УДК 531.38

©2012. **А. В. Мазнев**

СЛУЧАЙ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Найдено новое решение указанных уравнений, которое выражается элементарными функциями времени.

Ключевые слова: *гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.*

1. Введение. В работе рассмотрена механическая система, состоящая из тела-носителя произвольной формы и ротора, который вращается в теле-носителе вокруг закрепленной в нем оси. Уравнения движения такой системы (гиростата) можно получить, используя, например, работы В. Вольтерра [1], Н.Е. Жуковского [2], П.В. Харламова [3]. Исследование свойств движения гиростата представляется актуальным не только в случае постоянного гиростатического момента (см. обзор [4]), но и в случае, когда гиростатический момент зависит от времени (см., например, статьи [5, 6]). В работе [7] изучены перманентные вращения свободного гиростата (автор статьи использует термин "неавтономный гиростат"). Статья [8] посвящена доказательству теоремы о возможности равномерного вращения неавтономного гиростата вокруг наклонной оси (оси, которая не совпадает с направлением вектора силы тяжести). В [9, 10] изучены условия существования равномерных вращений и маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести. Работа [11] посвящена разработке общего метода исследования прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, который был применен в статье [12].

В этой работе получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (описание действующих сил можно найти в [13]) в случае переменного гиростатического момента. Данные условия позволили найти новый случай интегрируемости уравнений движения, которые являются обобщением уравнений Кирхгофа-Пуассона на случай переменного гиростатического момента.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{\nu} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times a\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор, характеризующий составляющую момента количества движения гиростата [3]; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, определяющий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$ – вектор угловой скорости, $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор; λ – величина гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$; $L(t)$ – функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимого тела (ротора); $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\nu}$, λ обозначает относительную производную по независимой переменной t.

Уравнения (1),(2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{3}$$

Здесь k – произвольная постоянная.

Поставим задачу об определении условий, при выполнении которых система дифференциальных уравнений (1), (2) допускает три инвариантных соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \\ x_2 &= d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3, \\ x_3 &= e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3, \end{aligned} \tag{4}$$

где b_i, d_i, e_i $(i = \overline{0,3})$ – постоянные параметры. В силу структуры соотношений (4) для решения поставленной задачи можно принять главную систему координат, в которой $a = diag(a_1, a_2, a_3)$. Тогда компоненты угловой скорости ω_i определяются соотношениями $\omega_i = a_i x_i$, или на основании (4) формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3), \\ \omega_2 &= a_2(d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3), \\ \omega_3 &= a_3(e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3). \end{aligned} \tag{5}$$

Подставим выражения (4) в интеграл моментов из системы (3)

$$\begin{gathered} \lambda(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3) = k - b_0\nu_1 - d_0\nu_2 - e_0\nu_3 + \left(\frac{1}{2}B_{11} - b_1\right)\nu_1^2 + \\ + \left(\frac{1}{2}B_{22} - d_2\right)\nu_2^2 + \left(\frac{1}{2}B_{33} - e_3\right)\nu_3^2 + (B_{12} - d_1 - b_2)\nu_1\nu_2 + \\ + (B_{13} - e_1 - b_3)\nu_1\nu_3 + (B_{23} - e_2 - d_3)\nu_2\nu_3. \end{gathered} \tag{6}$$

Из формулы (6) вытекает, что функция λ является отношением многочлена второго порядка от переменных ν_i $(i = \overline{1,3})$ и линейного многочлена от этих переменных. Предположим, что λ – многочлен по переменным ν_i. Тогда из соотношения (6) следует

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3, \tag{7}$$

где параметры λ_i связаны с параметрами b_i, d_i, e_i, B_{ij} условиями

$$b_0 = -\alpha_1\lambda_0, \quad d_0 = -\alpha_2\lambda_0, \quad e_0 = -\alpha_3\lambda_0, \quad b_1 = \frac{1}{2}B_{11} - \alpha_1\lambda_1, \tag{8}$$

$$d_2 = \frac{1}{2}B_{22} - \alpha_2\lambda_2, \quad e_3 = \frac{1}{2}B_{33} - \alpha_3\lambda_3, \quad d_1 = B_{12} - b_2 - \alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 \tag{9}$$

$$e_1 = B_{13} - b_3 - \alpha_1\lambda_3 - \alpha_3\lambda_1, \quad e_2 = B_{23} - d_3 - \alpha_2\lambda_3 - \alpha_3\lambda_2. \tag{10}$$

При этом постоянная $k = 0$.

