УДК 517.5

©2012. **О. Д. Трофименко**

ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ

У роботі отримано теорему єдиності для розв'язку рівняння середніх значень, а також теорему, що вказує на точність зазначеної теореми єдиності.

Ключові слова: *теорема єдиності, теорема про середнє, сферичні середні.*

1. Вступ. Одним із напрямків у дослідженні класичної теореми про середнє є опис класів функцій, які задовольняють інтегральним рівнянням, що мають, у свою чергу, певний геометричний сенс. Результати з цього напрямку можна побачити у роботах М.О. Ріда (див.[1]), В.В. Волчкова (див.[2], [3]), а також у працях [4] та [5].

На шляху з'ясування вигляду функції, що є розв'язком наперед заданого рівняння, постає питання єдиності цього розв'язку.

У даній роботі отримано теорему єдиності (див. Теорема 1) для розв'язку рівняння із середнім значенням по кругу, до якого входить значення функції та деяких її похідних у центрі заданого круга. Показано, що Теорема 1 є точною (див. Теорема 2).

Для формулювання основних результатів роботи нам знадобляться наступні позначення.

Нехай B_R – відкрите коло радіуса R на $\mathbb{C}$ з центром у точці нуль. Для $\zeta \in \mathbb{C}$ позначимо $\zeta = \xi + i\eta$, де $\xi = \mathrm{Re}\zeta$ та $\eta = \mathrm{Im}\zeta$. Також $s \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ та $0 \le s \le m-1$.

Далі введемо для функції $f \in L^{1,loc}(B_R)$ відповідний ряд Фур'є

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{i\varphi k}, \tag{1}$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$ та

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-itk} dt. \tag{2}$$

Позначимо $\mathcal{E}'_{rad}(\mathbb{R}^2)$ множину всіх розподілів f в $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм таких, що $f(ze^{i\alpha}) = f(z)$ для кожного $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

2. Формулювання основних результатів. Теорема єдиності для функцій із відповідною гладкістю, що задовольняє інтегральному рівнянню, має наступний вигляд.

Теорема 1. *Нехай* $k \in \mathbb{Z}$, $f \in C^{|k|+2(m-1)-s}(B_R)$, $R > r$ *і* $f(z) = f_k(\rho) e^{ik\varphi}$. *Нехай* *також для $|z| < R - r$ функція f задовольняє рівнянню*

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi d\eta, \qquad (3)$$

та $f = 0$ в B_r. Тоді $f \equiv 0$ в B_R.

Наступною теоремою покажемо, що суттєво посилити умови Теореми 1 неможливо.

Теорема 2. *Для будь-якої $\varepsilon \in (0, r)$ існує $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ із наступними властивостями:*

1. *функція f задовольняє (3) для $z \in \mathbb{C}$;*
2. *$f = 0$ в $B_{r-\varepsilon}$;*
3. *$f \not\equiv 0$.*

3. Допоміжні конструкції. Для доведення Теореми 1 нам знадобляться наступні леми.

Лема 1. *Нехай $H \in C^s[r - R, R - r]$, $H(-x)(-1)^s = H(x)$ та*

$$h_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H(x \cos t) \cos st dt \equiv 0. \qquad (4)$$

Тоді H – поліном степеню не вище $s - 1$ при $s \ge 1$ та $H \equiv 0$ при $s = 0$.

Доведення. При $s = 0$ заміною інтегральне рівняння (4) приводиться до рівняння Абеля, звідки $H \equiv 0$.

Далі при $s = 1$ за допомогою наступної тотожності

$$h_s'(x) + \frac{s}{x} h_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) \cos(s-1) t dt.$$

отримаємо

$$h_1'(x) + \frac{1}{x} h_1(x) = \int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) dt = 0,$$

звідки H – деяка константа.

