УДК 62-50,519.7

©2012. **В. Ф. Щербак**

СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложен новый метод решения задач стабилизации нелинейных управляемых динамических систем. Метод состоит в выборе управлений таким образом, чтобы произвольное $(n-m)$ – мерное многообразие с заданным граничным условием стало инвариантным и обладало свойством глобального притяжения для всех траекторий замкнутой системы. Исходная задача стабилизации решается далее на полученном многообразии. При этом в качестве управляющего воздействия используются функции, определяющие вид синтезированного многообразия. С использованием указанной схемы решена задача стабилизации вектора угловой скорости твердого тела с неподвижной точкой, совершающего вращение под действием двумерного управления.

Ключевые слова: *стабилизация нелинейных систем, инвариантные многообразия, управление, твердое тело с неподвижной точкой.*

1. Задача стабилизации динамических систем. Задача синтеза управлений, стабилизирующих отклонения от тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, является одной из основных в теории управления. В работе предлагается общий метод ее решения, состоящий в использовании управлений для синтеза дополнительных алгебраических соотношений, связывающих переменные исходной системы. Из полученных соотношений выбирается семейство, обеспечивающее глобальное притяжений траекторий к соответствующему многообразию в фазовом пространстве. Тем самым решение задачи проводится на множестве меньшей размерности. Если подобные построения могут быть проведены для любого многообразия рассматриваемого семейства, то такие алгебраические связи могут быть использованы в качестве нового управления уже для редуцированной динамической системы. Подобный прием был использован ранее для решения задач наблюдения, синхронизации решений нелинейных динамических систем, где инвариантные многообразия для системы уравнений в отклонениях формировали дополнительные алгебраические уравнения для определения неизвестных компонент фазового вектора [1], [2].

Будем считать, что динамика управляемого объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой зависят от управляющих воздействий – вектора $u \in R^m$, который может быть произвольной функцией фазового вектора $x \in R^n$. Представим x в виде двух подвекторов $x = (x_1, x_2)^T$, где $x_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^m)^T, x_2 = (x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^n)^T$ и запишем уравнения системы в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u). \end{aligned} \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке проекта украинско-австрийского сотрудничества (гос. рег. № 0111U007275).

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (1) допускает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Управления $u(x_1, x_2)$ будем считать допустимыми, если после их подстановки в правые части (1) для полученной замкнутой системы выполнены условия существования и единственности решений в некоторой области $x \in D \subseteq R^n$.

В работе рассматривается задача синтеза управлений для стабилизации системы (1). Она состоит в нахождении такой функции $u(x_1, x_2)$, при которой нулевое решение замкнутой системы становится асимптотически устойчивым.

2. Синтез инвариантных многообразий. Редукция динамической системы. Как уже было отмечено, предлагаемая схема решения заключается в установлении соответствия между множеством допустимых управлений и семейством синтезируемых с их помощью инвариантных многообразий для траекторий системы дифференциальных уравнений (1). Функции, определяющие эти многообразия, будут рассматриваться далее в качестве новых управлений.

Для этого на первом шаге выберем управление $u(x_1, x_2)$ таким, чтобы некое многообразие, задаваемое с помощью m алгебраических равенств

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 = \Psi(x_2)\} \tag{2}$$

стало инвариантным для некоторых траекторий системы (1). Здесь $\Psi(x_2)$ – неопределенная пока вектор-функция размерности m, для которой будем полагать выполненным

Предположение. В рассматриваемой области D функция $\Psi(x_2)$ является дифференцируемой. Кроме того, якобиева матрица $\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}$ является невырожденной и имеет ограниченную норму.

При сделанном предположении равенства $x_1 = \Psi(x_2)$ определяют в фазовом пространстве переменных x_1, x_2 многообразие размерности $n - m$. Выберем функцию $u(x_1, x_2)$ такой, чтобы M стало инвариантным многообразием системы дифференциальных уравнений (1). Для этого сделаем замену переменных x_1 по формуле

$$x_1 = \Psi(x_2) + \eta, \tag{3}$$

где η характеризует отклонение траекторий системы (1) от многообразия M. В результате система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_1(\Psi + \eta, x_2, u) - \Psi' f_2(\Psi + \eta, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(\Psi + \eta, x_2, u). \end{aligned} \tag{4}$$

Для того, чтобы многообразие M стало инвариантным для некоторых траекторий системы (1), достаточно, чтобы система (4) допускала ограниченное решение вида $\eta \equiv 0, x_2 = x_2(t)$. Такие решения у системы (4) будут существовать, если мы потребуем, чтобы первая группа уравнений, после подстановки некоторого допустимого управления $u(x_1, x_2)$, имела бы вид

$$\dot{\eta} = \lambda \eta + F(\eta, x_2), \tag{5}$$

где $F(\eta, x_2)$ неопределенная пока функция с граничным условием $F(0, x_2) = 0$.

