УДК 517.5

©2012. **В. С. Василянская, Вит. В. Волчков**

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ЭЙЗЕНШТЕЙНА НА СФЕРЕ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Изучаются собственные функции возмущенного лапласиана $\mathfrak{L}$ на двумерной сфере. Получены представления для однородных собственных функций $\mathfrak{L}$ в виде интегралов с ядром типа Пуассона.

Ключевые слова: *симметрические пространства, интегралы Эйзенштейна, свертка.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{H}^2$ – гиперболическая плоскость кривизны -4, реализованная на единичном круге $|z| < 1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, L – оператор Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{H}^2$. Как известно (см. [1, Введение, § 4]), собственные функции оператора L описываются равенством

$$f(z) = \int\limits_{|b|=1} \left(\frac{1-|z|^2}{|z-b|^2}\right)^{\lambda} dT(b),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и T – аналитический функционал (гиперфункция) на единичной окружности $\mathbb{S}^1$. Однородные собственные функции

$$\int\limits_{|b|=1} \left(\frac{1-|z|^2}{|z-b|^2}\right)^{\lambda} b^m db, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

явно выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса и называются интегралами Эйзенштейна для $\mathbb{H}^2$. Подобные результаты справедливы для произвольного риманова симметрического пространства X некомпактного типа ранга один и играют важную роль в различных вопросах анализа на X (см. [2, гл. 3, §§ 5, 11], [3, гл. 5, 10]).

В работе [4] начато изучение свойств решений искажённого уравнения свёртки на областях двумерной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ вида

$$(f_1 * f_2)(z) = \int\limits_G f_1(go) f_2(g^{-1}z) \left(\frac{1+\overline{z}\cdot go}{1+z\cdot\overline{go}}\right)^s dg, \tag{2}$$

где $G = PSU(2)$ – группа вращений сферы, $s \in \mathbb{R}$. Оказалось, что естественным аналогом оператора Лапласа-Бельтрами для свёрточной структуры в (2) является оператор

$$\mathfrak{L} = 4(1+|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - 4s^2|z|^2 Id - 4s(1+|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right),$$

где Id – тождественное преобразование. Для изучения структуры решений (2) и ряда других вопросов, связанных с указанным уравнением, необходимо иметь подходящий аналог интегралов (1) для оператора $\mathfrak{L}$. В данной работе получено решение этой задачи.

2. Формулировка основного результата. Для $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathfrak{D}_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k, & k \geq 0 \\ \frac{1}{(-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{1-\lambda}{2}$, $\eta \in \mathbb{S}^1$. Определим функцию $E^s_{\nu,\eta}$ равенством

$$E^s_{\nu,\eta}(z) = \left(\frac{1+|z|^2}{1-i\eta\overline{z}-i\overline{\eta}z-|z|^2}\right)^{\nu}\left(\frac{1-i\eta\overline{z}}{1-i\overline{\eta}z}\right)^{s}, \quad |z|<1, \tag{3}$$

где для выделения ветви степени используется главное значение логарифма. Обозначим также через $H^s_{\lambda,k}(t)$ функцию

$$t^{|k|}(1+t^2)^{\nu}F\left(\nu - s + \frac{|k|-k}{2}, \nu + s + \frac{|k|+k}{2}; |k|+1; -t^2\right),$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса (см. [5, гл. 2]).

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1.

(i) Произвольная гладкая функция $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathfrak{L}f = (4s^2 + 1 - \lambda^2)f \tag{4}$$

и условию однородности

$$f(e^{i\theta}z) = e^{ik\theta}f(z), \tag{5}$$

имеет вид $f(z) = (\mathfrak{D}_k f)(0)H^s_{\lambda,k}(|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k$.

(ii) Имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E^s_{\nu,e^{i\theta}}(z)e^{ik\theta}d\theta = C_{\nu,k,s}H^s_{\lambda,k}(|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k, \tag{6}$$

где

$$C_{\nu,k,s} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu+s+k)}{k!\Gamma(\nu+s)}, & k \geq 0; \\ \frac{\Gamma(\nu-s-k)}{(-k!)\Gamma(\nu-s)}, & k < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что случай $s = 0$ в теореме 1 соответствует собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере. Аналог равенства (6) для K-финитных собственных функций лапласиана на римановом симметрическом пространстве $X = G/K$ некомпактного типа ранга один имеется в [2, гл. 3, § 11], [3, гл. 5]. В монографии [3, гл. 11] содержатся также подобные интегральные представления для компактных двухточечно-однородных пространств. Относительно некоторых частных случаев указанных результатов см. [1, Введение, предложение 4.11], [6], [7], [8, гл. 2.3, формула (3.12)].

3. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем считаем, что $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{S}^1$.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^{|k|}$ в окрестности нуля. Тогда*

$$\mathfrak{D}_k \left((1+|z|^2)^\lambda f(z)\right)(0) = (\mathfrak{D}_k f)(0). \tag{8}$$

Доказательство. Для любого натурального числа N имеем

$$\mathfrak{D}_k \left(|z|^{2N} f(z)\right)(0) = 0. \tag{9}$$

Используя (9) и разложение

$$\left(1+|z|^2\right)^\lambda f(z) = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{\Gamma(N-\lambda)}{N!\Gamma(-\lambda)} |z|^{2N} f(z),$$

получаем (8). □

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{D}_k \left(H^s_{\lambda,k}(|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k\right)(0) = 1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $k \geq 0$. Тогда

$$H^s_{\lambda,k}(|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k = \left(1+|z|^2\right)^\nu F(\nu - s,\, \nu + s + k;\, k+1;\, -|z|^2)\, z^k. \tag{11}$$

Разлагая гипергеометрическую функцию из (11) в ряд по степеням $|z|^{2N}$ и используя (8), (9), приходим к (10).

В случае, когда $k < 0$

$$H^s_{\lambda,k}(|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^k = \left(1+|z|^2\right)^\nu F(\nu - s - k,\, \nu + s;\, 1-k;\, -|z|^2)\, \overline{z}^{-k}$$

и (10) получается таким же способом. □

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{D}_k \left((1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^\lambda \right)(0) = \frac{\Gamma(|k| - \lambda)}{|k|!\Gamma(-\lambda)}\, \overline{\eta}^{\,k}\, i^{|k|}. \tag{12}$$

Доказательство. В достаточно малой окрестности нуля $(1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^\lambda$ можно представить в виде

$$(1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^\lambda = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N - \lambda)}{N!\Gamma(-\lambda)} (i\overline{\eta}z + i\eta\overline{z} + |z|^2)^N =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N - \lambda)}{N!\Gamma(-\lambda)} \sum_{j=0}^{N} C_N^j (i\overline{\eta}z + i\eta\overline{z})^j (|z|^2)^{N-j},$$

где C_N^j – биномиальные коэффициенты. Отсюда и из (9) находим

$$\mathfrak{D}_k \left((1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^\lambda \right)(0) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N - \lambda)}{N!\Gamma(-\lambda)} \mathfrak{D}_k \left((i\overline{\eta}z + i\eta\overline{z})^N \right)(0). \tag{13}$$

Далее,

$$\mathfrak{D}_k \left((i\overline{\eta}z + i\eta\overline{z})^N \right)(0) = \sum_{j=0}^{N} C_N^j \mathfrak{D}_k (i^N \overline{\eta}^j z^j \eta^{N-j} \overline{z}^{N-j})(0) = i^N\, \delta_{N,\,|k|}\, \overline{\eta}^{\,k}, \tag{14}$$

где $\delta_{N,\,|k|}$ – символ Кронекера. Комбинируя (13) и (14), получаем (12). □

Следствие 2. *Пусть* $E^s_{\nu,\,\eta}$ *и* $C_{\nu,\,k,\,s}$ *определяются с помощью (3), (7). Тогда*

$$\mathfrak{D}_k \left(E^s_{\nu,\,\eta} \right)(0) = C_{\nu,\,k,\,s}\, \overline{\eta}^{\,k}\, i^{|k|}. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k \geq 0$. Запишем $E^s_{\nu,\,\eta}$ в виде

$$E^s_{\nu,\,\eta}(z) = \left(1 + |z|^2\right)^\nu \frac{(1 - i\eta\overline{z})^{2s}}{(1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^{s+\nu}}.$$

Применяя к обеим частям оператор $\mathfrak{D}_k$ и учитывая (8), имеем

$$\mathfrak{D}_k \left(E^s_{\nu,\,\eta} \right)(0) = \mathfrak{D}_k \left(\frac{(1 - i\eta\overline{z})^{2s}}{(1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^{s+\nu}} \right)(0) =$$

$$= \mathfrak{D}_k \left((1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^{-s-\nu} \right)(0).$$

Теперь равенство (12) дает (15) при $k \geq 0$. Аналогично, используя представление

$$E^s_{\nu,\,\eta}(z) = \left(1 + |z|^2\right)^\nu \frac{(1 - i\overline{\eta}z - i\eta\overline{z} - |z|^2)^{s-\nu}}{(1 - i\overline{\eta}z)^{2s}}$$

и (8), (12), получаем (15) при $k < 0$. $\square$

4. Собственные функции оператора $\mathfrak{L}$. В дальнейшем удобно использовать запись комплексного числа z в показательной форме: $z = \rho\, e^{i\varphi}$. Найдем сначала собственные функции оператора $\mathfrak{L}$ вида $h(\rho)\, e^{ik\varphi}$, где k – фиксированное целое число.

