УДК 517.444

©2012. **Н. А. Трипольская, Вит. В. Волчков**

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

Изучаются искаженные уравнения свертки на гиперболическом диске. Получен аналог теоремы о среднем для собственных функций лапласиана.

Ключевые слова: *гиперболическая плоскость, уравнение свертки, теорема о среднем.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\triangle$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Известная теорема о шаровых средних для уравнения Гельмгольца утверждает, что для того, чтобы функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ была решением уравнения

$$\triangle f + \lambda^2 f = 0, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in R^n$ и $r > 0$ выполнялось равенство

$$\int\limits_{|u|\leq r} f(x+u)du = (2\pi)^{n/2} r^n \mathbf{I}_{n/2}(\lambda r) f(x), \tag{2}$$

где $\mathbf{I}_\nu(z) = \mathcal{J}_\nu(z)/z^\nu$, $\mathcal{J}_\nu$ – функция Бесселя первого рода (см., например, 1, глава 4, § 3,4). В частности, при $\lambda = 0$ из (2) следует классическая теорема о среднем для гармонических функций. Кроме того, если T – радиальное распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем (т.е. T инвариантно относительно вращений в $\mathbb{R}^n$, см. например [2, часть 1]), равенство (1) влечет соотношение

$$(f * T)(x) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\tilde{T}(\lambda) f(x), \tag{3}$$

где Γ – гамма-функция, $\tilde{T}$ – сферическое преобразование распределения T, то есть,

$$\tilde{T}(\lambda) = < T, \mathbf{I}_{n/2-1}(\lambda|x|) >, \qquad \lambda \in C.$$

[2, часть 1, глава 7, формула (7.9)].

Указанные факты допускают интересные обобщения для однородных пространств. Ряд результатов в этом направлении получено Т.Уиллмором, Р.Годеманом, С.Хелгасоном и др. (см. [3], [4], [5, глава 4, § 2], [6, разделы 11.3, 12.4]).

Теоремы о среднем играют важную роль в ряде вопросов анализа, дифференциальных уравнений, интегральной геометрии и других областях. Например, при изучении ядер различных сверточных операторов возникает необходимость в обобщениях формулы (3) для других типов свертки. В данной работе получен аналог теоремы о среднем для свертки вида

$$(f_1 \times f_2)(z) = \int_G f_1(g(0)) f_2(g^{-1}z) \left(\frac{1-<z, g(0)>}{1-<g(0), z>}\right)^s dg, \tag{4}$$

где G – группа конформных автоморфизмов единичного круга, $< z, g0 >= z \cdot \overline{g(0)}$, $s \in \mathbb{R}$. При $s = 0$ равенство (4) дает свертку на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ [5, введение, § 4.3].Теория уравнений свертки на областях в $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ развита в [6, глава 15, 20]. В общем случае свертку (4) можно рассматривать как аналог искаженного уравнения свертки на $\mathbb{C}$ [6, глава 12]. Локальные аспекты соответствующей теории в настоящее время еще не разработаны.

2. Формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{D}$ – открытый круг $|z| < 1$ в $\mathbb{R}^2$ со стандартной структурой многообразия (т.е.$\mathbb{D}$ рассматривается как подмногообразие $\mathbb{R}^2$) и с римановой структурой, задаваемой метрическим тензором

$$g_{i,j}(z) = \frac{\delta_{i,j}}{(1 - |z|^2)^2},$$

($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера). Это риманово многообразие изометрично вещественной гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ постоянной секционной кривизны – 4 [5, введение]. Группа G действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$g(z) = \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}, \qquad |a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{5}$$

Отображения (5) вместе с $z \to \overline{z}$ порождают все изометрии $\mathbb{D}$. Риманова мера на $\mathbb{D}$ имеет вид

$$d\mu(z) = \frac{dm(z)}{(1 - |z|^2)^2},$$

где dm – мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Как обычно, считаем, что мера Хаара dg на G нормирована соотношением

$$\int_G f(g(0))dg = \int_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z), \qquad f \in L^1(\mathbb{D}; \mu), \tag{6}$$

(см. [5, введение, § 4.3]).

