейный функционал от $\varphi \in \mathscr{D}(B_R)$. Отображение $f \mapsto g$ будет при этом непрерывным из $\mathscr{D}'(B_R)$ в $\mathscr{D}'(B_R)$ в $*$-слабой топологии. Далее будем понимать интеграл (3) в указанном смысле.

Лемма 1. *Волновой фронт распределения*

$$\int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\psi(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

содержится во множестве

$$\{(\tau x, \tau\xi)\colon \tau \in \operatorname{supp}\psi;\ (x,\xi) \in WF(f);\ x \text{ и } \xi \text{ коллинеарны}\}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда носитель функции ψ лежит в открытом множестве, диффеоморфном некоторой открытой области $\mathcal{U}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, и обозначим $\phi\colon \mathcal{U} \to \phi(\mathcal{U}) \subset O(n)$ соответствующий диффеоморфизм. Мере Хаара $d\tau$ при отображении ϕ^{-1} соответствует мера $w(y)dy$, где w – некоторая гладкая функция на $\mathcal{U}$. Определим функцию $\psi_\phi(y) = \psi(\phi(y))w(y)$ (лежащую в $\mathscr{D}(\mathcal{U}) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n(n-1)/2})$). Имеем

$$\int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\psi(\tau)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)/2}} f\bigl(\phi(y)^{-1}x\bigr)\psi_\phi(y)\, dy, \tag{7}$$

для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$ п. в., а, значит, по непрерывности, и для $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, где правая часть понимается как оператор с ядром $f\big(\phi(y)^{-1}x\big)$ [5, § 5.2], применённый к $\psi_\phi(y)$.

Итак, пусть (x_0, ξ_0) принадлежит волновому фронту распределения (5). Тогда по теореме 8.2.12 из [5]

$$(x_0, y_0, \xi_0, 0) \in WF\left(f\big(\phi(y)^{-1}x\big)\right) \tag{8}$$

для некоторого $y_0 \in \operatorname{supp} \psi_\phi$ (т. е. такого, что $\phi(y_0) \in \operatorname{supp} \psi$). Таким образом, из (8) и (2) следует, что $(\xi_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ лежит в образе множества $\Sigma_{\phi(y_0)^{-1}x_0}(f)$ при отображении, сопряжённом к дифференциалу отображения $(x, y) \mapsto \phi(y)^{-1}x$ в точке (x_0, y_0). Значит для некоторого $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ такого, что $(\phi(y_0)^{-1}x_0, \eta_0) \in WF(f)$,

$$\begin{aligned}\langle u, \xi_0\rangle = \langle (u, v), (\xi_0, 0)\rangle = \left\langle (u, v), \big(d(\phi(y)^{-1}x)\big)^*_{(x_0, y_0)}\eta_0 \right\rangle = \\ = \left\langle \big(d(\phi(y)^{-1}x)\big)_{(x_0, y_0)} \cdot (u, v), \eta_0 \right\rangle, \text{ для всяких } u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}.\end{aligned}$$

Учитывая ортогональность матрицы $\phi(y)$ (обратной к матрице $\phi(y)$ будет её транспонированная $\phi(y)^\top$) и билинейность операции умножения вектора на матрицу, имеем

$$\big(d(\phi(y)^{-1}x)\big) \cdot (u, v) = (\phi'(y) \cdot v)^\top x + \phi(y)^{-1}u, \quad u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}.$$

Поэтому при $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$:

$$\begin{aligned}\left\langle \big(d(\phi(y)^{-1}x)\big)_{(x_0, y_0)} \cdot (u, v), \eta_0 \right\rangle = \left\langle (\phi'(y_0) \cdot v)^\top x_0, \eta_0 \right\rangle + \left\langle \phi(y_0)^{-1}u, \eta_0 \right\rangle = \\ = \left\langle x_0, (\phi'(y_0) \cdot v)\eta_0 \right\rangle + \left\langle u, \phi(y_0)\eta_0 \right\rangle, \text{ и, значит,}\end{aligned}$$

$$\langle u, \xi_0\rangle = \left\langle x_0, (\phi'(y_0) \cdot v)\eta_0 \right\rangle + \left\langle u, \phi(y_0)\eta_0 \right\rangle, \text{ для } u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2},$$

откуда, в силу произвольности u и v, во-первых, $\xi_0 = \phi(y_0)\eta_0$, а во-вторых,

$$\left\langle x_0, (\phi'(y_0) \cdot v)\phi(y_0)^{-1}\xi_0 \right\rangle = 0, \text{ для } v \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}. \tag{9}$$

