УДК 531.36, 517.977

©2012. **Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев**

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ГИБРИДНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

В работе рассмотрен класс нелинейных систем, удовлетворяющих ранговому условию достижимости. Предложена схема решения задачи стабилизации, основанная на применении семейства разрывных функций управления на конечном промежутке времени и непрерывной обратной связи. Данная схема развивает подход A. Astolfi на случай начальных условий из полной окрестности особой точки. Полученные результаты проиллюстрированы на примере неголономной системы, которая не является стабилизируемой посредством непрерывной обратной связи.

Ключевые слова: *нелинейная система, достижимость, управляемость, стабилизируемость.*

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где x – фазовый вектор, u – вектор управления, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^1(D \times U)$, $0 \in D$, $0 \in U$, $f(0,0) = 0$.

В статье [1] предложены разрывные законы управления, которые гарантируют экспоненциальную сходимость решений к нулю в открытом и плотном множестве $\Omega \subseteq D$, которое, вообще говоря, не является связным. Целью данной работы является распространение такого подхода на случай произвольных начальных условий, чтобы обеспечить сходимость к нулю решений системы (1) при условии $x(0) \in D/\Omega$. Для этого рассмотрим сначала двухточечную задачу управления для начального ($x|_{t=0} = \xi$) и конечного ($x|_{t=\tau} = y$) состояний системы из некоторой Δ-окрестности нуля.

Предложенный в следующем разделе закон управления будет использован для переведения состояния системы (1) из множества D в Ω с последующей экспоненциальной стабилизацией посредством обратной связи.

2. Приближенное решение двухточечной задачи управления. Пусть при некотором $\tau > 0$ имеется семейство функций управления $u = v(t,a) \in U$, $t \in [0,\tau]$, зависящих от параметра $a \in G \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq n$. Обозначим через $x(t;\xi,v(\cdot,a))$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, v(t,a)), \quad t \in [0,\tau], \tag{2}$$

$$x|_{t=0} = \xi \in D. \tag{3}$$

Далее будем предполагать, что при всех $\xi \in D$ и $a \in G$ выполнены условия существования, единственности и дифференцируемости по (ξ,a) решения $x(t;\xi,v(\cdot,a))$ задачи Коши (2)-(3). Достаточные условия дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам описаны, например, в книге [2, с. 119]. Далее рассмотрим вопрос о приближенной разрешимости двухточечной задачи управления.

Следуя работе [3], предположим, что существуют $\tau > 0$, $a^* \in G$, для которых выполнены условия:

$$x(\tau; 0, v(\cdot, a^*)) = 0, \quad rank\left(\frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a}\right)\Bigg|_{a=a^*} = n. \tag{4}$$

Обозначим $F(\xi, \tilde{a}) = x(\tau; \xi, v(\cdot, a^* + \tilde{a}))$, и будем предполагать, что F дифференцируема в нуле, $F(0,0) = 0$ и $rank\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{a}}\right)\Big|_{\xi=0,\tilde{a}=0} = n$. При таких условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что решение $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши (2)-(3) удовлетворяет условиям (4) при некоторых $\tau > 0$, $a^* \in G$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для всех $\|\xi\| < \Delta$ и $\|y\| < \Delta$ выполняется условие:*

$$\|x(\tau; \xi, v(\cdot, a^* + \tilde{a})) - y\| < \Delta\varepsilon, \tag{5}$$

где

$$\tilde{a} = (M_2(\tau))^+[y - M_1(\tau)\xi], \tag{6}$$

а $M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$ – матрицы Якоби размерностей $n \times n$ и $n \times p$, соответственно:

$$M_1(\tau) = \frac{\partial F(\xi, \tilde{a})}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=0,\tilde{a}=0}, \qquad M_2(\tau) = \frac{\partial F(\xi, \tilde{a})}{\partial \tilde{a}}\Bigg|_{\xi=0,\tilde{a}=0}.$$

Здесь символ + обозначает псевдообратную матрицу [4].

Доказательство. Так как F дифференцируема в нуле, то воспользовавшись формулой Тейлора, получим

$$F(\xi, \tilde{a}) = F(0,0) + M_1(\tau)\xi + M_2(\tau)\tilde{a} + R(\xi, \tilde{a}),$$

где остаточный член $R(\xi, \tilde{a})$ обладает свойством $\|R(\xi, \tilde{a})\| \leq \alpha(\xi, \tilde{a})(\|\xi\| + \|\tilde{a}\|)$, $\alpha(\xi, \tilde{a}) \to 0$ при $\xi \to 0$, $\tilde{a} \to 0$.