Лемма 3. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что гладкая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является решением уравнения (4) и имеет вид $f(z) = h(\rho)\, e^{ik\varphi}$. Тогда*

$$f(z) = (\mathfrak{D}_k f)(0)\, H^s_{\lambda,\, k}(\rho)\, e^{ik\varphi}. \tag{16}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(h'(\rho) + k\,\frac{h(\rho)}{\rho}\right) e^{i(k-1)\varphi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(h'(\rho) - k\,\frac{h(\rho)}{\rho}\right) e^{i(k+1)\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(h''(\rho) + \frac{h'(\rho)}{\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} h(\rho)\right) e^{ik\varphi}.$$

Отсюда

$$(\mathfrak{L}f)(z) = \Bigg[(1+\rho^2)^2 h''(\rho) + \frac{(1+\rho^2)^2}{\rho} h'(\rho) - \\ - h(\rho)\left(\frac{k^2}{\rho^2} + \rho^2(k+2s)^2 + 2k(2s+k)\right)\Bigg] e^{ik\varphi}.$$

Следовательно, уравнение (4) можно представить в виде

$$(1+\rho^2)^2\left(h''(\rho) + \frac{h'(\rho)}{\rho}\right) - \\ - h(\rho)\left(\frac{k^2}{\rho^2} + \rho^2(k+2s)^2 + 2k(2s+k) + 4s^2 + 1 - \lambda^2\right) = 0. \tag{17}$$

Из (17) для функции $\psi(\rho) = \rho^{-|k|}(1+\rho^2)^{-\nu} h(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1+\rho^2)\psi''(\rho) + (2|k| + 1 + (2|k| + 4\nu + 1)\rho^2)\psi'(\rho) + \\ + (2\nu + |k| - k - 2s)(2\nu + |k| + k + 2s)\rho\psi(\rho) = 0. \tag{18}$$

С другой стороны, гипергеометрическая функция $\Phi(\rho) = F(\alpha, \beta; \gamma; -\rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1+\rho^2)\Phi''(\rho) + (2\gamma - 1 + (2\alpha + 2\beta + 1)\rho^2)\Phi'(\rho) + 4\alpha\beta\Phi(\rho) = 0 \tag{19}$$

(см. [5, гл. 2]). Полагая

$$h_1(\rho) = \rho^{|k|}(1+\rho^2)^\nu F\left(\nu - s + \frac{|k|-k}{2},\, \nu + s + \frac{|k|+k}{2};\, |k|+1;\, -\rho^2\right)$$

и сравнивая (18) и (19), видим, что для некоторых констант C_1, C_2

$$h(\rho) = C_1\, h_1(\rho) + C_2\, h_2(\rho),$$

где h_1, h_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (17). По формуле Остроградского-Лиувилля

$$\begin{vmatrix} h_1(\rho) & h_2(\rho) \\ h_1'(\rho) & h_2'(\rho) \end{vmatrix} = \frac{C}{\rho}, \tag{20}$$

где $C \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Учитывая гладкость h и h_1 в нуле, из (20) заключаем, что $C_2 = 0$, т.е. $f(z) = C_1\, H^s_{\lambda,\, k}(\rho)\, e^{ik\varphi}$. Это равенство вместе с соотношением (10) влечет (16). □

Установим теперь собственность функций $E^s_{\nu,\,\eta}$ для оператора $\mathfrak{L}$.

Лемма 4. *Функция $E^s_{\nu,\,\eta}$ удовлетворяет уравнению (4).*

Доказательство. Представим $\mathfrak{L}$ в виде

$$\mathfrak{L} = L - 4s^2\,|z|^2\, Id + A,$$

где

$$L = 4\left(1+|z|^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}, \quad A = -4s\left(1+|z|^2\right)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right).$$

Для краткости положим

$$f_1(z) = e_{\nu,\,\eta}(z) = \left(\frac{1+|z|^2}{1 - i\eta\overline{z} - i\overline{\eta}z - |z|^2}\right)^\nu, \quad f_2(z) = \left(\frac{1 - i\eta\overline{z}}{1 - i\overline{\eta}z}\right)^s.$$

Тогда $E^s_{\nu,\,\eta} = f_1 \cdot f_2$ и

$$\mathfrak{L}(f_1 \cdot f_2) = f_1 L(f_2) + f_2 L(f_1) + 4\left(1+|z|^2\right)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}\right) -$$
$$-4s^2\,|z|^2\, f_1 f_2 + f_1 A(f_2) + f_2 A(f_1). \tag{21}$$