Но отображение $\phi_{y_0}(y) = \phi(y)\phi(y_0)^{-1}$ является диффеоморфизмом окрестности y_0 в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ на некоторую окрестность единичного элемента I в $O(n)$. Кроме того, $\phi_{y_0}(y_0) = I$ и $\phi'_{y_0}(y_0) \cdot v = (\phi'(y_0) \cdot v)\phi(y_0)^{-1}$. Поэтому когда v пробегает $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(\phi'(y_0) \cdot v)\phi(y_0)^{-1}$ пробегает всё множество $\mathfrak{so}(n)$ кососимметрических матриц $n \times n$. Если x_0 и ξ_0 не коллинеарны, то когда $(\phi'(y_0) \cdot v)\phi(y_0)^{-1}$ является генератором поворота в плоскости, порождённой x_0 и ξ_0, равенство (9) не может выполняться. Таким образом, x_0 и ξ_0 коллинеарны и, поскольку $\phi(y_0) \in \operatorname{supp} \psi$, (x_0, ξ_0) принадлежит множеству (6) (можно положить $\tau = \phi(y_0)$, $x = \phi(y_0)^{-1}x_0$, $\xi = \eta_0$, тогда $(x, \xi) \in WF(f)$).

В общем случае с помощью разбиения единицы представим ψ в виде суммы

$$\psi = \sum_{j=1}^{N} \psi_j, \quad \operatorname{supp} \psi_j \subset \operatorname{supp} \psi,$$

где все ψ_j охватываются уже рассмотренным случаем. Тогда

$$WF\left(\int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\psi(\tau)\,d\tau\right) \subset \bigcup_{j=1}^{N} WF\left(\int_{O(n)} f(\tau^{-1}x)\psi_j(\tau)\,d\tau\right),$$

и правая часть, по доказанному, содержится во множестве (6). $\square$

Пусть $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^{n-1})$ – пространство однородных гармонических полиномов в $\mathbb{R}^n$ степени k (см., например, [3]), рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma)$, $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}_{l=1}^{d_k}$ – некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Будем обозначать (ρ,σ) – полярные координаты в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\rho(x) = |x|$, $\sigma(x) = x/|x|$. Функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$ можно сопоставить ряд Фурье по сферическим гармоникам

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Отображение $f \mapsto f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ продолжается до $*$-слабо непрерывного отображения $f \mapsto f^{k,l}$ из $\mathscr{D}'(B_R)$ в $\mathscr{D}'(B_R)$, причём

$$f^{k,l} = d_k \int_{O(n)} f\big(\tau^{-1}x\big)\overline{t^k_{l,l}(\tau)}\,d\tau, \tag{10}$$

для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$ п. в., [3, § 9.1], а, значит, по непрерывности и для $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, где $t^k_{i,j}(\tau)$ – гладкие функции на $O(n)$, определяемые по представлению группы $O(n)$ в $\mathcal{H}_k$, $\tau Y = Y(\tau^{-1}\cdot)$, и базису $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$. Радиализация f, $f^\natural$, определяется как

$$f^\natural = f^{0,1} = \int_{O(n)} f\big(\tau^{-1}\cdot\big)\,d\tau.$$

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, $0 < r < R$, и*

$$(x, cx) \notin WF(f),\ \textit{для}\ x \in S_r, c = \pm 1. \tag{11}$$

Тогда ограничение $f^{k,l}$ на некоторую открытую окрестность сферы S_r принадлежит C^∞.

Доказательство. Если $|x| = r$, то, по лемме 1, в силу (10) и (11), $(x,\xi) \notin WF(f^{k,l})$, поэтому множество $\Sigma_x(f^{k,l}) = \big\{\xi\colon (x,\xi) \in WF(f^{k,l})\big\}$ пусто, т. е. $f^{k,l}$ является гладкой функцией в некоторой окрестности точки x. $\square$

Следующая лемма является аналогом предложения 2.1 из [6] для шаровых средних и C^∞-волновых фронтов (в [6] используется техника аналитических волновых фронтов).

Лемма 3. *Пусть $f \in V_r(B_R(x_0))$, $0 < r < R < \infty$, и $y_0 \in S_r$. Тогда, если*

$$(x_0 - y_0, cy_0) \notin WF(f),\ \textit{для}\ c = \pm 1, \tag{12}$$

то

$$(x_0 + y_0, cy_0) \notin WF(f), \textit{ для } c = \pm 1. \tag{13}$$

Доказательство. При $b > a \geqslant 0$ обозначим для краткости $\varphi_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ чётную функцию с носителем, содержащимся в $(-b, b)$, и равную 1 в окрестности $[-a, a]$.