Для фиксированных ξ, $y \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное уравнение относительно $\tilde{a}$:

$$F(\xi, \tilde{a}) = y. \tag{7}$$

Отбросим в уравнении нелинейные члены и найдем решение линеаризованного уравнения

$$M_1(\tau)\xi + M_2(\tau)\tilde{a} = y.$$

В результате получим

$$\tilde{a} = (M_2(\tau))^+[y - M_1(\tau)\xi]. \tag{8}$$

Оценим невязку в нелинейном уравнении (7) при таком выборе $\tilde{a}$, полагая, что $\|\xi\| < \Delta$, $\|y\| < \Delta$:

$$\|F(\xi, \tilde{a}) - y\| = \|M_1(\tau)\xi + M_2(\tau)(M_2(\tau))^+[y - M_1(\tau)\xi] + R(\xi, \tilde{a}) - y\| =$$

$$= \|R(\xi, (M_2(\tau))^+[y - M_1(\tau)\xi])\| \le \alpha(\xi, \tilde{a}) \left(\|\xi\| + \|(M_2(\tau))^+\|(\|y\| + \|M_1(\tau)\|\|\xi\|)\right) \le$$

$$\le \alpha(\xi, \tilde{a}) \left(\Delta + \|(M_2(\tau))^+\|(\Delta + \|M_1(\tau)\|\Delta)\right). \tag{9}$$

В силу свойств функции $\alpha(\xi, \tilde{a})$, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\varepsilon_1(\varepsilon) > 0$:

$$\alpha(\xi, \tilde{a}) \le \frac{\varepsilon}{1 + \|(M_2(\tau))^+\|(1 + \|M_1(\tau)\|)},$$

при $\|\xi\| < \varepsilon_1$, $\|\tilde{a}\| < \varepsilon_1$.

Выберем $\Delta > 0$ из условий

$$\begin{cases} \Delta \le \varepsilon_1; \\ \|(M_2(\tau))^+\|(\Delta + \|M_1(\tau)\|\Delta) \le \varepsilon_1; \\ \Delta \le \dfrac{\varepsilon_1}{\|(M_2(\tau))^+\|(1 + \|M_1(\tau)\|)}. \end{cases}$$

Таким образом, можно положить

$$\Delta = \varepsilon_1 \min\left\{1, \frac{1}{\|(M_2(\tau))^+\|(1 + \|M_1(\tau)\|)}\right\}.$$

По $\varepsilon > 0$ находим $\varepsilon_1 > 0$ и $\Delta > 0$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при таком $\Delta > 0$ из неравенства (9) следует

$$\|F(\xi, \tilde{a}) - y\| < \Delta\varepsilon$$

для любых $\|\xi\| < \Delta$, $\|y\| < \Delta$. □

Лемма. *При выполнении условий теоремы 1 матрицы $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$ обладают следующими свойствами:*

$$\|M_1(t)\| \le \sqrt{n} e^{K_1 t} \xi, \qquad \|M_2(t)\| \le \frac{K_2}{K_1}(1 + e^{K_1 t}), \quad t \in [0, \tau], \tag{10}$$

где K_1, K_2 – положительные константы.

Доказательство. Обозначим

$$J_x(t) = \left.\frac{\partial f(x, v(t, a^*))}{\partial x}\right|_{x = x(t; 0, v(\cdot, a^*))},$$

$$J_u(t) = \left.\frac{\partial f(x(t; 0, v(\cdot, a)), v(t, a))}{\partial a}\right|_{a = a^*}. \tag{11}$$

Определим константы $K_1, K_2 > 0$ из условия:

$$\|J_x(t)\| \le K_1, \qquad \|J_u(t)\| \le K_2, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

При введенных обозначениях

$$\frac{\partial F(\xi, \tilde{a})}{\partial \xi} = M_1(\tau),$$

где $M_1(\tau)$ – решение задачи Коши [2, с. 119] вида

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = J_x(t)M_1(t),$$

$$M_1(0) = I,$$

где I – единичная матрица.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{M}_1(t) = J_x(t)\big|_{x=x(t;0,v(\cdot,a^*))} M_1(t). \tag{12}$$

