УДК 511.33

©2012. **Е. А. Баштынская**

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ

Плотностные теоремы играют важную роль при изучении распределения нулей дзета-функции и рядов Дирихле. Они дают оценку количества нулей в заданном прямоугольнике внутри критической полосы и используются во многих проблемах аналитической теории чисел. В работе получена плотностная теорема для частичной суммы ряда Дирихле дзета-функции Римана.

Ключевые слова: *дзета-функция Римана, ряды Дирихле, плотностные теоремы, гипотеза Римана.*

1. Введение. Проблема поведения дзета-функции Римана в критической полосе, в особенности проблема распределения ее нулей, является одной из труднейших и интереснейших в математическом анализе. С ее решением тесно связано также решение центральной проблемы аналитической теории чисел – распределение простых чисел в натуральном ряде.

В данной работе доказана теорема о плотности нулей внутри полосы $\mathrm{Re}s \in (0,1)$ для функции $\zeta_0(s) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$, которая является частичной суммой ряда Дирихле дзета-функции. Первые теоремы такого рода были получены в середине прошлого века в работах Хохайзеля, Титчмарша (см. [3]), Сельберга, Карацубы (см. [1]), Бомбьери и др.

Приведем пример плотностной теоремы для дзета-функции Римана.

Теорема. *При* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$N(\sigma, T) \leqslant cT^{4\sigma(1-\sigma)}(\ln T)^{12},$$

где $N(\sigma, T)$ *– количество нулей функции* $\zeta(s)$ *в прямоугольнике* $|Ims| \leqslant T$, $Res \geqslant \sigma$; $c > 0$ *– абсолютная константа.*

Доказательство и подробное описание приведено в [1].

2. Формулировка основного результата. Пусть $\chi(s)$ – характеристическая функция множества нулей функции $\zeta_0(s)$, то есть

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{если } \zeta_0(s) = 0, \\ 0 & \text{если } \zeta_0(s) \neq 0. \end{cases}$$

Определение. При $0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ T \geqslant 2$ положим

$$N_0(\sigma, T) = \sum_{\substack{|Im\ s| \leqslant T \\ \sigma \leqslant Re\ s \leqslant 1}} \chi(s);$$

другими словами, $N_0(\sigma, T)$ – число нулей функции $\zeta_0(s)$ в прямоугольнике $|Im\ s| \leqslant T$, $\sigma \leqslant Re\ s \leqslant 1$.

Теорема 1. *При* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $N^{2(1-\sigma)} \leqslant T \leqslant N^{3-2\sigma}$ *имеет место оценка*

$$N_0(\sigma, T) \leqslant cT^{2(1-\sigma)} N^{2(1-\sigma)(2\sigma-1)} (\ln N)^8 \ln T,$$

где $c > 0$ *не зависит от* T *и* N.

3. Вспомогательные утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $G(s)$ *– целая функция конечного порядка,* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность нулей функции* G. *Если* G *ограничена на вещественной оси, то она представима в виде*

$$G(s) = s^m e^{A+iBs} \lim_{R\to\infty} \prod_{|s_n|<R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right), \tag{1}$$

(B – вещественное число).

Доказательство подробно описано в [2, глава V].

Лемма 1. *Пусть* ε *– положительное число, для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\varepsilon}} < 2.$$

Тогда все нули функции $\zeta_0(s)$ *содержатся в полосе*

$$-\frac{\ln N}{\ln N - \ln{(N-1)}} < Re\ s < 2 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $s = \sigma + it$. Покажем, что при $\sigma \geqslant 2 - \varepsilon$ при некотором малом $\varepsilon > 0$ функция $\zeta_0(s)$ не обращается в нуль. Имеем

$$|\zeta_0(s)| \geqslant 1 - \left|\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\sigma} \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{2-\varepsilon}} > 0$$

в силу непрерывности функции $\zeta_0(x)$ и того, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

Теперь пусть $\sigma < 0$ и $\zeta_0(s) = 0$, тогда

$$\frac{1}{N^\sigma} = \left|\frac{1}{N^{\sigma+it}}\right| = \left|-\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant (N-1)\frac{1}{(N-1)^\sigma};$$

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-\sigma} \leqslant (N-1);$$

$$-\sigma \leqslant \frac{\ln(N-1)}{\ln N - \ln(N-1)} < \frac{\ln N}{\ln N - \ln(N-1)};$$

$$\sigma > -\frac{\ln N}{\ln N - \ln(N-1)}.$$

□

Теорема 3. $\zeta_0(s)$ – *целая функция первого порядка, при чем справедлива формула*

$$\zeta_0(s) = Ne^{Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right), \tag{2}$$

где $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ – *нули функции* $\zeta_0(s)$, $B \geqslant -\ln N$.