Пусть $d(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния на $\mathbb{D}$. Для $0 < R \leq \infty$ положим

$$B_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0, z) < R\}, \qquad \overline{B}_R = \{z \in \mathbb{D} : d(0, z) \leq R\}.$$

Нам требуются следующие классы функций и распределений в B_R: $L^{1,loc}$ – совокупность локально интегрируемых функций в B_R; $RA(B_R)$ – класс вещественно-аналитических функцмй; $\mathcal{E}'(B_R)$ – пространство распределений с компактным носителем; $\mathcal{E}'_\natural(B_R)$ – множество радиальных распределений из $\mathcal{E}'(B_R)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R)$. Введем четную целую функцию $\mathcal{F}(T)$ с помощью равенства

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) =< T, H_\lambda >, \qquad \lambda \in C, \tag{7}$$

где

$$H_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-s} F(s + \frac{1 - i\lambda}{2}; s + \frac{1 + i\lambda}{2}; 1; \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}),$$

$F(\alpha;\beta;\gamma;z)$ – аналитическое продолжение на $C\setminus[1;\infty)$ гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+k)}\frac{z^k}{k!}. \qquad |z|<1.$$

Кроме того, положим

$$r(T)=inf\{r>0:suppT\subset B_r\}.$$

Для $f\in C^{\infty}(B_R)$ определим свертку

$$(f\times T)(g^{-1}(0))=\left\langle T, f(g^{-1}z)\left(\frac{1-<z,g(0)>}{1-<g(0),z>}\right)^s\right\rangle, \qquad g^{-1}(0)\in B_{R-r(T)}, \tag{8}$$

где ветвь степени выделяется условием $1^s=1$.

Указанное определение корректно и, в случае, когда T-функция, совпадает с (4) (см. лемму 1 ниже).

Наконец, определим дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}=L_{\mathbb{H}^2}+A_1+A_2, \tag{9}$$

где $L_{\mathbb{H}^2}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{H}^2$,

$$A_1=-4s^2|z|^2Id, \qquad A_2=-4s(1-|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z}-\overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right), \tag{10}$$

Id – тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $T\in\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{D})$, $R\in(r(T),+\infty]$ *и* $\mathcal{L}f=-(\lambda^2+4s^2+1)f$ *в* B_R *при некотором* $\lambda\in C$. *Тогда*

$$f\times T=\mathcal{F}(T)(\lambda)f, \qquad \text{в} \qquad B_{R-r(T)}. \tag{11}$$

Отметим, что при $s=0$ *утверждение теоремы 1 совпадает с теоремой о среднем для* $\mathbb{H}^2$ *и является известным (см. [5, глава 4, §2]).*

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего установим корректность определения (8). Обозначим через $SO(2)$ группу вращений $\mathbb{R}^2$.

Лемма 1. *Пусть* $T\in\mathcal{E}'_{\natural}(B_R)$, $f\in C^{\infty}(B_R)$. *Тогда функция*

$$\theta(g)=\left\langle T, f(g^{-1}z)\left(\frac{1-<z,g(0)>}{1-<g(0),z>}\right)^s\right\rangle, \qquad g\in G: g^{-1}(0)\in B_{R-r(T)},$$

постоянна на правых классах смежности группы G по подгруппе $SO(2)$ и является, таким образом, функцией от $g^{-1}(0)$. Кроме того, если $T\in(L^{1,loc}\cap\mathcal{E}'_{\natural}(B_R))$, то

$$(f\times T)(z)=\int_G f(g(0))T(g^{-1}(z))\left(\frac{1-<z,g(0)>}{1-<g(0),z>}\right)^s dg, \qquad z\in B_{R-r(T)}. \tag{12}$$

Доказательство. Для $\tau \in SO(2)$ имеем

$$\theta(\tau g) = \left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z)\left(\frac{1-<z,\tau g(0)>}{1-<\tau g(0),z>}\right)^s\right\rangle =$$
$$= \left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z)\left(\frac{1-<\tau^{-1}z,g(0)>}{1-<g(0),\tau^{-1}z>}\right)^s\right\rangle.$$

Отсюда и из радиальности получаем $\theta(\tau g) = \theta(g)$, что доказыват первое утверждение. Далее, пусть $T \in (L^{1,loc} \cap \mathcal{E}'_\natural(B_R))$. Тогда

$$(f \times T)(g^{-1}(0)) = \int_{\mathbb{D}} T(z)f(g^{-1}z)\left(\frac{1-<z,g(0)>}{1-<g(0),z>}\right)^s d\mu(z). \tag{13}$$

Прямое вычисление показывает (см.(5)), что

$$\frac{1-<z,g(0)>}{1-<g(0),z>} = \frac{1-<g^{-1}(0),g^{-1}z>}{1-<g^{-1}z,g^{-1}(0)>}. \tag{14}$$