Тепер нехай $H = \sum\limits_{k=0}^{s-1} c_k x^s$ і при індексі $s + 1$ маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} H'(x \cos t) \cos st dt \equiv 0.$$

Беручи інтеграл по x від обох частин останньої рівності, отримаємо, що

$$H = \sum_{k=0}^{s} c_k x^s.$$

Отже, за індукцією отримаємо шукане твердження Леми 1. $\square$

Лема 2. *Нехай $r > 0$, $f \in C^{2m-2-s}(B_R)$, $R > r$. І нехай для даної функції на множині $|z| < R - r$ виконується рівність (3). Тоді $\forall \beta \in [0, 2\pi]$ і $\forall z \in B_{R-r}$ виконується рівність*

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(ze^{i\beta}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta e^{i\beta} - z e^{i\beta}| \leq r} f(\zeta) \left((\zeta - z)e^{i\beta}\right)^s d\xi d\eta.$$

Доведення. Зробимо заміну $\zeta' = \zeta e^{i\beta}$. Тоді (3) має вигляд

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(z) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta' e^{-i\beta} - z| \leq r} f(\zeta' e^{-i\beta}) \left(\zeta' e^{-i\beta} - z\right)^s d\xi d\eta.$$

Далі, змінюючи центр на $ze^{i\beta}$, отримаємо

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(ze^{i\beta}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta' - z e^{i\beta}| \leq r} f(\zeta' e^{-i\beta}) \left(\zeta' - z e^{i\beta}\right)^s d\xi d\eta.$$

Це і є шукана рівність. $\square$

Лема 3. *Нехай функція $f \in C^m(B_R)$, і для неї виконується рівність (3) при $|z| < R - r$. Тоді ця рівність виконується для кожного доданку ряду Фур'є (1) цієї функції, і навпаки.*

Доведення.

Необхідність.

Помножимо ліву і праву частини рівності (3) на $e^{-i\beta k}$ і проінтегруємо за β від $-\pi$ до π. Враховуючи Лему 2, маємо

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{ik\varphi} e^{i\beta k} e^{-i\beta k} d\beta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} (\zeta - z)^s \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\tilde{\rho}) e^{ik\gamma} e^{i\beta k} e^{-i\beta k} d\beta d\xi d\eta,$$

де $\zeta = \tilde{\rho} e^{i\gamma}$. Тоді

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f_k(\rho) e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} (\zeta - z)^s f_k(\tilde{\rho}) e^{ik\gamma} d\xi d\eta.$$

Достатність. Нехай

$$\lambda(\beta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} (\zeta - z)^s f(\tilde{\rho}\cos(\gamma + \beta), \tilde{\rho}\sin(\gamma + \beta)) d\xi d\eta -$$

$$- \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(\rho\cos(\varphi + \beta), \sin(\varphi + \beta)).$$

Тоді маємо наступне

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \lambda(\beta) e^{-i\beta k} d\beta = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} (\zeta - z)^s \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{\rho}\cos\beta, \tilde{\rho}\sin\beta) e^{-i\beta k} d\beta e^{ik\gamma} d\xi d\eta -$$

$$- \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\beta, \sin\beta) e^{-i\beta k} d\beta e^{ik\varphi}.$$

Отже, рівність $\lambda(\beta) = 0$ завершує доведення Леми 3. □

Лема 4. *Нехай $f \in C^{s+1}(B_R)$, $R > r$. Нехай також f – радіальна, задовольняє рівнянню (3) для $|z| < R - r$ та $f = 0$ в B_r. Тоді $f = 0$ в B_R.*

Доведення. За наслідком з [2, ч. 1, гл. 8] існує така функція $g \in C^s(-R, R)$, що $g = 0$ в $[-r, r]$ та $f(\rho) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\rho\cos\varphi) d\varphi$.

Тепер достатньо показати, що $g \equiv 0$ в $(-R, R)$. Нехай

$$\Psi(z, \alpha) = \int\limits_{|\zeta| \le r} G(\zeta + z) \Phi_\alpha(\zeta) d\xi d\eta, \tag{5}$$

де $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, а також $g([\zeta]) = G(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, де $[\zeta] = \mathrm{Re}\zeta = \xi$ та $\Phi_\alpha(\zeta) = (\zeta e^{-i\alpha})^s$.