3. Условия существования инвариантных соотношений (4), (7). Подставим выражения (5) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения Пуассона из (2):

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3)\, \nu_2 - a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3)\, \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3)\, \nu_3 - a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3)\, \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3)\, \nu_1 - a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3)\, \nu_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Внесем в скалярные динамические уравнения, вытекающие из (1), $L = \dot{\lambda}$, выражения (4), (5) и учтем формулы (7)-(10). Тогда получим три равенства:

$$\begin{gathered}
-a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \left[(\alpha_2\lambda_3 + d_3)\, \nu_2 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{33})\, \nu_3 \right] + \\
+a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \left[(\alpha_3\lambda_2 + e_2)\, \nu_3 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{22})\, \nu_2 \right] + \\
+a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \left[(\alpha_1\lambda_2 + b_2)\, \nu_3 - (\alpha_1\lambda_3 + b_3)\, \nu_2 \right] + \\
+s_3\nu_2 - s_2\nu_3 + (C_{22} - C_{33})\, \nu_2\nu_3 + C_{12}\nu_1\nu_3 - C_{13}\nu_1\nu_2 + C_{23} \left(\nu_3^2 - \nu_2^2 \right) = 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \left[(\alpha_1\lambda_3 + b_3)\, \nu_1 + \frac{1}{2} (B_{22} + B_{33})\, \nu_3 \right] - \\
-a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \left[(\alpha_3\lambda_1 + e_1)\, \nu_3 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{22})\, \nu_1 \right] + \\
+a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \left[(\alpha_2\lambda_3 + d_3)\, \nu_1 - (\alpha_2\lambda_1 + d_1)\, \nu_3 \right] + \\
+s_1\nu_3 - s_3\nu_1 + (C_{33} - C_{11})\, \nu_1\nu_3 + C_{23}\nu_1\nu_2 - C_{12}\nu_2\nu_3 + C_{13} \left(\nu_1^2 - \nu_3^2 \right) = 0,
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
-a_1 (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) \left[(\alpha_1\lambda_2 + b_2)\, \nu_1 + \frac{1}{2} (B_{22} + B_{33})\, \nu_2 \right] + \\
+a_2 (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) \left[(\alpha_2\lambda_1 + d_1)\, \nu_2 + \frac{1}{2} (B_{11} + B_{33})\, \nu_1 \right] + \\
+a_3 (e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) \left[(\alpha_3\lambda_1 + e_1)\, \nu_2 - (\alpha_3\lambda_2 + e_2)\, \nu_1 \right] + \\
+s_2\nu_1 - s_1\nu_2 + (C_{11} - C_{22})\, \nu_1\nu_2 + C_{13}\nu_2\nu_3 - C_{23}\nu_1\nu_3 + C_{12} \left(\nu_2^2 - \nu_1^2 \right) = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Потребуем, чтобы равенства (12)-(14) были тождествами для любых значений ν_i $(i = \overline{1,3})$. Тогда получим условия:

$$\lambda_0 \left[\lambda_1 \left(a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 \right) + a_2\alpha_2 d_1 + a_3\alpha_3 e_1 - \frac{a_1\alpha_1}{2} (B_{33} + B_{22}) \right] + s_1 = 0, \tag{15}$$

$$\lambda_0 \left[\lambda_2 \left(a_3\alpha_3^2 + a_1\alpha_1^2 \right) + a_3\alpha_3 e_2 + a_1\alpha_1 b_2 - \frac{a_2\alpha_2}{2} (B_{11} + B_{33}) \right] + s_2 = 0, \tag{16}$$