Используя (13), (14), инвариантность $d\mu$ относительно G и (6), получаем

$$(f \times T)(g^{-1}(0)) = \int_{\mathbb{D}} T(z)f(g^{-1}z)\left(\frac{1-<g^{-1}(0),g^{-1}z>}{1-<g^{-1}z,g^{-1}(0)>}\right)^s d\mu(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{D}} T(gw)f(w)\left(\frac{1-<g^{-1}(0),w>}{1-<w,g^{-1}(0)>}\right)^s d\mu(w) =$$
$$= \int_{G} f(h(0))T(gh(0))\left(\frac{1-<g^{-1}(0),h(0)>}{1-<h(0),g^{-1}(0)>}\right)^s dh.$$

Теперь учитывая, что $T(gh(0)) = T(h^{-1}g^{-1}(0))$, приходим к (12). $\square$

Наша дальнейшая цель – установить инвариантность $\mathcal{L}$ относительно "искаженных сдвигов" (см.(12)). Доказательство этого факта удобно разбить на несколько лемм.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$L_{\mathbb{H}^2}(f_1f_2) = f_1L_{\mathbb{H}^2}f_2 + f_2L_{\mathbb{H}^2}f_1 + 4(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right).$$

Доказательство. Оператор $L_{\mathbb{H}^2}$ имеет вид

$$L_{\mathbb{H}^2} = (1-|z|^2)^2\triangle, \tag{15}$$

где $\triangle$-лапласиан в R^2(см.[5, введение, § 4.3]). Отсюда

$$L_{\mathbb{H}^2}(f_1f_2) = f_1L_{\mathbb{H}^2}f_2 + f_2L_{\mathbb{H}^2}f_1 + 2(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right).$$

Учитывая, что
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right),$$
получаем требуемое. □

Всюду ниже считаем, что выполнено условие (5). Положим

$$\mathbf{g}(z) = g^{-1}(z) = \frac{\overline{a}z - b}{a - \overline{b}z},$$

$$u_s = \left(\frac{1 - < z, g(0) >}{1 - < g(0), z >}\right)^s = \left(\frac{|a|^2 - \overline{ab}z}{|a|^2 - ab\overline{z}}\right)^s.$$

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$L_{\mathbb{H}^2}(u_s)(z) = -4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2 - ab\overline{z}}\right)^2 u_{s-1}(z). \tag{16}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = -\frac{s\overline{ab}}{|a|^2 - ab\overline{z}}u_{s-1}(z), \qquad \frac{\partial u_s}{\partial \overline{z}} = \frac{sab}{|a|^2 - ab\overline{z}}u_s(z). \tag{17}$$

Из (17) находим

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{sab}{|a|^2 - ab\overline{z}}\frac{\partial u_s}{\partial z} = -\frac{s^2|a|^2|b|^2}{(|a|^2 - ab\overline{z})^2}u_{s-1}(z).$$

Отсюда и из (15) следует (16). □

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(z) = f(\mathbf{g}z)u_s(z)$. *Тогда*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{u_s(z)}{(a - \overline{b}z)^2} - s\overline{ab}f(\mathbf{g}z)\frac{u_{s-1}(z)}{|a|^2 - ab\overline{z}}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{u_s(z)}{(\overline{a} - b\overline{z})^2} + sabf(\mathbf{g}z)\frac{u_s(z)}{|a|^2 - ab\overline{z}}. \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{g}$ – голоморфное отображение,

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z)\frac{1}{(a - \overline{b}z)^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ \mathbf{g}) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{\partial \overline{\mathbf{g}}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z)\frac{1}{(\overline{a} - b\overline{z})^2}. \tag{21}$$

Из (20), (21), (17) получаем (18) и (19). □

Лемма 5. *Пусть* $a_1(z) = -4s^2|z|^2$, $a_2(z) = -4s(1-|z|^2)$. *Тогда*

$$a_1(\mathbf{g}z) = a_1(z) + \frac{4s^2|a|^2(1-|z|^2)^2}{||a|^2 - ab\overline{z}|^2}(2z(Re(ab) - |b|^2 Re z) - |b|^2(1-|z|^2)), \tag{22}$$

$$(a-\overline{b}z)^2 a_2(\mathbf{g}z)\mathbf{g}(z) = \frac{4sab(1-|z|^2)^2}{|a|^2 - ab\overline{z}} + a_2(z)z, \tag{23}$$

$$(\overline{a}-b\overline{z})^2 a_2(\mathbf{g}z)\overline{\mathbf{g}(z)} = \frac{4s\overline{ab}(1-|z|^2)^2}{|a|^2 - \overline{ab}z} + a_2(z)\overline{z}. \tag{24}$$

Доказательство. Соотношения (22)-(24) получается непосредственным вычислением с использованием равенства $|a|^2 - |b|^2 = 1$. $\square$

Следующее утверждение дает отмеченную выше инвариантность $\mathcal{L}$ относительно "искаженных сдвигов".