Введем функцию

$$w_1(M_1(t)) = \frac{1}{2}\|M_1(t)\|^2 \tag{13}$$

и продифференцируем её в силу уравнения (12):

$$\frac{d}{dt}w_1(M_1(t)) = (J_x(t)M_1(t), M_1(t)) \le \|J_x(t)\|\|M_1(t)\|\|M_1(t)\| \le$$

$$\le 2\|J_x(t)\|w_1(M_1(t)) \le 2K_1 w_1(M_1(t)).$$

Напишем уравнение сравнения для полученного дифференциального неравенства

$$\dot{w}_1(t) = 2K_1 w_1(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $w_1(t) = w_1^0 e^{2K_1 t}$, $w_1(0) = w_1^0 \ge 0$. Получим оценку решения дифференциального уравнения (12).

Из равенства (13) получим $\|M_1(t)\|^2 = 2w_1(M_1(t)$ и $w_1^0 = w_1(0) = \frac{1}{2}\|M_1(0)\|^2$, $\|M_1(t)\|^2 = 2w_1^0 e^{2K_1 t} = 2 \cdot \frac{1}{2}\|M_1(0)\|^2 \cdot e^{2K_1 t} = e^{2K_1 t}$.

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial F(\xi,\tilde{a})}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0,\tilde{a}=a^*} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(\xi,\tilde{a})}{\partial \xi_k}\bigg|_{\xi_k=0,\tilde{a}=a^*} \cdot \xi_k \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left\| \frac{\partial F(\xi,\tilde{a}))}{\partial \xi_k}\bigg|_{\xi_k=0,\tilde{a}=a^*} \right\| \cdot \|\xi_k\| \right\} \le e^{K_1 t} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| = \sqrt{n} e^{K_1 t} \xi.$$

Далее рассмотрим $M_2 = \dfrac{\partial F(\xi,\tilde{a})}{\partial a}$ – $n \times p$ матрицу, $t \in [0,\tau]$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}M_2(t) = J_x(t)M_2(t) + J_u(t), \tag{14}$$

с начальными условиями $M_2(0) = 0$, где $J_u(t)$ введено в (11), и $\|J_u(t)\| \le K_2$.

Введем функцию

$$w_2(t) = \frac{1}{2}\|M_2(t)\|^2, \tag{15}$$

тогда

$$\frac{d}{dt}w_2(M_2(t)) = (J_x(t)M_2(t) + J_u(t), M_2(t)) \leq$$
$$\leq \|J_x(t)\|\|M_2(t)\|^2 + \|J_u(t)\|\|M_2(t)\| \leq 2K_1w_2(t) + K_2\sqrt{2w_2(t)}.$$

Теперь напишем уравнение сравнения:

$$\dot{w}_2(t) = 2K_1w_2(t) + K_2\sqrt{2w_2(t)}.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$w_2(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K_2}{K_1} + \left(\sqrt{w_2^0} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K_2}{K_1}\right)e^{K_1t}\right)^2, \qquad w_2(0) = w_2^0 \geq 0.$$

Напишем оценку решения дифференциального уравнения (14).

Из равенства (15) следует, что

$$\|M_2(t)\|^2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K_2}{K_1} + \left(\sqrt{\frac{1}{2}\|M_2(0)\|^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K_2}{K_1}\right)e^{K_1t}\right)^2.$$

Из теоремы 3.1 [2] имеем, что $\|M_2(0)\| = 0$, таким образом

$$\|M_2(t)\| \leq \frac{K_2}{K_1}(1 + e^{K_1t}).$$

□

Проиллюстрируем схему управления, описанную в теореме 1, на следующем примере.

3. Стабилизация модельной неголономной системы. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1\cos x_3, \\ \dot{x_2} = u_1\sin x_3, \\ \dot{x_3} = u_2, \end{cases} \tag{16}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ – управление.