Для определения такого управления рассмотрим равенства (5) как алгебраические уравнения относительно $u(x_1, x_2)$. Записав их в исходных переменных, с учетом того, что производная по времени взята в силу системы (1), получаем

$$f_1(x_1, x_2, u) - \Psi'(x_2) f_2(x_1, x_2, u) = \lambda(x_1 - \Psi(x_2)) + F(x_1 - \Psi(x_2), x_2). \tag{6}$$

В случае невырожденности якобиевой матрицы

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial u} - \Psi'(x_2) \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u}$$

для всех $(x_1, x_2) \in D$ решение алгебраической системы (6) существует и задается однозначной функцией $u = U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ в некоторой области. Предположим, что эта область включает в себя D.

Подставляя найденное решение в систему дифференциальных уравнений (4), получаем систему:

$$\begin{aligned} &\dot{\eta} = \lambda\eta + F(\eta, x_2), \\ &\dot{x}_2 = f_2(\Psi + \eta, x_2, U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')), \end{aligned} \tag{7}$$

которая, в случае допустимости $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$, очевидно имеет решения, у которых компоненты $\eta \equiv 0$.

Таким образом, показано, что для достаточно широкого класса функций $\Psi(x_2)$ соответствующие им многообразия M становятся инвариантными для траекторий исходной системы (1) с управлением $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$.

Замечание 1. После фиксации $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ система (1) преобразуется в систему (7). В общем случае, для решения задач управления системой (7) в нашем распоряжении оказываются $2m$ свободных функций: функции $\Psi(x_2)$, удовлетворяющие перечисленным выше ограничениям и функции $F(\eta, x_2)$ с m граничными условиями $F(0, x_2) = 0$.

Замечание 2. Для редукции фазового пространства в окрестность многообразия M требуется наличие у последнего свойства глобального притяжения для всех траекторий (1). Достаточным условием для этого является свойство асимптотической устойчивости тривиального решения системы (7) относительно части переменных η. Его можно обеспечить, например, полагая в (7) $\lambda < 0$ и $F(\eta, x_2) \equiv 0$. В этом случае получаем, что управляемая динамика описывается неавтономной подсистемой системы дифференциальных уравнений (7)

$$\dot{x}_2 = f_2(\Psi + \eta_0 \exp(\lambda t), x_2, U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')). \tag{8}$$

Для дифференциальных уравнений (8) можно повторить описанную процедуру выделения новой подсистемы типа (5) с управлением $\Psi'(x_2)$. Отличие от первого шага состоит в том, что, в общем случае, на втором шаге декомпозиции алгебраические уравнения вида (6) содержат $U(x_1, x_2, \Psi, \Psi')$ и являются системой уравнений в частных производных относительно $\Psi(x_2)$.

Если же в исходной системе (1) правые части f_2 не зависят от управления u (как в рассмотренной ниже задаче стабилизации вращений твердого тела), то дополнительных дифференциальных связей на функцию $\Psi(x_2)$ не возникает.

3. Схема решения задачи стабилизации. Основная идея предлагаемого способа синтеза стабилизирующих управлений состоит в том, что в качестве управлений для преобразованной системы (7) могут быть использованы остающиеся пока свободными функции $\Psi(x_2)$ и $F(\eta, x_2)$. Их выбор должен обеспечить асимптотическое стремление к нулю переменных x_1, x_2. Как известно, нахождение условий асимптотической устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений, в особенности по части переменных, является сложной проблемой. Поэтому в работе этот вопрос не рассматривается. Для каждой конкретной динамической системы алгоритм синтеза стабилизирующего управления подразумевает отдельное рассмотрение этой проблемы. В зависимости от способа ее решения можно конструировать различные законы управления в задаче стабилизации тривиального решения системы (7).

В данной работе предлагается следущая схема, которая реализована в рассмотренной ниже задаче стабилизации вращений твердого тела. Для стабилизации решений системы (1) достаточно выбрать функции $\Psi(x_2)$ и $F(\eta, x_2)$ такими, чтобы были выполнены условия:

1) Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (7) является асимптотически устойчивым.

