ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2012. Том 25

УДК 517.5

 Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

ОЦЕНКИ ИСКАЖЕНИЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

В данной работе получена оценка искажения отношения $\frac{|f(y)-f(x)|}{d(f(x),\partial D')}$ при отображениях с неограниченной характеристикой квазиконформности.

Ключевые слова: *Модуль семейства кривых, квазиконформные отображения, Q-гомеоморфизмы.*

1. Введение. В последнее время активно развивается теория так называемых Q-гомеоморфизмов. В статье [1], для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q-гомеоморфизмов, введенных О. Мартио. Основной целью теории Q-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств функции $Q(x)$ в модульном неравенстве. Развитие этой теории начиналось в работах [5]-[6]. Высокий уровень абстракции теории Q-отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удается установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [4] и [7].

Напомним следующие определения, которые можно найти в [2], [7]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\ ds \ \geq\ 1$$

для всех локально спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ есть величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho\in adm\ \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\ dm(x).$$

Напомним также, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ между двумя областями в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *K-квазиконформным*, $1 \leq K < \infty$, если

$$K^{-1}M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma) \tag{1}$$

для любого семейства кривых Γ в D.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [1,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup\{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f(\Gamma)) \ \leq \int\limits_{D} Q(x)\cdot\rho^n(x)\ dm(x) \tag{2}$$

для любого семейства Γ кривых в D и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Это понятие является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля, см., напр., разд. 13.1 и 34.6 в [2].

Одной из целей данной работы является получение аналога следующего результата при $n \geq 2$ из работы Ю. Вяйсяля для более общих классов, см. теорему 18.1 в [2]. Указанный выше результат впервые был получен в работе Ф. Геринга, см. теорему 11 в [3] при $n = 3$.

Теорема Ф. Геринга–Ю. Вяйсяля. *Для каждого $K \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, существует функция $\theta_K^n : (0,1) \to \mathbb{R}^1$ со следующими свойствами:*

1) θ_K^n – возрастающая;

2) $\lim\limits_{r\to 0} \theta_K^n(r) = 0$;

3) $\lim\limits_{r\to 1} \theta_K^n(r) = \infty$;

4) Пусть D и D' – собственные подобласти в $\mathbb{R}^n$ и пусть $f : D \to D'$ – K-квазиконформный гомеоморфизм. Если x и y – точки в D такие, что $0 < |y-x| < d(x, \partial D)$, тогда

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d(f(x),\partial D')} \ \text{и}\ \frac{|f(y)-f(x)|}{d(f(y),\partial D')} \leq \theta_K^n\left(\frac{|y-x|}{d(x,\partial D)}\right).$$

2. Предварительные замечания. Начнем с краткого изложения необходимых определений и теорем, которые можно найти, напр., в [2]. Область $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – *кольцо*, если $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus A$ состоит в точности из двух компонент. Если компонентами $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus A$ являются C_0 и C_1, то $A = R(C_0, C_1)$. Каждое кольцо $A = R(C_0, C_1)$ ассоциируется с семейством кривых $\Gamma_A = \Delta(B_0, B_1, A)$, где $B_0 = C_0 \cap \overline{A}$ и $B_1 = C_1 \cap \overline{A}$ – компоненты ∂A.

Пусть $r > 0$, $\Phi_n(r)$ – множество всех колец $A = R(C_0, C_1)$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ со следующими свойствами:

1) C_0 содержит нуль и точку a такую, что $|a| = 1$;

2) C_1 содержит ∞ и точку b такую, что $|b| = r$.

Тогда

$$\mathcal{H}_n(r) = \inf M(\Gamma_A),$$

где инфимум берется по всем кольцам $A \in \Phi_n(r)$.

Следующий результат также доказан Ю. Вяйсяля, см. теорему 11.7 в [2].

Предложение 1. *Функция $\mathcal{H}_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ обладает следующими свойствами:*

1) $\mathcal{H}_n$ – убывающая;

2) $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{H}_n(r) = 0$;

3) $\lim\limits_{r\to 0} \mathcal{H}_n(r) = \infty$;

4) $\mathcal{H}_n(r) > 0$ для каждого $r > 0$.

Следующий результат может быть найден в работе [2], см. теорему 11.9.

Предложение 2. *Предположим, что $A = R(C_0, C_1)$ – кольцо и что $a,\ b \in C_0$ и $c,\ \infty \in C_1$. Тогда*

$$M(\Gamma_A) \geq \mathcal{H}_n\left(\frac{|c-a|}{|b-a|}\right). \tag{3}$$

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть D и D' – собственные подобласти в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфизм с условием*

$$q_x(t) \leq M(x), \tag{4}$$

где $q_x(t)$ – среднее значение функции $Q(x)$ по сфере $|z-x| = t$ и $M(x) : D \to [1, \infty]$. Если x и y – точки в D такие, что $0 < |y-x| < d(x, \partial D) = d$, тогда

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d'} \leq \Theta\left(x, \frac{|y-x|}{d}\right), \tag{5}$$