$$\lambda_0\left[\lambda_3\left(a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2\right)+a_1\alpha_1 b_3+a_2\alpha_2 d_3-\frac{a_3\alpha_3}{2}\left(B_{22}+B_{11}\right)\right]+s_3=0, \tag{17}$$

$$a_2d_2\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_3e_2\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)-\frac{a_1b_2}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)+C_{12}=0, \tag{18}$$

$$a_3e_1\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)+a_1b_1\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-\frac{a_2d_1}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{12}=0, \tag{19}$$

$$a_1b_1\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_2d_1\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-\frac{a_3e_1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{13}=0, \tag{20}$$

$$a_2d_3\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_3e_3\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)-\frac{a_1b_3}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)+C_{13}=0, \tag{21}$$

$$a_1b_2\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_2d_2\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-\frac{a_3e_2}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{23}=0, \tag{22}$$

$$a_3e_3\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)+a_1b_3\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-\frac{a_2d_3}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{23}=0, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}a_1b_2\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-a_1b_3\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_3e_2\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)-a_2d_3\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_3e_3\left(B_{11}+B_{22}\right)-\frac{1}{2}a_2d_2\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{22}-C_{33}=0,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}a_1b_3\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)-a_3e_1\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)+a_2d_3\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-a_2d_1\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+\\+\frac{1}{2}a_1b_1\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_3e_3\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{33}-C_{11}=0,\end{gathered} \tag{25}$$

которые являются условиями существования у уравнений (1), (2) инвариантных соотношений (4), (7).

Покажем разрешимость системы равенств (15)-(25). Если в качестве свободных параметров примем $\lambda_i, \alpha_i, b_2, b_3, d_3, B_{ij}$, то остальные параметры соотношений (4) можно найти из формул (8)-(10), а параметры s_i $(i=\overline{1,3})$, C_{ij} можно определить из системы (15)-(25). В силу структуры этой системы выпишем три уравнения, которые являются результатом вычитания уравнений (18),(19); (20),(21); (22),(23):

$$\begin{gathered}a_1\alpha_1\left(b_3\lambda_2-b_2\lambda_3\right)+a_3e_3\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)-a_2d_2\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_3e_2\left(B_{11}+B_{22}\right)-\frac{1}{2}a_2d_3\left(B_{11}+B_{33}\right)=0,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}a_2\alpha_2\left(d_1\lambda_3-d_3\lambda_1\right)-a_3e_3\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)+a_1b_1\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_1b_3\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_3e_1\left(B_{22}+B_{11}\right)=0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}a_3\alpha_3\left(e_1\lambda_2-e_2\lambda_1\right)-a_2d_2\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_1b_1\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)+\\+\frac{1}{2}a_1b_2\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_2d_1\left(B_{11}+B_{33}\right)=0.\end{gathered} \tag{28}$$