2) Функция $\Psi(x_2)$ удовлетворяет граничному условию $\Psi(0) = 0$.

Действительно, в этом случае слагаемые $\eta(t)$ и $\Psi(x_2(t))$ в правой части равенств (3) (последнее в силу непрерывности) асимптотически стремятся к нулю, значит к нулю стремится и их сумма – переменная $x_1(t)$. При этом, в силу ограниченности $F(\eta, x_2)$, сохраняется свойство устойчивости для переменной $x_1(t)$.

4. Синтез управлений в задаче стабилизации угловой скорости твердого тела с неподвижной точкой. В качестве приложения изложенного подхода рассмотрим задачу стабилизации вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки под действием двумерного управления. Рассматриваемая система существенно нелинейна и является удобным объектом апробации для многих методов решения тех или иных задач управления. В частности, необходимые в данном случае свойства управляемости и стабилизируемости подробно изучены в [3]. Уравнения Эйлера, описывающие угловую скорость вращения, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= a_1\omega_2\omega_3 + u_1, \\ \dot{\omega}_2 &= a_2\omega_1\omega_3 + u_2, \\ \dot{\omega}_3 &= a_3\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости твердого тела, управления u_1, u_2 характеризуют моменты сил, приложенные к телу, коэффициенты $a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}$, параметры A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно главных осей. Предпалогается, что тело не является симметричным, т.е. $a_i \neq 0,\ i = 1,2,3$.

Задачей является нахождение функций (синтез управлений) $u_1(\omega), u_2(\omega)$, при которых любое решение системы дифференциальных уравнений (9) асимптотически стремится в начало координат. В соответствии с изложенной методикой, на первом этапе сделаем замену переменных

$$\omega_1 = \Psi_1(\omega_3) + \eta_1, \quad \omega_2 = \Psi_2(\omega_3) + \eta_2, \tag{10}$$

где функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$ характеризуют инвариантные многообразия замкнутой системы и будут использованы далее в качестве новых управлений.

Выберем $u_1(\omega), u_2(\omega)$ таким образом, чтобы после их подстановки в уравнения Эйлера (9) последние приняли бы вид:

$$\begin{aligned} \dot\eta_1 &= \lambda\eta_1 + F_1(\eta_1,\eta_2,\omega_3), \\ \dot\eta_2 &= \lambda\eta_2 + F_2(\eta_1,\eta_2,\omega_3), \\ \dot\omega_3 &= a_3(\Psi_1 + \eta_1)(\Psi_2 + \eta_2), \end{aligned} \tag{11}$$

где $F_1(\eta_1,\eta_2,\omega_3), F_2(\eta_1,\eta_2,\omega_3)$ неопределенные пока функции с граничным условием $F_1(0,0,\omega_3) = F_2(0,0,\omega_3) = 0$.

Составляя для рассматриваемой системы алгебраические уравнения (6) относительно $u_1(\omega), u_2(\omega)$, находим искомые управления:

$$\begin{aligned} u_1 &= -a_1\omega_2\omega_3 + a_3\acute{\Psi}_1\omega_1\omega_2 + \lambda(\omega_1 - \Psi_1) + F_1(\eta_1,\eta_2,\omega_3), \\ u_2 &= -a_2\omega_1\omega_3 + a_3\acute{\Psi}_2\omega_1\omega_2 + \lambda(\omega_2 - \Psi_2) + F_2(\eta_1,\eta_2,\omega_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, для любых непрерывно дифференцируемых функций $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$ с ограниченной в области D производной соответствующее им многообразие

$$M = \{(\omega) : \omega_1 = \Psi_1(\omega_3),\ \omega_2 = \Psi_2(\omega_3)\} \tag{13}$$

становится инвариантным для некоторых траекторий системы (9) после подстановки в нее управлений (12).

Для нахождения таких управлений (12), которые стабилизируют решения (9), потребуем выполнения следующих условий:

а) функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$, в дополнение к требованиям непрерывной дифференцируемости и ограниченности, должны удовлетворять граничным условиям $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$;

б) рассматриваемое семейство многообразий M должно обладать свойством глобального притяжения, т.е. $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$;

в) функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3), F_1(\eta_1,\eta_2,\omega_3), F_2(\eta_1,\eta_2,\omega_3)$ должны быть выбраны такими, чтобы $\lim_{t\to\infty} \omega_3(t) = 0$.