Система (16) является кинематической моделью качения колеса по плоскости в случае управления скоростью [5, с. 184]. Известно [6], что система (16) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{z_1} = l_1, \\ \dot{z_2} = l_2, \\ \dot{z_3} = z_2l_1 - z_1l_2 \end{cases} \tag{17}$$

посредством преобразования

$$\begin{aligned} &z_1 = x_3, \\ &z_2 = x_1\cos x_3 + x_2\sin x_3, \\ &z_3 = 2(x_1\sin x_3 - x_2\cos x_3) - x_3(x_1\cos x_3 + x_2\sin x_3), \\ &l_1 = u_2, \\ &l_2 = u_1 - u_2(x_1\sin x_3 - x_2\cos x_3). \end{aligned} \tag{18}$$

Система вида (17) известна в литературе как интегратор Брокетта [7] или система Гейзенберга [5].

Поскольку система (17) не удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости Брокетта [7], то не существует непрерывной функции обратной связи, решающей задачу стабилизации системы (17).

Для стабилизации системы (17) рассмотрим закон управления, описанный в работе [1, с. 51]:

$$\begin{cases} l_1 = -\mu z_1 - g\dfrac{bz_2^{n-1}}{az_1^n + bz_2^n} z_3, \\ l_2 = -\mu z_2 + g\dfrac{az_1^{n-1}}{az_1^n + bz_2^n} z_3, \end{cases} \tag{19}$$

где $|a| + |b| > 0$, $a, b, g \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$. Множество, где закон управления (19) разрывен, задается следующим образом: $H_0 = \{z \in \mathbb{R}^3 | \quad az_1^n + bz_2^n = 0\}$. Положим $n = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$, $g = 1$, $a = b = 1$, и преобразуем управление (19) в функцию обратной связи исходной системы (16):

$$u_2 = \alpha_2(x(t)) = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3}{{x_3}^2 + (x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3)^2}\times$$

$$\times[2(x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3) - x_3(x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3)]; \tag{20}$$

$$u_1(t) = \alpha_1(x(t)) = \alpha_2(x(t))(x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3) - \frac{1}{2}(x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3) +$$

$$+\frac{x_3}{x_3^2 + (x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3)^2}[2(x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3) - x_3(x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3)]. \tag{21}$$

Для системы (16) множество точек разрыва функции обратной связи (20), (21) имеет вид

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 | \quad {x_3}^2 + (x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3)^2 = 0\}.$$

Для стабилизации тривиального решения системы (16) применим гибридный закон управления, состоящий из комбинации функций управления с переключениями в теореме 1 и обратной связи, обеспечивающей экспоненциальную сходимость решений к нулю в $\mathbb{R}^3 \setminus H$.

Пусть ν – единичная нормаль к поверхности H в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В условиях теоремы 1 положим $y = k\nu$. Тогда при достаточно малых x^0, k решение системы (16) с управлением $u = v(t, a^* + \tilde{a})$, где $\tilde{a}$ задается формулой (6), удовлетворяет условию

$$\|x(\tau; x^0, v(\cdot, a^* + \tilde{a})) - y\| < \Delta\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $x(\tau; x^0, v(\cdot, a^0 + \tilde{a})) \notin H$ при $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $\|y\| < \Delta(\varepsilon)$, $\|x^0\| < \Delta(\varepsilon)$. В момент времени $t = \tau$ применим обратную связь (20)-(21). Таким образом, предлагаемый закон управления может быть представлен следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} v(t, a^* + \tilde{a}), & t \le \tau; \\ \alpha(x(t)), & t > \tau. \end{cases} \tag{22}$$

Как было отмечено выше, $x(\tau; x^0, v(\cdot, a^* + \tilde{a})) \notin H$, следовательно, управление (22) обеспечивает экспоненциальную сходимость $x(t)$ к 0 при $t \to +\infty$ для любых начальных условий $\|x^0\| < \Delta(\varepsilon)$.

Проиллюстрируем предложенную схему стабилизации на примере системы (16) с управлением

$$v(t,a) = \begin{cases} +1, \text{если} \quad t \in S_1 \cup S_3; \\ -1, \text{если} \quad t \in S_2 \cup S_4; \\ 0, \text{иначе}, \end{cases} \tag{23}$$

где $S_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^{j} a_i\right)$ для $j = 2, 3, 4$ и вектора $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ с положительными компонентами. В случае $j = 1$ положим $S_1 = [0, a_1)$.