Положим $\sigma_0 = y_0/|y_0|$. Выберем срезающую функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, равную единице в окрестности σ_0 в $\mathbb{S}^{n-1}$ с носителем, столь близким к $\{\sigma_0\}$, что $r \operatorname{supp} \psi \subset$ $\subset B_{(R-r)/2}(y_0)$ и $-\sigma_0 \notin \operatorname{supp} \psi$.

Имеется чётное распределение из $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ такое, что

$$\big(H(\langle \cdot, \sigma_0 \rangle)\big)^\natural = \delta_0, \ \delta_0 \text{ – дельта-функция Дирака.}$$

Явный вид H см. в [2], [7] (H – распределение из формулы обращения преобразования Радона). Нам потребуется только то свойство H, что оно C^∞-гладко вне начала координат. Пусть

$$T(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{B_r}(y + t\boldsymbol{e}_n)\, dy = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} (r^2 - t^2)_+^{\frac{n-1}{2}}. \tag{14}$$

Можно показать, см. [4], что T обладает фундаментальным решением $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $E * T = \delta_0$, с носителем, содержащимся в полупрямой $[r, \infty)$, и гладким в ограничении на множество $\mathbb{R} \setminus (r + 2r\mathbb{Z}_+)$. Для распределения

$$h = \varphi_{2r,3r} \cdot \big((\varphi_{r,2r} H) * E\big), \tag{15}$$

ограничение h на $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ принадлежит C^∞, и $h * T = H$ на $(-r, r)$, т.е.

$$h * T \text{ чётно на } (-r, r), \text{ и } \Big((h * T)\big(\langle \cdot, \sigma_0 \rangle\big)\Big)^\natural = \delta_0 \text{ на } B_r. \tag{16}$$

Положим

$$g(x) = \int_{O(n)} h\big(\big\langle \tau^{-1} x, \sigma_0 \big\rangle\big) \psi(\tau \sigma_0)\, d\tau. \tag{17}$$

Т.к. $WF\big(h(\langle \cdot, \sigma_0 \rangle)\big) \subset \{(x, c\sigma_0)\colon \langle x, \sigma_0 \rangle = r, \ c \in \mathbb{R}\}$, то, по лемме 1,

$$WF(g) \subset \{(r\sigma, c\sigma)\colon \sigma \in \operatorname{supp} \psi, \ c \in \mathbb{R}\}. \tag{18}$$

Так как $WF(\chi_{B_r}) \subset \{(x, cx)\colon |x| = r, \ c \in \mathbb{R}\}$,

$$WF(g * \chi_{B_r}) \subset \{(x, c\sigma)\colon \sigma \in \operatorname{supp} \psi, \ c \in \mathbb{R}; \ x = 0, \text{ или } x = 2r\sigma\}. \tag{19}$$

Мы хотим показать теперь, что

$$(0, \pm\sigma_0) \notin WF(g * \chi_{B_r} - \tfrac{1}{2}\delta_0). \tag{20}$$

Заметим сначала, что, поскольку отражение относительно начала координат лежит в центре $O(n)$, для $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ имеем

$$\int_{O(n)} F\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi(-\tau\sigma_0)\, d\tau = \int_{O(n)} F\big(-\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi(\tau\sigma_0)\, d\tau.$$

Положим $\psi_1(\sigma) = 1 - \psi(\sigma) - \psi(-\sigma)$, тогда выполнено равенство

$$F\big(\langle x, \sigma_0\rangle\big)^{\natural} = \int_{O(n)} h\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\, d\tau = \int_{O(n)} F\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi_1(\tau\sigma_0)\, d\tau + \\ + \int_{O(n)} F\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi(\tau\sigma_0)\, d\tau + \int_{O(n)} F\big(-\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi(\tau\sigma_0)\, d\tau. \quad (21)$$

По непрерывности, (21) имеет место для произвольного $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Поскольку $\pm\sigma_0 \notin$ $\notin \operatorname{supp}\psi_1$ и $WF\big(F(\langle\cdot, \sigma_0\rangle)\big) \subset \{(x, c\sigma_0)\colon x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}\}$, то, по лемме 1,

$$(x, \pm\sigma_0) \notin WF\left(\int_{O(n)} F\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi_1(\tau\sigma_0)\, d\tau\right), \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \quad (22)$$

Из определения T, (14), нетрудно видеть, что

$$(g * \chi_{B_r})(x) = \int_{O(n)} (h * T)\big(\langle \tau^{-1}x, \sigma_0\rangle\big)\psi(\tau\sigma_0)\, d\tau.$$

Поэтому, полагая $F = h * T$ в равенстве (21), с учётом (22) и (16), получаем (20).