Систему (26)-(28) запишем как систему относительно величин b_2, b_3, d_3

$$\begin{aligned}&\beta_1b_2+\beta_2b_3+\beta_3d_3=\beta_0,\\&\gamma_1b_2+\lambda_2b_3+\gamma_3d_3=\gamma_0,\\&\sigma_1b_2+\sigma_2b_3+\sigma_3d_3=\sigma_0,\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\beta_1 = -a_1\alpha_1\lambda_3, \quad \beta_2 = a_1\alpha_1\lambda_2, \quad \beta_3 = a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3 - B_0\left(a_2 + a_3\right),$$
$$\gamma_1 = B_0\left(a_1 + a_2\right) - a_1\alpha_1\lambda_1 - a_2\alpha_2\lambda_2, \quad \gamma_2 = -a_3\alpha_3\lambda_2, \quad \gamma_3 = a_3\alpha_3\lambda_1,$$
$$\sigma_1 = -a_2\alpha_2\lambda_3, \quad \sigma_2 = B_0\left(a_1 + a_3\right) - a_1\alpha_1\lambda_1 - a_3\alpha_3\lambda_3, \quad \sigma_3 = -a_2\alpha_2\lambda_1,$$
$$\beta_0 = \frac{1}{2}\left(a_2\alpha_2\lambda_3 B_{22} - a_3\alpha_3\lambda_2 B_{33}\right) - a_3 B_{23}\left(B_0 - \alpha_3\lambda_3\right) +$$
$$+a_3 B_0\left(\alpha_2\lambda_3 + \alpha_3\lambda_2\right) - \alpha_2\lambda_3\left(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\left(a_2\alpha_2\lambda_1 B_{22} - a_1\alpha_1\lambda_2 B_{11}\right) + a_2 B_{12}\left(B_0 - \alpha_2\lambda_2\right) - \tag{30}$$
$$-a_2 B_0\left(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1\right) + \alpha_3 a_3\left(\lambda_1 B_{23} - \lambda_2 B_{13}\right) + \lambda_1\lambda_2\left(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2\right) -$$
$$-a_3\alpha_2\alpha_3\lambda_1\lambda_3 + \alpha_1\lambda_2\left(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(a_3\alpha_3\lambda_1 B_{33} - a_1\alpha_1\lambda_3 B_{11}\right) + a_3 B_{13}\left(B_0 - \alpha_3\lambda_3\right) - a_2\alpha_2\lambda_3 B_{12} +$$
$$+\lambda_1\lambda_3\left(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2\right) + \alpha_1\lambda_3\left(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$B_0 = \frac{1}{2}\left(B_{11} + B_{22} + B_{33}\right).$$

Учитывая формулы (30), найдем значение

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} = -B_0\big\{B_0^2\left(a_1 + a_2\right)\left(a_1 + a_3\right)\left(a_2 + a_3\right) -$$
$$-B_0\big[\left(a_1 + a_2\right)\left(a_1 + a_3\right)\left(a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3\right) + \left(a_2 + a_3\right)\left(a_1 + a_2\right) \times \tag{31}$$
$$\times\left(a_1\alpha_1\lambda_1 + a_3\alpha_3\lambda_3\right) + \left(a_1 + a_3\right)\left(a_2 + a_3\right)\left(a_1\alpha_1\lambda_1 + a_2\alpha_2\lambda_2\right)\big] +$$
$$+\left(a_1\alpha_1\lambda_1 + a_2\alpha_2\lambda_2 + a_3\alpha_3\lambda_3\right)\left[a_1\alpha_1\lambda_1\left(a_2 + a_3\right) + a_2\alpha_2\lambda_2\left(a_1 + a_3\right) +\right.$$
$$\left.+a_3\alpha_3\lambda_3\left(a_1 + a_2\right)\right]\big\}.$$

Поскольку параметр B_0 может принимать не нулевые значения, то будем предполагать, что $\Delta \neq 0$. Тогда система (29) имеет единственное решение

$$b_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{32}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \sigma_0 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_0 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_0 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Будем считать, что параметры a_i, α_i, λ_i $(i = \overline{1,3})$, B_{ij} заданы. Тогда формулы (31)-(33) позволяют определить величины b_2, b_3, d_3. Из соотношений (8)-(10) можно найти параметры $b_0, b_1, d_0, d_1, d_2, e_0, e_1, e_2$. Используя то обстоятельство, что параметры s_i $(i = \overline{1,3})$, C_{ij} в силу постановки задачи не стеснены какими-либо ограничениями, из уравнений (15)-(17) определим значения s_i, из равенств (18), (20), (22), (24), (25) значения C_{12}, C_{13} и разности $C_{22} - C_{33}$ и $C_{33} - C_{11}$.

Таким образом, показана разрешимость условий (15)-(25) для случая обобщенной задачи динамики, то есть для случая $B_{ij} \neq 0$, $C_{ij} \neq 0$. При рассмотрении задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием только силы тяжести необходимы дополнительные исследования, так как при $B_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$ определитель Δ из (31) обращается в нуль.