По определению f_1 и f_2 имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \nu\, e_{\nu-1,\,\eta}\frac{2\overline{z} - i\eta\overline{z}^2 + i\overline{\eta}}{(1 - i\eta\overline{z} - i\overline{\eta}z - |z|^2)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} = \nu\, e_{\nu-1,\,\eta}\frac{2z - i\overline{\eta}z^2 + i\eta}{(1 - i\eta\overline{z} - i\overline{\eta}z - |z|^2)^2}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{is\overline{\eta}}{1 - i\overline{\eta}z}\, f_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}} = \frac{-is\eta}{1 - i\eta\overline{z}}\, f_2, \tag{23}$$

откуда

$$A(f_1) = -4i\, s\nu(z\overline{\eta} - \overline{z}\eta)\, e_{\nu+1,\,\eta}, \tag{24}$$

$$A(f_2) = -4i\, s^2(z\overline{\eta} + \overline{z}\eta - 2i|z|^2)\, f_2\, e_{1,\,\eta}, \tag{25}$$

$$L(f_1) = 4\,\nu\,(1-\nu)\,f_1, \tag{26}$$

$$L(f_2) = 4\,s^2(1+|z|^2)\,f_2\,e_{1,\,\eta}. \tag{27}$$

Из (21)-(27) следует, что уравнение (4) для функции $E^s_{\nu,\,\eta}$ сводится к проверке соотношения

$$\Bigg[s(1+|z|^2)+i\nu\left(\frac{-\eta(2\overline{z}-i\eta\overline{z}^2+i\overline{\eta})}{1-i\eta\overline{z}}+\frac{\overline{\eta}(2z-i\overline{\eta}z^2+i\eta)}{1-i\overline{\eta}z}\right)-$$
$$-is(z\overline{\eta}+\overline{z}\eta-2i|z|^2)-i\nu(z\overline{\eta}-\overline{z}\eta)\Bigg]\,e_{1,\,\eta}=s(1+|z|^2),$$

которое получается с использованием равенства

$$z\overline{\eta}-\overline{z}\eta=\frac{-\eta(2\overline{z}-i\eta\overline{z}^2+i\overline{\eta})}{1-i\eta\overline{z}}+\frac{\overline{\eta}(2z-i\overline{\eta}z^2+i\eta)}{1-i\overline{\eta}z}.$$

Это завершает доказательство. □

5. Доказательство теоремы 1. Если f удовлетворяет (5), то функция $f(z)\left(\frac{z}{|z|}\right)^{-k}$ является радиальной и, значит, f имеет вид $f(z) = h(\rho)\,e^{ik\varphi}$. Поэтому утверждение (i) в теореме 1 следует из леммы 3.

Для доказательства (ii) положим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}E^s_{\nu,\,e^{i\theta}}(z)e^{ik\theta}d\theta.$$

Поскольку

$$E^s_{\nu,\,e^{i\theta}}(e^{i\psi}\,z)=E^s_{\nu,\,e^{i(\theta-\psi)}}(z),$$

функция f удовлетворяет (5). Кроме того, по лемме 4 имеет место соотношение (4). Применяя утверждение (i) и учитывая, что $(\mathfrak{D}_k f)(0) = C_{\nu,\,k,\,s}$ (см. следствие 2), получаем (ii). Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. *Helgason S.* Geometric Analysis on Symmetric Spaces // Am. Math. Soc., Providence, RI. – 1994. – 601 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
4. *Василянская В.С., Волчков Вит.В.* Теорема о среднем для искажённой свёртки на сфере // Вестник Донецкого национального университета, Сер.А: Естественные науки. – 2012. – № 1. – С. 7-12.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
6. *Harchaoui M.El.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // I. Anal. Math. – 1995. – Vol. 67. – 1-37 pp.
7. *Berkani M., Harchaoui M.El., Gay R.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les léspaces hyperboliques quaternionique – cas des deux boules // Complex Var. Theoty Appl. – 2000. – Vol. 43. – 29-57 pp.
8. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.

V. S. Vasylianska, Vit. V. Volchkov

Eisenstein type integrals on sphere and its generalization.

Eigenfunctions of indignant Laplacian $\mathfrak{L}$ on two-dimensional sphere are studied. Representations for homogeneous eigenfunctions of $\mathfrak{L}$ in the form of integrals with a Poisson type kernel are obtained.

Keywords: *symmetric spaces, Eisenstein integrals, convolution.*

В. С. Василянська, Віт. В. Волчков

Інтеграли типу Ейзенштейна на сфері та їх узагальнення.

Вивчаються власні функції збуреного лапласіана $\mathfrak{L}$ на двовимірній сфері. Отриман зображення для однорідних власних функцій $\mathfrak{L}$ у вигляді інтегралів з ядром типу Пуассона.

Ключові слова: *симетричні простори, інтеграли Ейзенштейна, згортка.*

Донецкий национальный ун-т
`sv.vasia@gmail.com`

Получено 05.10.12