Лемма 6. *Оператор* $\mathcal{L}$ *обладает обобщенным свойством инвариантности относительно группы* G*:*

$$\mathcal{L}(f(\mathbf{g}z)u_s(z)) = (\mathcal{L}f)(\mathbf{g}z)u_s(z). \tag{25}$$

Доказательство. По лемме 2

$$L_{\mathbb{H}^2}((f\circ\mathbf{g})u_s) = (f\circ\mathbf{g})L_{\mathbb{H}^2}(u_s) + u_s L_{\mathbb{H}^2}(f\circ\mathbf{g}) +$$
$$+4(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(f\circ\mathbf{g}) + \frac{\partial u_s}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}(f\circ\mathbf{g})\right).$$

Поскольку $\mathbf{g}$ является движением $\mathbb{H}^2$,

$$L_{\mathbb{H}^2}(f\circ\mathbf{g}) = (L_{\mathbb{H}^2}f)\circ\mathbf{g}.$$

Тогда из (16)-(19) находим

$$L_{\mathbb{H}^2}((f\circ\mathbf{g})u_s) = u_s(L_{\mathbb{H}^2}f)\circ\mathbf{g} - 4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2 - ab\overline{z}}\right)^2 u_{s-1}(z)f(\mathbf{g}z) +$$

$$+4(1-|z|^2)^2\left(\frac{sab u_s(z)}{(|a|^2 - ab\overline{z})(a-\overline{b}z)^2}\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - \frac{s\overline{ab}u_{s-1}(z)}{(|a|^2 - ab\overline{z})(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z)\right). \tag{26}$$

Используя (10) и лемму 3, получаем

$$A_1((f\circ\mathbf{g})u_s)(z) = a_1(z)u_s(z)f(\mathbf{g}z), \tag{27}$$

$$A_2((f\circ\mathbf{g})u_s)(z) = a_2(z)\left(\frac{zu_s(z)}{(a-\overline{b}z)^2}\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - \frac{\overline{z}u_s(z)}{(\overline{a}-b\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\mathbf{g}z) -\right.$$

$$-\frac{sz}{|a|^2 - ab\overline{z}}(\overline{ab}u_{s-1}(z) + abu_s(z))f(\mathbf{g}z)\bigg). \tag{28}$$

Соотношения (26)-(28) дают

$$\mathcal{L}((f \circ \mathbf{g})u_s) = u_s(L_{\mathbb{H}^2} f) \circ \mathbf{g} + c_1(z)f(\mathbf{g}z) + c_2(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) + c_3(z)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z), \tag{29}$$

где

$$c_1(z) = a_1(z)u_s(z) - 4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2 - ab\overline{z}}\right)^2 u_{s-1}(z) - \frac{sza_2(z)}{|a|^2 - ab\overline{z}}(\overline{ab}u_{s-1}(z) + abu_s(z)),$$

$$c_2(z) = \frac{4sab(1-|z|^2)^2u_s(z)}{(|a|^2 - ab\overline{z})(a - \overline{b}z)^2} + \frac{za_2(z)u_s(z)}{(a-\overline{b}z)^2},$$

$$c_3(z) = -\frac{4s\overline{ab}(1-|z|^2)^2u_{s-1}(z)}{(|a|^2 - ab\overline{z})(\overline{a} - b\overline{z})^2} - \frac{\overline{z}a_2(z)u_s(z)}{(\overline{a} - b\overline{z})^2}.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{L}f)(\mathbf{g}z)u_s(z) = u_s(z)(L_{\mathbb{H}^2} f)(\mathbf{g}z) + u_s(z)a_1(\mathbf{g}z)f(\mathbf{g}z) +$$

$$+u_s(z)a_2(\mathbf{g}z)\mathbf{g}(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{g}z) - u_s(z)a_2(\mathbf{g}z)\overline{\mathbf{g}(z)}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathbf{g}z). \tag{30}$$

Сравнивая (29) с (30), из леммы 5 видим, что имеет место соотношение (25). □

Доказательство теоремы 1. Сначала найдем радиальные собственные функции оператора $\mathcal{L}$.