4. Интегрирование уравнений (11). В общем случае существования инвариантных соотношений (4), (7) уравнений (1), (2) интегрирование уравнений (11) затруднительно, так как они допускают только один первый интеграл

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Поэтому интегрирование уравнений (11) будем проводить, используя подход, который принят для случая постоянного гиростатического момента [14].

Пусть параметры инвариантных соотношений (5) удовлетворяют дополнительным условиям

$$a_1b_1 = a_2d_2 = a_3e_3 = m_0, \quad a_2d_1 = -a_1b_2, \quad a_3e_1 = -a_1b_3, \quad a_3e_2 = -a_2d_3. \tag{34}$$

В силу соотношений (9)-(10) равенства (34) можно записать в виде

$$\begin{gathered} a_1B_{11} = 2\left(m_0 + a_1\alpha_1\lambda_1\right), \quad a_2B_{22} = 2\left(m_0 + a_2\alpha_2\lambda_2\right), \\ a_3B_{33} = 2\left(m_0 + a_3\alpha_3\lambda_3\right), \quad d_3\left(a_3 - a_2\right) = a_3\left(B_{23} - \alpha_2\lambda_3 - \alpha_3\lambda_2\right), \\ b_2\left(a_2 - a_1\right) = a_2\left(B_{12} - \alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1\right), \quad b_3\left(a_3 - a_1\right) = a_3\left(B_{13} - \alpha_1\lambda_3 - \alpha_3\lambda_1\right). \end{gathered} \tag{35}$$

На основании соотношений (34) скалярные равенства (5) имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + m_0\boldsymbol{\nu} + G\boldsymbol{\nu}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ -a_1b_2 & 0 & a_2d_3 \\ -a_1b_3 & -a_2d_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = (a_1b_0, a_2d_0, a_3e_0)$. Вместо скалярных уравнений (11) рассмотрим их векторное представление, учтя формулы (36)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}\,(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n}), \tag{37}$$

где

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad n_1 = -a_2d_3, \quad n_2 = a_1b_3, \quad n_3 = -a_1b_2. \tag{38}$$

В статье [14] показано, что уравнение (37) кроме интеграла $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ имеет при условии $\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ дополнительный интеграл

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_0^2 + \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}} = c, \tag{39}$$

где c – произвольная постоянная. Это значит, что интегрирование уравнения (37) можно осуществить в квадратурах.

Покажем, что для рассматриваемого случая (35) система уравнений (26)-(28) разрешима. Непосредственной подстановкой значений (9), (10), (35) в уравнения можно убедиться в том, что имеют место не менее двух случаев существования решения системы (26)-(28).

В первом случае параметры инвариантных соотношений (4), (7) и параметры уравнений (1), (2) имеют значения:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad a_2 B_{11} = a_1 B_{22}, \quad B_{12} = 0, \quad b_0 = 0, \quad d_0 = 0, \\
e_0 = -\lambda_0, \quad b_1 = \frac{B_{11}}{2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right), \quad d_1 = 0, \\
d_2 = \frac{B_{22}}{2}, \quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right), \quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right), \\
e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right), \quad e_3 = \frac{a_1 B_{22}}{2a_3}, \quad \lambda_0 = \frac{2s_3}{a_3\left(B_{11} + B_{22}\right)}, \\
\lambda_1 = \frac{B_{23}\left[B_{22}\left(2a_2 + 3a_3\right) + a_3\left(2B_{11} + B_{33}\right)\right]}{a_3\left(2B_{11} + 3B_{22} + B_{33}\right)}, \quad \lambda_3 = \frac{a_3 B_{33} - a_1 B_{11}}{2a_3}, \qquad (40) \\
s_1 = \lambda_0\left(a_1 b_3 - a_3\lambda_1\right), \quad s_2 = \lambda_0\left(a_2 d_3 - a_3\lambda_2\right), \quad C_{12} = \frac{a_2 d_3}{a_3}\left(a_3\lambda_1 - a_1 b_3\right), \\
C_{13} = -\frac{a_2 b_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right), \quad C_{23} = -\frac{a_2 d_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right), \\
C_{33} - C_{22} = -a_1 b_3^2 - a_2 d_3 B_{23} + \frac{a_1 B_{11}}{4}\left(B_{22} - B_{33}\right), \\
C_{11} - C_{33} = a_1 b_3 B_{13} + a_2 d_3^2 + \frac{1}{4} B_{11}\left(B_{33} - B_{11}\right).
\end{gathered}$$