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d''} \leq \Theta\left(y, \frac{|y-x|}{d}\right), \tag{6}$$

где $d' = d(f(x), \partial D')$, $d'' = d(f(y), \partial D')$, $\Theta(x,t) = 1/\mathcal{H}_n^{-1}\left(\frac{\omega_{n-1}\ M(x)}{(\ln \frac{1}{t})^{n-1}}\right)$, где ω_{n-1} – нормированная $(n-1)$-мерная хаусдорфова мера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Здесь и далее $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$. Пусть $f : D \to D'$, а x, y – точки в D такие, что $0 < |y-x| < d$. Пусть также $A = \{z \mid |y-x| < |z-x| < d\}$ – сферическое кольцо, тогда $A \subset D$. Полагая $f(C_0) = f(\overline{B(x, |y-x|)})$ и $f(C_1) = Cf(B(x,d))$, имеем $f(A) = R(f(C_0), f(C_1))$. Здесь $f(C_0)$ содержит $f(x)$ и $f(y)$, а $f(C_1)$ содержит ∞. По предложению 2, см. теорему 11.9 в [2],

$$M(f(\Gamma_A)) \geq \mathcal{H}_n\left(\frac{d'}{|f(y)-f(x)|}\right), \tag{7}$$

$$M(f(\Gamma_A)) \geq \mathcal{H}_n\left(\frac{d''}{|f(y)-f(x)|}\right), \tag{8}$$

где $\mathcal{H}_n(r) = \inf M(\Gamma_A)$ для $r > 0$.

С другой стороны $M(f(\Gamma_A)) \leq \int\limits_D Q(z)\rho^n(z)dm(z)$, поскольку f – Q-гомеоморфизм. Пусть

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z-x| \ln \frac{d}{|y-x|}}, & \text{если } z \in A, \\ 0, & \text{если } z \notin A. \end{cases}$$

Тогда $\rho(z)$ – допустимая функция для Γ_A по теореме 5.7 работы [2] и, следовательно,

$$M(f(\Gamma_A)) \leq \left(\ln \frac{d}{|y-x|}\right)^{-n} \int\limits_A Q(z) \frac{dm(z)}{|z-x|^n}. \tag{9}$$

Следовательно, по теореме Фубини, см. теорему 2.6.2 в [8, с. 130].

$$\int\limits_{A} Q(z)\frac{dm(z)}{|z-x|^n} = \omega_{n-1}\int\limits_{|y-x|}^{d}\frac{q_x(t)}{t}dt.$$

Используя условия (4), (7) и (9), получаем

$$\mathcal{H}_n\left(\frac{d'}{|f(y)-f(x)|}\right) \leq \frac{\omega_{n-1}\ M(x)}{\left(\ln\frac{d}{|y-x|}\right)^{n-1}}. \tag{10}$$

Так как $\mathcal{H}_n$ – убывающая функция по (11.7) в [2], то из (10) получаем

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d'} \leq 1/\mathcal{H}_n^{-1}\left(\frac{\omega_{n-1}\ M(x)}{\left(\ln\frac{d}{|y-x|}\right)^{n-1}}\right).$$

Таким образом, доказано соотношение (5). Рассуждая аналогичным образом, приходим к (6). □

Из теоремы 1 следует следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть D и D' – собственные подобласти в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфизм и для почти всех $t \in [0,d]$*

$$q_x(t) \leq M,$$

где $q_x(t)$ – среднее значение функции $Q(x)$ по сфере $|z-x| = t$ и M – некоторая положительная постоянная. Если x и y – точки в D такие, что $0 < |y-x| < d(x,\partial D) = d$, то

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d'} \leq \Theta_M\left(\frac{|y-x|}{d}\right),$$

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{d''} \leq \Theta_M\left(\frac{|y-x|}{d}\right),$$

где $\Theta_M(t) = 1/\mathcal{H}_n^{-1}\left(\frac{\omega_{n-1}M}{(\ln\frac{1}{t})^{n-1}}\right)$.

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397-1420.
2. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. – 229. – Berlin: Springer–Verlag, 1971.
3. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 103. – P. 353-393.
4. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193-203.

6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – Vol. 30, № 1. – P. 49-69.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009.
8. Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

Estimates of mappings for distortions with unlimited characteristics of quasiconformness.

In this article, one estimate of the distortion of ratio $\frac{|f(y)-f(x)|}{d(f(x),\partial D')}$ under mappings with unbounded characteristics of quasiconformnality are obtained.

Keywords: *Moduli of curves families, quasiconformal mappings, Q-homeomorphisms.*

О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салімов

Оцінки спотворень для відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності.

У даній роботі отримано оцінку спотворення відношення $\frac{|f(y)-f(x)|}{d(f(x),\partial D')}$ при відображеннях з не обмеженою характеристикою квазіконформності.

Ключові слова: *Модуль сімей кривих, квазіконформні відображення, Q-гомеоморфізми.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru
ruslan623@yandex.ru

Получено 10.10.12