Доказательство. Пусть $|s| = r$. Оценим $|\zeta_0(s)|$. Имеем

$$|\zeta_0(re^{i\varphi})| \leqslant \sum_{n=1}^{N} n^{|-re^{i\varphi}|} = \sum_{n=1}^{N} n^r \leqslant N^{r+1} \leqslant c_1 e^{c_2 r}.$$

При $s = -r < 0$ получаем

$$|\zeta_0(-r)| = \sum_{n=1}^{N} n^r \geqslant N^r = e^{r\ln N},$$

значит порядок функции $\zeta_0(s)$ равен 1.

Введем в рассмотрение функцию

$$f(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{is}}.$$

Порядок $f(s)$ равен 1. Воспользуемся теоремой 2. При $x \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $|f(x)| \leqslant N$, значит $f(s)$ можно представить в виде (1):

$$f(s) = s^m e^{A+iBs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s}{s_n}\right),$$

где $\{s_n\}$ – последовательность нулей функции $f(s)$.

Заметим, что $\zeta_0(s) = f(-is)$. Если s_n – нуль функции $f(s)$, то $is_n = \rho_n$ – нуль функции $\zeta_0(s)$. Тогда, в силу того, что $\zeta_0(0) = N \neq 0$, получим

$$\zeta_0(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right).$$

Вычислим коэффициенты A и B. Полагая $s = 0$, находим

$$e^A = \zeta_0(0) = N.$$

Теперь из (2)

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = B + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s - \rho_n}.$$

Преобразуем последнюю сумму, учитывая, что нули функции $\zeta_0(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{s-\overline{\rho_n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s-\beta_n}{(s-\beta_n)^2+\gamma_n^2}.$$

Тогда получим, что при $s=\sigma+it$, $t=0$, $\sigma\to-\infty$, в силу ограниченности β_n (лемма 1)

$$\varliminf_{\sigma\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma-\rho_n}=\varliminf_{\sigma\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+\gamma_n^2}\leqslant 0.$$

А значит

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\zeta_0'(\sigma)}{\zeta_0(\sigma)}=B+\varliminf_{\sigma\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma-\rho_n}\leqslant B.$$

С другой стороны, по определению

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)}=-\frac{\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^s}}{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}},$$

значит

$$B>-\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}(\ln n)n^{-\sigma}}{\sum_{n=1}^{N}n^{-\sigma}}=-\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}(\ln n)\left(\frac{N}{n}\right)^{\sigma}}{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{N}{n}\right)^{\sigma}}=-\ln N.$$

□

Следствие. *Справедлива формула*

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)}=B+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}. \tag{3}$$

Теорема 4. *Пусть $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$ – нули функции $\zeta_0(s)$, $T\geqslant 2$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}\leqslant c\ln N.$$

Доказательство. Положим $s=2+iT$. Тогда

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)}=-B-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}\leqslant\ln N-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}. \tag{4}$$

Кроме того,

$$|\zeta_0'(s)|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln N}{n^2}\leqslant\ln N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=c_1\ln N,$$

а также
$$|\zeta_0(s)| \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{|n^{2+iT}|} \geqslant 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} = c_2.$$
Итак, получили
$$\left|\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)}\right| \leqslant \frac{c_1}{c_2} \ln N = c_3 \ln N,$$
а значит
$$\mathrm{Re}\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} \leqslant c_3 \ln N. \tag{5}$$
Теперь из (4) и (5) найдем
$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s-\rho_n} \leqslant c_4 \ln N. \tag{6}$$

Далее оценим левую часть неравенства (6), учитывая, что $\beta_n < 2 - \varepsilon$ (лемма 1):
$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s-\rho_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2}.$$
Тогда (6) можно переписать в виде
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \leqslant \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s-\rho_n} \leqslant c_4 \ln N,$$
откуда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \leqslant \frac{c_4}{\varepsilon} \ln N = c \ln N.$$
□