Инвариантные соотношения (4) в силу условий (40) принимают вид:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{B_{11}}{2}\nu_1 + \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_3, \\
x_2 &= \frac{a_1 B_{11}}{2a_2}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_3, \qquad (41) \\
x_3 &= -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}\nu_3.
\end{aligned}$$

Запишем скалярные уравнения, вытекающие из (37), с учетом равенства $n_3 = 0$, которое следует из (38), (40):

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= -a_3\lambda_0\nu_2 + n_1\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right) - n_2\nu_1\nu_2, \\
\dot{\nu}_2 &= a_3\lambda_0\nu_1 + n_2\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) - n_1\nu_1\nu_2, \qquad (42) \\
\dot{\nu}_3 &= -\nu_3\left(n_1\nu_1 + n_2\nu_2\right).
\end{aligned}$$

Уравнения (42) имеют первые интегралы $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$ и

$$\frac{n_2\nu_1 - n_1\nu_2 + a_3\lambda_0}{\nu_3} = c, \qquad (43)$$

где c – произвольная постоянная.

Второй случай разрешимости уравнений (26)-(28) характеризуется равенствами:

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad a_1 B_{11} = a_2 B_{22}, \quad B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0, \\
b_1 = \frac{B_{11}}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2 B_{12}}{a_2 - a_1}, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right), \quad d_1 = \frac{a_1 B_{12}}{a_1 - a_2}, \\
d_2 = \frac{B_{22}}{2}, \quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right), \quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right), \\
e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right), \quad e_3 = \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}, \quad \lambda_0 = -\frac{2s_3}{a_3 B_{33}}, \\
\lambda_1 = \frac{B_{13}\left[B_{11}\left(2a_1 + 3a_3\right) + a_3\left(B_{22} - B_{11}\right)\right]}{a_3\left(2B_{11} + B_{22}\right)}, \quad \lambda_3 = \frac{a_3 B_{33} - a_1 B_{11}}{2a_3}, \\
\lambda_2 = \frac{B_{23}\left[B_{22}\left(2a_2 + 3a_3\right) + a_3\left(B_{11} - B_{22}\right)\right]}{a_3\left(2B_{22} + B_{11}\right)}, \quad s_1 = \lambda_0\left(a_1 b_3 - a_3 \lambda_1\right), \\
s_2 = \lambda_0\left(a_2 d_3 - a_3 \lambda_2\right), \quad C_{12} = \frac{a_1 b_2}{2}\left(2B_{22} + B_{33}\right) - \frac{a_2 d_3}{a_3}\left(a_3 b_3 - a_3 \lambda_1\right), \\
C_{13} = a_1 b_2 d_3 - \frac{a_1 b_3}{2}\left(2B_{11} + B_{33}\right), \quad C_{23} = -a_1 b_2 b_3 - \frac{a_2 d_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right), \\
C_{33} - C_{22} = a_1\left(b_2^2 - b_3^2\right) - a_2 d_3 B_{23} + \frac{a_1 B_{11}}{4}\left(B_{22} - B_{33}\right), \\
C_{11} - C_{33} = a_2 d_3^2 - \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2} + \frac{1}{4} B_{11}\left(B_{33} - B_{11}\right).
\end{gathered}
\tag{44}
$$

При условиях (44) инвариантные соотношения таковы:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{B_{11}}{2}\nu_1 + \frac{a_1 B_{12}}{a_2 - a_1}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_3, \\
x_2 &= \frac{a_1 B_{12}}{a_1 - a_2}\nu_1 + \frac{B_{22}}{2}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_3, \\
x_3 &= -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}\nu_3,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