Далі з (5) маємо

$$\Psi(z, \alpha + \eta) = \int\limits_{|\zeta - z| \le r} G(\zeta) \Phi_{\alpha + \eta}(\zeta - z) d\xi d\eta = \int\limits_{|\zeta - z| \le r} G(\zeta) \Phi_\alpha(\zeta - z) e^{-i\eta} d\xi d\eta.$$

Нарешті

$$\Psi(z,\alpha+\eta)=\int\limits_{|\zeta-ze^{-i\eta}|\le r} G(\zeta e^{i\eta})\Phi_\alpha(\zeta-ze^{-i\eta})d\xi d\eta,$$

а також

$$\Psi(ze^{i\eta},\alpha+\eta)=\int\limits_{|\zeta-z|\le r} G(\zeta e^{i\eta})\Phi_\alpha(\zeta-z)d\xi d\eta.$$

Проінтегруємо здобутий вираз

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi(ze^{i\eta},\alpha+\eta)d\eta=\int\limits_{|\zeta-z|\le r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\zeta e^{i\eta})d\eta\Phi_\alpha(\zeta-z)d\xi d\eta.$$

Тоді маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g([\zeta e^{i\eta}])d\eta=\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\rho\cos(\varphi+\eta))d\eta=0$$

і

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi(ze^{i\eta},\alpha+\eta)d\eta=0,$$

де $|z|<R-r$, $z=\rho e^{i\varphi}$.

Тепер позначимо $\Psi(z,\alpha)=H([z])e^{-i\alpha s}$, тоді $\int\limits_{-\pi}^{\pi}H([ze^{i\eta}])e^{-i(\alpha+\eta)s}d\eta=0$.

Враховуючи заміну $t=\varphi+\eta$, отримаємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}H(\rho\cos t)e^{-its}dt=0,$$

де $0\le\rho<R-r$.

Тоді маємо, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}H(\rho\cos t)\cos(ts)dt=0.$$

Отже, $H\in C^s[r-R,R-r]$ і за Лемою 1 отримаємо, що

$$H(u)=\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu u^\nu.$$

Тоді $\left(\frac{d}{du}\right)^s H(u)\equiv 0$, а при умові, що $z=x$, маємо $\left(\frac{d}{dx}\right)^s H(x)\equiv 0$ і

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^s H(x)e^{-i\alpha s}=\left(\frac{d}{dx}\right)^s\Psi(x,\alpha)=\int\limits_{|\zeta|\le r}g^{(s)}([\zeta]+x)\Phi_\alpha(\zeta)d\xi d\eta=0.$$

Звідси $g^{(s)} = 0$ при $r - R < x < R - r$. Тоді, враховуючи умови на функцію g, отримаємо, що $g \equiv 0$. $\square$

Для доведення Теореми 2 знадобляться наступні конструкції.

Нехай

$$T(z) = J_{s+1}(z) - \sum_{n=s}^{m-1} \frac{z^{2n-s+1}(-1)^{n-s-1}}{(2n+2)(n-s)!n!2^{2n-s}},$$

де $J_{s+1}(z)$ – функція Бесселя.

Позначимо через Z_T – множину всіх нулів функції $T(z)$. З асимптотики функцій Бесселя маємо, що

$$|\mathrm{Im}\lambda| \leq b_1 \ln(|\lambda| + 2), \tag{6}$$

де b_1 – деяка додатня константа.

Нехай також $\Phi_\lambda(z) = \Phi^{0,1}_{\lambda,\eta}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\eta (J_k(\lambda\rho))$, де $\lambda \in Z_T$, $\eta = 0, ..., n_\lambda - 1$ (n_λ – кратність λ).

Можна зазначити, що $\exists \Lambda : n_\lambda = 1$ при $|\lambda| > \Lambda$.

4. Доведення основних результатів. Доведемо Теорему 1.

Доведення. Достатньо довести, враховуючи Лему 3, що $f_k(\rho) = 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$.

При $k = 0$ це випливає з Леми 4.

Нехай $k > 0$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що теорема є вірною при індексах $0, ..., k - 1$.

З [5] маємо, що $\left(f'_k(\rho) + k\frac{f_k(\rho)}{\rho}\right) e^{i(k-1)\varphi}$ задовольняє (3) і дорівнює нулеві в B_r.

За нашим припущенням $f'_k(\rho) + k\frac{f_k(\rho)}{\rho} = 0$ і $f_k(\rho) = 0$ при $\rho \in (0, r)$ (див.(2)). Тоді $f_k(\rho) = 0$ на $(0, R)$.

Аналогічно розглядається випадок $k < 0$.

Таким чином, Теорема 1 доведена. $\square$

Тепер доведемо Теорему 2.