Тогда, в соответствии с равенствами (10) и в силу непрерывности $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$, получаем, что $\lim_{t\to\infty} \omega_i(t) = 0,\ i = 1,2$.

В частности, для выполнения всех перечисленных требований достаточно, чтобы нулевое решение системы дифференциальных уравнений (11) было асимптотически устойчивым. Для того, чтобы оно стало таковым, в нашем распоряжении остается выбор функций $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3), F_1(\eta_1, \eta_2, \omega_3), F_2(\eta_1, \eta_2, \omega_3)$ подчиненных нулевым граничным условиям.

Для нахождения этих функций рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}({\eta_1}^2 + {\eta_2}^2 + {\omega_3}^2)$$

и найдем ее производную в силу системы (11)

$$\dot{V} = \lambda{\eta_1}^2 + \lambda{\eta_2}^2 + a_3\omega_3\Psi_1\Psi_2 + (F_1 + a_3\omega_3\Psi_2)\eta_1 + (F_2 + a_3\omega_3\Psi_1)\eta_2 + a_3\eta_1\eta_2\omega_3.$$

Чтобы эта производная стала знакоопределенной, достаточно подчинить свободные функции следующим ограничениям:

$$\Psi_1(\omega_3)\Psi_2(\omega_3) = \frac{\lambda}{a_3}{\omega_3}^{2k-1},\ F_1 = -a_3\omega_3(\eta_1 + \frac{\eta_2}{2}),\ F_2 = -a_3\omega_3(\frac{\eta_1}{2} + \eta_2). \tag{14}$$

Здесь k – целое положительное число. Отметим, что при $k = 1$ не удается подобрать функции $\Psi_1(\omega_3), \Psi_2(\omega_3)$, удовлетворяющие нулевым граничным условиям и имеющие ограниченную производную в области, содержащей начало коорлинат. Поэтому, полагаем $k = 2$ и определяем вид функций, формирующих инвариантное многообразие M

$$\Psi_1(\omega_3) = \frac{\lambda}{a_3}\omega_3,\ \Psi_2(\omega_3) = {\omega_3}^2. \tag{15}$$

С учетом (14), (15) производная от функции Ляпунова становится знакоопределенной

$$\dot{V} = \lambda({\eta_1}^2 + {\eta_2}^2 + {\omega_3}^4),$$

что, при $\lambda < 0$, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, гарантирует асимптотическое стремление к нулю решений $\eta_1(t), \eta_2(t), \omega_3(t)$ системы (11) с начальными условиями из рассматриваемой области. Отсюда, с учетом равенств (10), следует стремление к нулю и переменных $\omega_1(t), \omega_2(t)$.

Отметим, что функции (14), (15) удовлетворяют всем приведенным выше ограничениям. Поэтому управления u_1, u_2 для исходной системы, полученные по формулам (12), являются допустимыми и решают задачу стабилизации угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

1. *Щербак В.Ф.* Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 127-132.
2. *Щербак В.Ф.* Синхронизация угловых скоростей гиростатов // Там же – 2009. – Вып. 39. – С. 127-132.
3. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 175 с.

V. F. Shcherbak

Synthesis of invariant manifolds in the problem of stabilization of dynamical systems.

A new method for solving the problems of stabilization for nonlinear control systems is proposed. On the first stage control is chosen so that manifold in the phase space become an invariant with the property of the global attraction for all trajectories closed-loop system. The initial problem is solved by further stabilization the resulting manifold. As the appropriate controls can be found for any manifold, then the form of manifolds serve as a new control. Using this scheme theb problem of stabilization of the angular velocity of rigid bodyis by two moments is solved.

Keywords: *stabilization of nonlinear systems, invariant manifolds, control, rigid body with a fixed point.*

В. Ф. Щербак

Синтез інваріантних многовидів у задачі стабілізації динамічних систем.

Запропоновано новий метод розв'язання задач стабілізації нелінійних керованих динамічних систем. Метод полягає у виборі керувань таким чином, щоб довільний $(n-m)$ мірний многовид із заданою граничною умовою став інваріантним та мав властивість глобального тяжіння для всіх траєкторій замкнутої системи. Вихідна задача стабілізації розв'язується далі на здобутому многовиді. При цьому в якості керувань використовуються функції, що визначають вид синтезованого многовида. З використанням зазначеної схеми розвэязано задачу стабілізації вектора кутової швидкості твердого тіла з нерухомою точкою, яка здійснить обертання під дією двовимірного керування.

Ключові слова: *стабілізація нелінійних систем, інваріантні многовиди, керування, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.02.12