а уравнения (37) принимают более сложный вид, чем уравнения (42):

$$
\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= -a_3 \lambda_0 \nu_2 + n_1\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right) - n_2 \nu_1 \nu_2 - n_3 \nu_1 \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= a_3 \lambda_0 \nu_1 + n_2\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) - n_1 \nu_1 \nu_2 - n_3 \nu_2 \nu_3, \\
\dot{\nu}_3 &= n_3\left(\nu_1^2 + \nu_2^2\right) - n_1 \nu_1 \nu_3 - n_2 \nu_2 \nu_3.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Так как в силу (38) и $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, -a_3\lambda_0)$ векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\omega}_0$ в общем случае не ортогональны, то интеграла вида (39) для уравнений (46) не существует.

Рассмотрим интегрирование уравнений (42). Введем новые переменные

$$
\nu_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{47}
$$

Тогда равенство $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ становится тождеством. Подставим выражения (47) в уравнение (42) и интеграл (43). В результате несложных преобразований получим

$$\dot{\theta} = \operatorname{ctg}\theta \cdot \sqrt{\mu_0^2 \sin^2\theta - (c\cos\theta + a_3\lambda_0)^2}, \tag{48}$$

$$\varphi = -\alpha_0 + \arccos\frac{c\cos\theta + a_3\lambda_0}{\mu_0 \sin\theta}, \tag{49}$$

где $\mu_0 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{n_1}{n_2}$.

Таким образом, из уравнения (48) вытекает, что $\theta = \theta(t)$ – элементарная функция времени. После ее нахождения $\varphi = \varphi(t)$ определим из формулы (49). Подстановка найденных функций $\theta(t)$, $\varphi(t)$ в равенства (47) дает возможность установить зависимости ν_i $(i = \overline{1,3})$ от времени. Тогда соотношения (7), (41) позволяют определить основные переменные задачи от времени. Функция $L(t) = \dot{\lambda}(t)$ находится на основании формул (7) и (47).

Рассмотрим второй случай. Пусть параметры задачи и инвариантных соотношений удовлетворяют условиям (44). Тогда инвариантные соотношения принимают вид (45). Интегрирование уравнений (46) проведем при $\lambda_0 = 0$. Из условий (44) вытекает, что $s_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$, то есть центр масс гиростата неподвижен. Запишем уравнения (46) в симметричной форме

$$\dot{\nu}_i = n_i - \nu_i\left(n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3\right). \tag{50}$$

Пусть $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ – начальные значения переменных ν_i. Выберем их так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = \left(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}\right)$. Это позволяет записать решение уравнений (50) в виде

$$\nu_i(t) = \frac{n\nu_i^{(0)} + n_i \operatorname{sh} n(t - t_0)}{n \operatorname{ch} n(t - t_0)}, \tag{51}$$

где $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Как и первом случае функции (51) дают возможность построить решение уравнений (1), (2), которые выражаются элементарными функциями времени.

5. Вывод. Установлены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа-Пуассона в случае переменного гиростатического момента. Найдены новые решения этих уравнений.

1. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. – 1949. – **2**. – С. 152-309.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
5. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83-96.
6. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи и наблюдения в теории динамических систем // Киев: Наук. думка. – 1980. – 175 с.

7. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999.– Т. 63, вып. 5. – С. 825-826.
8. *Ковалева Л.М., Позднякович Е.В.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
9. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
11. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
12. *Мазнев А.В.* О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 14-18.
13. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations. // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**. – № 5. – P. 747-754.
14. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 418-426.

O. V. Maznyev

The case of the three invariant correlations non-autonomous gyrostat motion equations.

The terms of three invariant correlations existence of gyrostat motion equations under the action of potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic moment are got. The new solutions of these equations, which are expressed by elementary functions on time are found.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation.*

О. В. Мазнєв

Випадок трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху неавтономного гіростата.

Отримано умови існування трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Знайдено новий розв'язок вказаних рівнянь, який виражається елементарними функціями часу.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.*

Донецкий национальный ун-т
maznev_av@rambler.ru

Получено 18.03.12