При $a = a^* \approx (4.42, 1.07, 3.91, 7.17)$ семейство управлений (23) удовлетворяет условиям теоремы 1. Для вычислений положим $k = 0.1$, $x^0 = (0, \frac{1}{2}, 0) \in H$, $\tau \approx 16.57$. Тогда $x(\tau) = (0.1, 0.0037, 0.066) \notin H$.

Результаты численного интегрирования системы (16) с управлением (22) при $t \geq \tau$ показаны на рис. 1.

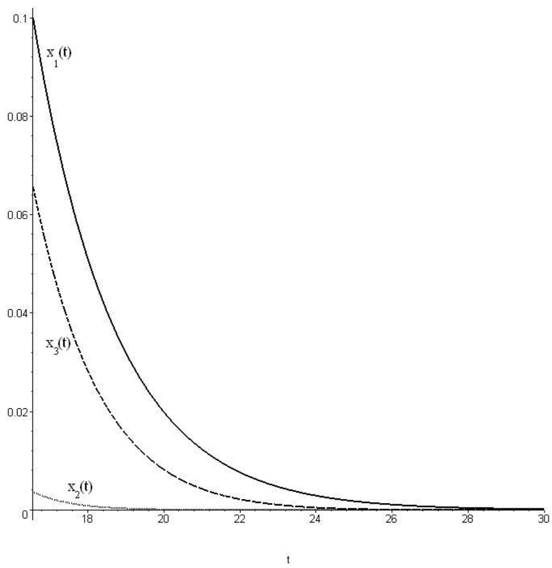

Рис. 1. Решение системы (16) с управлением (22).

Заключение. В данной работе предложена гибридная схема управления, которая обеспечивает экспоненциальную сходимость решений нелинейной системы к особой точке. Используемая схема сочетает функции управления с переключениями на конечном промежутке времени с функцией обратной связи, которая определена на плотном подмножестве фазового пространства. Рассмотренный пример неголономной системы подтверждает возможность стабилизации системы с конструктивным определением функции управления.

Представляет дальнейший интерес оценка отклонения траекторий от положения равновесия на отрезке $t \in [0, \tau]$ при использовании управления (22).

1. *Astolfi A.* Discontinuous Control of the Brockett Integrator // European Journal of Control. – 1998. – **4**. – P. 49-63.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 720 с.
3. *Астахова Т.Н., Зуев А.Л.* Стабилизация нелинейных систем в классе функций управления с дискретными переключениями // Ученые записки ТНУ им.В.И. Вернадского. – 2011. – Сер. "Физико-математические науки". – Том 24 (63) №3. – С. 1-9.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. *Bloch A.* Nonholonomic Mechanics and Control. – New York: Springer, 2003. – 483 p.
6. *Sontag E.D.* Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances // in: Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (Proc. NATO Advanced Study Institute, Montreal). – Kluwer, 1998. – P. 551-598.
7. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and feedback stabilization // in: Differential Geometric Control Theory (R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, eds.). – Boston: Birkhäuser, 1983. – P. 181–191.

T. N. Astakhova, A. L. Zuyev

Exponential stabilization of a class of nonlinear system by means of a hybrid control law.

Nonlinear systems satisfying the accessibility rank condition are analyzed in this paper. In order to solve the stabilization problem, we propose a scheme based on the application of a family of discontinuous controls in finite time and a continuous feedback afterwards. The proposed scheme extends A. Astolfi's approach for the case of initial conditions from a complete neighborhood of the equilibrium. Obtained results are illustrated with the help of a nonholonomic system which is not stabilizable by a continuous feedback.

Keywords: *nonlinear system, accessibility, controllability, stabilizability.*

Т. М. Астахова, О. Л. Зуєв

Експоненціальна стабілізація класу нелінійних систем за допомогою гібридного закону керування.

У роботі розглянуто клас нелінійних систем, які задовольняють рангову умову досяжності. Запропоновано схему розв'язання задачі стабілізовності, що грунтується на застосуванні сім'ї розривних функцій керування на скінченному проміжку часу та неперервного зворотного зв'язку. Ця схема розвиває підхід A. Astolfi на випадок, коли початкові умови лежать у повному околі особливої точки. Отримані результати проілюстровано на прикладі неголономної системи, яка не є стабілізовною за допомогою неперервного зворотнього зв'язку.

Ключові слова: *нелінійна система, досяжність, керованість, стабілізовність.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ctn_af@mail.ru
al_zv@mail.ru

Получено 20.11.12