В силу (18), g гладко вне множества $r \operatorname{supp}\psi \subset B_{(R-r)/2}(y_0)$, поэтому для

$$g_0 = \varphi_{(R-r)/2,\, R-r}\,(|\cdot - y_0|)\, g$$

разность $g - g_0$ лежит в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Но тогда и $g * \chi_{B_r} - g_0 * \chi_{B_r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и, согласно (19), (20),

$$\text{если } (x, c\sigma_0) \in WF(g_0 * \chi_{B_r} - \tfrac{1}{2}\delta_0), \text{ то } x = 2y_0. \quad (23)$$

Поскольку $\operatorname{supp}(g_0 * \chi_{B_r} - \frac{1}{2}\delta_0) \subset B_R(y_0)$, то область определения свёртки

$$f * (g_0 * \chi_{B_r} - \tfrac{1}{2}\delta_0) \quad (24)$$

содержит точку $x_0 + y_0$. Если $(x_0 + y_0, c\sigma_0)$ для $c \in \mathbb{R}$ лежит в волновом фронте свёртки (24), то, с учётом включения (1) и (23), получаем, что $(x_0 - y_0, c'\sigma_0) \in WF(f)$ для некоторого $c' \in \mathbb{R}$.

Так как $\operatorname{supp} g_0 \subset B_{R-r}(y_0)$, то в окрестности $x_0 + y_0$ имеем

$$f * (g_0 * \chi_{B_r}) = (f * \chi_{B_r}) * g_0 = 0.$$

Поэтому свёртка (24) в окрестности точки $x_0 + y_0$ совпадает с $-\frac{1}{2}f$. Таким образом, если выполнено (12), то $(x_0 + y_0, cy_0)$, $c \in \mathbb{R}$, не принадлежит волновому фронту функции (24), а, значит, и $WF(f)$, то есть выполнено (13). $\square$

3. Доказательство основного результата. Итак, пусть $f \in V_r(B_R)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для произвольного $x \in S_r$ имеем: либо $x \in \mathcal{U}$ и f гладко в окрестности точки x, либо $-x \in \mathcal{U}$ и то же верно в окрестности точки $-x$. В последнем случае $(-x,-x) \notin WF(f)$ и $(-x,x) \notin WF(f)$, и, по лемме 3, $(x,\pm x) \notin WF(f)$. Таким образом, учитывая коничность $WF(f)$ по второй переменной, если $\xi = cx$, в любом случае (x,ξ) не принадлежит волновому фронту f.

Но это означает, что выполнены условия леммы 2. Поэтому $f^{k,l}$ гладко в $B_{r+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Так как $f^{k,l} \in V_r(B_R)$, то, применяя к $f^{k,l}$ теорему единственности Йона-Смита-Волчкова, см. [1, т. 2], [3, т. 14.2], получаем, что $f^{k,l} = 0$ на $B_{r+\varepsilon}$ и, значит, на B_R. Итак, мы показали, что в разложении $f \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} f^{k,l}$ в ряд Фурье по сферическим гармоникам все $f^{k,l}$ равны нулю на B_R, откуда заключаем, что $f = 0$ тождественно, что и доказывает теорему. $\square$

1. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Математический сборник. – 1995. – Том 186. – № 6. – С. 15-34.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 159 с.
3. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
4. *Зарайский Д.А.* Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свёртки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Том 12. – С. 69-75.
5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – Том 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
6. *Quinto E.T.* Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Isr. J. Math. – 1993. – V. 84. – P. 353-363.
7. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Обобщённые функции, вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. – М.: Физматгиз, 1962. – 656 с.

D. A. Zaraisky

An uniqueness theorem for functions with zero integrals over balls.

A new uniqueness theorem for functions with zero integrals over balls of fixed radius is obtained.

Keywords: *uniqueness theorems.*

Д. А. Зарайський

Теорема єдиності для функцій з нульовими інтегралами по кулях.

У роботі отримано нову теорему єдиності для функцій з нульовими інтегралами по кулях фіксованого радіуса.

Ключові слова: *теореми єдиності.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 17.12.12