Доведення. Візьмемо радіальну функцію $g_1 \in C^\infty(B_r)$. Нехай $g_1 = 0$ в $B_{r-\varepsilon+\delta}$, де $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, а також $g_1 \not\equiv 0$.

Маємо наступне (див.[2, наслідок 3.5.3])

$$\left|\partial^\beta \Phi_\lambda(z)\right| \leq b_2 e^{|\mathrm{Im}\lambda||z|} \leq b_2 e^{|\mathrm{Im}\lambda|(r+\alpha)},$$

де $\alpha > \delta$, а b_2 – деяка додатня константа.

Далі з нерівності (6)

$$\left|\partial^\beta \Phi_\lambda(z)\right| \leq b_2 e^{(r+\alpha)c_1 \ln(|\lambda|+2)} = b_2(|\lambda| + 2)^{(r+\alpha)b_1}. \tag{7}$$

Згідно з [3, Лема 3.2.2] існує $h^{\lambda,\eta} \in \mathcal{E}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$: $\mathrm{supp} h^{\lambda,\eta} \subset \overline{B_r}$ і

$$\langle h, \Delta^\nu g_1 \rangle = 0, \tag{8}$$

де $\nu = 0, ..., N$, а $N \in \mathbb{N}$.

Позначимо $\mathfrak{g} = \left(\sum\limits_{i=0}^{N+1} \gamma_i |z|^{2i}\right) g_1(|z|)$, де $\gamma_i \in \mathbb{C}$ і $\sum\limits_{i=0}^{N+1} |\gamma_i| \neq 0$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, враховуючи (8), що

$$\langle h, \Delta^\nu \mathfrak{g} \rangle = \sum_{i=0}^{N+1} \gamma_i \langle h, \Delta^\nu g_i \rangle = 0,$$

для виконання цього маємо γ_i у кількості $N+2$, а рівнянь – у кількості $N+1$.

У крузі $|z| \leq r$ із [2, доведення Леми 3.2.11] маємо

$$\mathfrak{g}(z) = \sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(z) + p_0(|z|), \tag{9}$$

де $p_0(|z|)$ – деякий поліном.

До того ж, виходячи з нерівності (7), маємо

$$c_\lambda = O\left(\frac{1}{\lambda^{q_0}}\right),$$

де $q_0 > (r+\alpha)c_1 + 1$ (див. [2], розділ 3).

Тоді ряд у рівності (9) збігається рівномірно в $|z| \leq r + \alpha$.

Також $n_\lambda = 1$ при $|\lambda| > \Lambda$ маємо

$$\mathfrak{g}(z) = \sum_{|\lambda| > \Lambda} c_\lambda \Phi^{0,1}_{\lambda,0}(z) + G(z), \tag{10}$$

де $G(z) = \sum\limits_{0<|\lambda|<\Lambda} c_\lambda \Phi_\lambda(z) + p_0(|z|)$.

Звідси $\mathfrak{g} \in C(K_{r+\alpha})$, де $K_{r+\alpha} = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq r + \alpha\}$.

Нехай також $\varphi = \varphi_0(|z|)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$, і $\varphi = 0$ поза кругом $B_{\frac{\delta}{2}}$ та $\varphi \not\equiv 0$.

Тоді позначаємо

$$g = \mathfrak{g} * \varphi = \iint\limits_{|z-\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \mathfrak{g}(\omega)\varphi(z-\omega)dudv = \iint\limits_{|\omega| \leq \frac{\delta}{2}} \varphi(\omega)\mathfrak{g}(z-\omega)dudv, \tag{11}$$

де $\omega = u + iv$.

Тоді з (10), [2, наслідок 3.5.2], та [2, рівності (3.7.8)-(3.7.10)] маємо

$$g = \sum_{|\lambda| > \Lambda} c_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) \Phi_\lambda(z) + G * \varphi,$$

де $\tilde{\varphi}(\lambda)$ – сферичне перетворення φ та доданок $(G * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Далі з [2, доведення Леми 3.2.2] отримаємо $\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{(iz)^{2k}} \widetilde{\Delta^k \varphi(z)}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Тоді, міркуючи далі, отримаємо

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{(iz)^{2k}} \int\limits_{B_{\frac{\delta}{2}}} \left(\Delta^k \varphi\right)(\omega) J_0(z|\omega|) dudv,$$

де $|J_0(z|\omega|)| \le e^{|\mathrm{Im} z|\omega||} \le e^{|\mathrm{Im} z|\frac{\delta}{2}}$.