Лемма 7. *Пусть $\lambda \in C$ и радиальная функция $f : \mathbb{D} \to C$ является гладким решением уравнения*

$$\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 4s^2 + 1)f. \tag{31}$$

Тогда

$$f(z) = f(0)H_\lambda(z) \tag{31*}$$

Доказательство. Полагая $f(z) = \varphi(\rho)$, где $\rho = |z|$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\overline{z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}z,$$

$$(L_{\mathbb{H}^2} f)(z) = (1-\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$(\mathcal{L}f)(z) = (1-\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho) + \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right) - 4s^2\rho^2\varphi(\rho).$$

Следовательно, уравнение (31) можно переписать в виде

$$(1-\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho)+\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right)-\varphi(\rho)(4s^2\rho^2-\lambda^2-4s^2-1)=0. \tag{32}$$

Обозначим $\nu=\frac{1-i\lambda}{2}$. Из (32) для функции $\psi(\rho)=(1-\rho^2)^{-\nu}\varphi(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1-\rho^2)\psi''(\rho)+\psi'(\rho)(1-\rho^2(4\nu+1))-4(\nu^2-s^2)\rho\psi(\rho)=0. \tag{33}$$

С другой стороны, гипергеометрическая функция $h(\rho)=F(\alpha,\beta;\gamma,\rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1-\rho^2)h''(\rho)+h'(\rho)(2\gamma-1-(2\alpha+2\beta+1)\rho^2)-4\alpha\beta\rho h(\rho)=0, \tag{34}$$

(см. [7, глава 2, формула 2.1(1)]). Сравнивая (33) с (34) и учитывая гладкость ψ в нуле, заключаем, что

$$f(z)=f(0)(1-\rho^2)^{\nu}F(\nu+s;\nu-s;1;\rho^2). \tag{35}$$

Равенство (35) и формула

$$F(\alpha;\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\alpha}F(\alpha;\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1})$$

(см. [7, глава 2,формула 2.9(3)]) дают (31*). □

Перейдем к доказательству теоремы 1. Поскольку $\mathcal{L}$ является эллиптическим оператором (см. (9) и (15)), то $f\in RA(B_R)$. Зафиксируем $g\in G$ такое, что $g\overline{B_{r(T)}}\subset B_R$. Пусть $\epsilon_0=sup\{\epsilon>0: g\overline{B_{r(T)}}\subset B_{R-\epsilon}\}$. Для $z\in B_{r(T)+\epsilon_0}$ положим

$$f_g(z)=\int_{SO(2)}f(g^{-1}\tau z)\left(\frac{1-<\tau z,g(0)>}{1-<g(0),\tau z>}\right)^s d\tau, \tag{36}$$

где $d\tau$ – мера Хаара на $SO(2)$, нормированная соотношением

$$\int_{SO(2)}d\tau=1. \tag{37}$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g\in RA_\natural(B_{r(T)+\epsilon_0});\qquad f_g(0)=f(g^{-1}(0)). \tag{38}$$

Кроме того,

$$f_g(z)=\int_{SO(2)}f(g^{-1}\tau z)\left(\frac{1-<z,\tau^{-1}g(0)>}{1-<\tau^{-1}g(0),z>}\right)^s d\tau. \tag{39}$$

Из (39) и леммы 6 получаем

$$(\mathcal{L}f_g)(z)=-(\lambda^2+4s^2+1)f_g(z).$$

Тогда (см. (7), (38) и лемму 7) $f_g(z)=f(g^{-1}(0))H_\lambda(z)$ и $<T,f_g>=f(g^{-1}(0))\mathcal{F}(T)(\lambda)$. Теперь из (36), (37), (8) и радиальности T следует (11). Таким образом, теорема 1 доказана. □

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М. Мир, 1964.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – 2003.
3. *Willmore T.J.* Mean value theorem in harmonic Riemann spaces. – J.London Math. Soc., 1950. – V. 25. – P. 54-57.
4. *Godement R.* Une generalization du theoreme de la moyenne pour les fonctions harmoiques. – C.R.Acad. Sci. Paris. – 1952. – V. 234. – P. 2137-2139
5. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М. Мир, 1987.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Function on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – 2009.
7. *Бейтмен* Высшие транцендентные функции. – Том 1. – 1965.

N. A. Tripolskaya, Vit. V. Volchkov

A generalization of the mean value theorem.

We study the distorted equation of the convolution on the hyperbolic disk. Obtain an analogue of the mean value theorem for the eigenfunctions of the Laplacian.

Keywords: *hyperbolic plane, the equation of the convolution, theorem of the mean.*

Н. А. Трипольська, Віт. В. Волчков

Про одне узагальнення теореми про середнє.

Вивчаються викривлені рівняння згортки на гіперболічному диску. Отримано аналог теореми про середнє для власних функцій лапласіана.

Ключові слова: *гіперболічна площина, рівняння згортки, теорема про середнє.*

Донецкий национальный ун-т
nadya_tna@e-mail.ua

Получено 22.03.12