Следствие. *Число нулей ρ_n функции $\zeta_0(s)$, для которых $0 < \beta_n < 1$, $T \leqslant |\gamma_n| \leqslant T + 1$, не превосходит $c_5 \ln N$.*

Доказательство.
$$c \ln N \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \geqslant \sum_{\substack{0<\beta_n<1 \\ T\leqslant\gamma_n\leqslant T+1}} \frac{1}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\substack{0<Re\ s<1 \\ T\leqslant Im\ s\leqslant T+1}} \frac{1}{5}\ \chi(s).$$

В силу симметричности нулей функции $\zeta_0(s)$ относительно действительной оси, имеем
$$\sum_{\substack{0<Re\ s<1 \\ T\leqslant Im\ s\leqslant T+1}} \chi(s) \leqslant 10c \ln N = c_5 \ln N.$$
□

Лемма 2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{\rho}{}'' \Bigg| \sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{b_n}{n^{\rho}} \Bigg|^2 \leqslant c(T_1 Y^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}) \ln^6 Y, \tag{7}$$

где c – абсолютная положительная константа, b_n – произвольные числа с условием $|b_n| \leqslant \tau(n)$ ($\tau(n)$ – число натуральных делителей n), $Y \geqslant 1$ – любое целое число, суммирование в сумме $\sum_{\rho}{}''$ ведется по нулям ρ функции $\zeta_0(s)$, $T_1 \leqslant |Im\ \rho| \leqslant 2T_1 \leqslant T$, $\sigma \leqslant Re\ \rho \leqslant 1$, $|Im\ \rho - Im\ \rho'| \geqslant \ln T - 1$ (т.е. расстояние между мнимыми частями нулей, по которым ведется суммирование, не меньше $(\ln T - 1)$).

Для доказательства достаточно повторить рассуждения из [1] с использованием леммы из [1, глава VII].

4. Доказательство основного результата. Пусть $T \geqslant 2$, $|t| \leqslant T$. Умножим равенство

$$\zeta_0(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$

на

$$M_X(s) = \sum_{n\leqslant X} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad X = TN^{2\sigma-2},$$

где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса. Получим

$$\zeta_0(s) M_X(s) = \sum_{n\leqslant X} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\leqslant NX} \frac{\alpha_n}{n^s}, \tag{8}$$

где

$$\alpha_n = \sum_{\substack{n/m\in\mathbb{Z} \\ n/m\leqslant N \\ m\leqslant X\leqslant N}} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } 1 < n \leqslant X. \end{cases} \tag{9}$$

Кроме того, $|\alpha_n| \leqslant \tau(n)$, где $\tau(n)$ – число натуральных делителей n.

Пусть теперь $s = \rho$ – нуль функции $\zeta_0(s)$. Тогда

$$0 = \zeta_0(\rho) M_X(\rho) = \sum_{n\leqslant NX} \frac{\alpha_n}{n^{\rho}} = \sum_{n\leqslant X} \frac{\alpha_n}{n^{\rho}} + \sum_{X<n\leqslant NX} \frac{\alpha_n}{n^{\rho}} = 1 + \sum_{X<n\leqslant NX} \frac{\alpha_n}{n^{\rho}}.$$

Следовательно,

$$1 = \Bigg| \sum_{X<n\leqslant NX} \frac{a_n}{n^{\rho}} \Bigg|.$$

Теперь, возводя в квадрат последнее равенство, будем иметь

$$1 = \Bigg| \sum_{X<n\leqslant NX} \frac{a_n}{n^{\rho}} \Bigg|^2.$$

Просуммируем обе части полученного соотношения по всем нулям функции $\zeta_0(s)$ из прямоугольника $\sigma \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1,\ |\mathrm{Im}\rho| \leqslant T$. Найдем

$$N_0(\sigma,T) = \sum_{\rho}\Big|\sum_{X<n\leqslant NX}\frac{a_n}{n^{\rho}}\Big|^2.$$