Це означає, що

$$|\tilde{\varphi}(z)| \le \frac{b_2}{|z|^{2k}} e^{\frac{\delta}{2}|\mathrm{Im} z|}$$

де b_2 – деяка константа.

Нарешті,

$$\tilde{\varphi}(\lambda) \le \frac{b_2}{|\lambda|^{2k}} e^{\frac{\delta}{2} b_1 (\ln|\lambda|+2)},$$

і ряд $\sum\limits_{\lambda} \partial^{\beta} \left(c_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) \Phi_\lambda(z)\right)$ для будь-якого $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ збігається локально рівномірно в $\mathbb{C}$.

Отже, маємо, що $g \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Тепер покажемо, що функція g задовольняє рівності (3).

З рівності (9) та (11) маємо

$$\iint\limits_{|\omega| \le \frac{\delta}{2}} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{\varphi(\omega) r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} \left(\sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(z-\omega) + p_0(|z-\omega|)\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{|\omega| \le \frac{\delta}{2}} \varphi(\omega) \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} \left(\sum_{\lambda \in Z_T} c_\lambda \Phi_\lambda(\zeta-\omega) + p_0(|\varsigma-\omega|)\right) (\zeta - \omega - z)^s d\xi d\eta dudv.$$

Функція виду $\Phi_\lambda(z)$ задовольняє рівнянню (3) (див. [2], глава 3.2). І поліном $p_0(|z|)$ також задовольняє (3) (див.[4, теорема 2]).

Таким чином, рівність (3) виконується для функції g.

Далі, легко побачити, що при $z \in \overline{B_r}$

$$g = \iint\limits_{|z-\omega| \le \frac{\delta}{2}} \mathfrak{g}(\omega) \varphi(z-\omega) dudv = 0$$

в силу умов для g_1 та φ. Таким чином, $g = 0$ в $B_{r-\xi}$.

Нарешті, доведемо, що $g \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Припустимо, що $\mathfrak{g} * \varphi = g^1 * \varphi \equiv 0$, де нехай

$$g^1 = \begin{cases} g, |z| \le r, \\ 0, |z| > r. \end{cases}$$

Переходячи до перетворення Фур'є, отримаємо

$$\widehat{g^1 * \varphi} = \widehat{g^1} \widehat{\varphi} \equiv 0,$$

де функція $\widehat{g^1}$ – неперервна, а $\widehat{\varphi}$ – ціла.

Отже, маємо, що $\widehat{g^1} \equiv 0$ та

$$g^1 \equiv 0.$$

Таким чином, отримано протиріччя із означенням g^1. Тоді маємо, що $g \not\equiv 0$. Отже, теорема доведена. □

1. *Maxwell O.Reade* A theorem of Fedoroff // Duke Math.J, **18**. – 1951. – P. 105-109.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equation. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
3. *Волчков В.В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сибирский математический журнал, **35**, № 4. – 1994. – С. 737-745.
4. *Трофименко О.Д.* Узагальнення теореми про середнє для полiаналiтичних функцiй у випадках кола та круга // Вiсник Донецького Нацiонального Унiверситету, № 1, серiя А. – Донецьк. – 2009. – С. 20-28.
5. *Трофименко О.Д.* Аналог теореми про середнє для полiномiв спецiального виду // Український математичний журнал, **63**. – 2011. – С. 669-707.

O. D. Trofymenko

Uniqueness theorem for solutions of some mean value equations.

A uniqueness theorem for solutions of the mean value equations has been obtained. A theorem, which indicates an exactness of this uniqueness theorem, is obtained as well.

Keywords: *uniqueness theorem, mean value theorem, spherical averages.*

О. Д. Трофименко

Теорема единственности для решения некоторых уравнений средних значений.

В работе получена теорема единственности для решения уравнения средних значений, а также теорема, которая указывает на точность указанной теоремы единственности.

Ключевые слова: *теорема единственности, теорема о среднем, сферические средние.*

Донецький нацiональний ун-т
odtrofimenko@gmail.com

Получено 24.05.12