Преобразуем сумму по ρ. Возьмем $A = [\ln T]$ и разобьем отрезок $[-T;T]$ на отрезки длины 1 вида

$$Am+n,\quad n=1,\ldots,A;\quad |m| < TA^{-1}+1.$$

Тогда схематически можно записать

$$\sum_{\rho} = \sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{n=1}^{A}\sum_{\substack{\sigma\leqslant\mathrm{Re}\rho\leqslant1\\ Am+n-1<\mathrm{Im}\rho\leqslant Am+n}} = \sum_{n=1}^{A}\sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{\substack{\sigma\leqslant\mathrm{Re}\rho\leqslant1\\ Am+n-1<\mathrm{Im}\rho\leqslant Am+n}} \leqslant$$
$$\leqslant A\max_{1\leqslant n\leqslant A}\sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{\substack{\sigma\leqslant\mathrm{Re}\rho\leqslant1\\ Am+n-1<\mathrm{Im}\rho\leqslant Am+n}}.$$

По следствию из теоремы 3 количество нулей ρ в каждом прямоугольнике $Am + n - 1 < \mathrm{Im}\rho \leqslant Am + n$ не превосходит $c_2 \ln N$. Тогда выбирая по одному нулю из каждого такого прямоугольника, получим не более $c_3 \ln N$ сумм. Обозначим через $\sum_{\rho}{}'$ наибольшую из них и получим

$$\sum_{\rho} \ll \ln^2 N {\sum_{\rho}}'.$$

Теперь, разбивая сумму $\sum_{\rho}{}'$ на не более чем $c_4 \ln T$ сумм, объединяя в одну сумму слагаемые, у которых $T_1 \leqslant |\mathrm{Im}\rho| \leqslant 2T_1 \leqslant T$, найдем

$$N(\sigma,T) \ll \ln^2 N \ln T {\sum_{\rho}}''\Big|\sum_{X<n\leqslant NX}\frac{a_n}{n^{\rho}}\Big|^2, \tag{10}$$

причем суммирование в сумме $\sum_{\rho}{}''$ ведется по нулям ρ функции $\zeta_0(s)$, $T_1 \leqslant |\mathrm{Im}\rho| \leqslant 2T_1 \leqslant T$, $\sigma \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1$, $|\mathrm{Im}\rho - \mathrm{Im}\rho'| \geqslant \ln T - 1$.

Применим оценку (7) из леммы 2. Имеем

$${\sum_{\rho}}''\Big|\sum_{Y<n\leqslant 2Y}\frac{b_n}{n^{\rho}}\Big|^2 \ll (T_1Y^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma})\ln^6 Y.$$

Теперь, разбивая в (10) сумму на $\ll \ln T$ сумм и применяя оценку (7) (заметим, что в этом случае $X \leqslant Y \leqslant XN$), найдем

$${\sum_{\rho}}''\Big|\sum_{X<n\leqslant XN}\frac{a_n}{n^{\rho}}\Big|^2 \ll (TY^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma})(\ln Y)^6 \ll$$
$$\ll (TX^{1-2\sigma} + (NX)^{2-2\sigma})(\ln(NX))^6 \ll T^{2(1-\sigma)}N^{2(1-\sigma)(2\sigma-1)}(\ln N)^6.$$

Итак из (10) получим

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)} N^{2(1-\sigma)(2\sigma-1)} (\ln N)^8 \ln T.$$

1. *Карацуба А.Л.* Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
2. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Техтеолит, 1956. – 632 с.
3. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953. – 407 с.

E. A. Bashtynskaya

A density theorem for partial sum of Dirichlet series.

Density theorems play important role in studying of zero sets of zeta-function and Dirichlet series. It provide an estimate of the quantity of zeros in a given rectangle inside the critical strip. A density theorem for partial sum of Dirichlet series of Riemann zeta-function have been obtained in the work.

Keywords: *Riemann zeta-function, Dirichlet series, density theorem, Riemann's conjecture.*

Є. О. Баштинська

Щільнісна теорема для часткової суми ряду Діріхле.

Щільнісні теореми відіграють важливу роль при вивченні розподілу нулів дзета-функції та рядів Діріхле. Вони дають оцінку кількості нулів у заданому прямокутнику всередині критичної смуги та використовуються в багатьох проблемах аналітичної теорії чисел. У роботі отримано щільнісну теорему для часткової суми ряду Діріхле дзета-функції Рімана.

Ключові слова: *дзета-функція Рімана, ряди Діріхле, щільнісні теореми, гіпотеза Рімана.*

Донецкий национальный ун-т
bashtynskaya.evgeniya@gmail.com

Получено 21.07.12